Atomfizika gyakorlófeladatok, 2. adag

Nagy Márton

2017. szeptember 25&28, október 2&5.

Vázlat:

• 3. óra:

Maxwell-féle sebességeloszlás levezetése (barometrikus magasságformulából, termikus egyensúly követelményéből). Kitérő: gamma-függvényre vezető integrálok. Sebességeloszlás tulajdonságai: diszkusszió: legvalószínűbb sebesség, a sebesség és a sebességnégyzet várható értéke.

• 4.óra:

Relativisztikus kinematika továbbfejlesztése. Compton-szórás tárgyalása, diszkussziója. Egyszerű folyamatok kinematikája: fotonelnyelés szabad elektronon (lehetetlen), két foton összeolvad egy fotonná (lehetetlen). Folyt. köv...

Gyakorló számolások:

1. Egy E=2 Mev energiájú foton nyugalomban lévő elektronon szóródik $\vartheta = 10, 20, 30, 60, 90, 135°$-os szögekben. Mekkora energiával halad tovább?

2. Egy E energiájú foton elektronon vett szóródása után mekkora lesz az elektron E'_e *kinetikus* energiája? Mekkora ez maximálisan ($E'_{e,\max}$; ez a ϑ=180°-nak megfelelő eset)? Ez utóbbi („visszaszórás") esetben mekkora lesz a foton szórás utáni energiája ($E'_{\gamma,\vartheta=180°}$)? Mekkora lesz ez, ha $E\to\infty$?
   Válaszok:
   $$E'_e = E\frac{E(1-\cos\vartheta)}{m_ec^2 + E(1-\cos\vartheta)}, \quad E'_{e,\max} = E\frac{2E}{m_ec^2+2E},$$
   $$E'_{\gamma,\vartheta=180°} = E\frac{m_ec^2}{m_ec^2+2E}, \quad \lim_{E\to\infty} E'_\gamma = \frac{m_ec^2}{1-\cos\vartheta}, \quad \lim_{E\to\infty} E'_{\gamma,\vartheta=180°} = \frac{m_ec^2}{2}.$$
   Érdekes, hogy $E\to\infty$-re E'_γ véges értékhez tart, ha ϑ-t az $E\to\infty$ határátmenet közben fixen tartjuk.

3. (Ez volt órán, de csináljuk meg!) Bizonyítsuk be (energia– és impulzusmegmaradással), hogy két foton nem tud összeolvadni eggyé! (Útmutatás: legyen a feltételezett végső foton iránya a tengely, ehhez képest a bejövő irányok legyenek α és β szögűek. Az α=0 (vagy β=0) esetben kijön, hogy a másik szög is nulla, és ekkor elvileg akár lehetséges lenne a dolog; minden más esetben azonban ellentmondást kell kapnunk.)

4. Mekkora egy ideális gázban a sebesség α-adik ($\alpha\in\mathbb{R}$) hatványának várható értéke? Fejezzük ki v_0-lal, ahol v_0 a legvalószínűbb sebesség! *Válasz:* $\langle v^\alpha\rangle = v_0^\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)$; ez az összes eddig kiszámoltat speciális esetként tartalmazza persze.

5. (Kiegészítés, nem lesz): Vizsgáljuk az olyan ideális gáz részecskéinek eloszlását, ahol a hőmérséklet annyira nagy, hogy a részecskék mozgása már relativisztikusnak tekintendő[1]! Legyen a gáz részecskéinek tömege m, az impulzus jelölése p, az energiáé legyen ε. Határozzuk meg az impulzuseloszlást abból kiindulva, hogy az *impulzustérben* egyenletesen vannak betöltve az állapotok (vagyis adott $\mathrm{d}^3\mathbf{p}$ impulzuscellában lévő állapotok száma $\mathrm{d}^3\mathbf{p}$-vel arányos), és egy adott állapot betöltési valószínűsége $e^{-\varepsilon/k_\mathrm{B}T}$-vel arányos! Határozzuk meg az energia és a sebesség nagyságának eloszlását is! Mekkora a legvalószínűbb p_0 impulzusnagyság? (A normálási állandók és a várható értékek kiszámolását nem kérem; ehhez ismerni kellene a módosított Bessel-függvényeket és integrál-előállításaikat.)

   Válasz: az impulzuseloszlás a mondott feltételek alapján a következő:

$$\frac{dn}{d^3\mathbf{p}} = C \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{(mc^2)^2+p^2c^2}}{k_\mathrm{B}T}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dn}{dp} = C\cdot 4\pi p^2 \exp\left(-\frac{\sqrt{(mc^2)^2+p^2c^2}}{k_\mathrm{B}T}\right),$$

   az energiaeloszlásra és a sebességeloszlásra is áttérhetünk:

$$\frac{dn}{d\varepsilon} = \frac{dn}{dp}\frac{dp}{d\varepsilon}, \quad \text{ahol} \quad p(\varepsilon) = \frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon^2-(mc^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{1}{c}\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-(mc^2)^2}}, \quad \text{valamint}$$

$$\frac{dn}{dv} = \frac{dn}{dp}\frac{dp}{dv}, \quad \text{ahol} \quad p(v) = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dv} = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \quad \text{ezekből tehát}$$

$$\frac{dn}{d\varepsilon} = C\cdot\frac{4\pi}{c^3}\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2-(mc^2)^2}e^{-\varepsilon/k_\mathrm{B}T}, \quad \frac{dn}{dv} = C\cdot 4\pi\frac{m^3v^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}}\exp\left(-\frac{1}{k_\mathrm{B}T}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

   A legvalószínűbb impulzusértéket a fentebbi $\frac{dn}{dp}$ képletből (deriválva és nullával egyenlővé téve) kapjuk; az eredmény:

$$p_0 = \sqrt{2}\frac{k_\mathrm{B}T}{c}\sqrt{1+\sqrt{1+\left(\frac{mc^2}{k_\mathrm{B}T}\right)^2}}.$$

   Ha $mc^2 \gg k_BT$, visszakapjuk, hogy $p_0 = \sqrt{2mk_\mathrm{B}T}$, ami a nemrelativisztikus képlet volt.

   Megjegyzés: a sebesség és az energia eloszlásait $\frac{dn}{dv}$-t és $\frac{dn}{d\varepsilon}$-t deriválgatva a legvalószínűbb energia– ill. sebességnagyságokat kapnánk meg. Ezek bonyolultabb (harmadfokú) egyenletre vezetnek; mindenesetre fontos, hogy a kapott v_0 ill. ε_0 értékek *nem egyeznek meg* a most kiszámolt p_0-hoz, mint impulzushoz tartozó sebességgel ill. energiával!!!

6. Kiegészítés, bonyolult, de érdemes végigcsinálni: Általánosítsuk a nulla tömegű részecskékre (fotonokra) levezetett Compton-féle energiaváltozás képletét tömeges részecskékre!

   Nagy energiájú (azaz: relativisztikus sebességű) m tömegű részecskéket szóratunk szabad, kezdetben álló M tömegű részecskéken. Legyen a bejövő részecske energiája ε, impulzusának nagysága p, a szórás után pedig ε' és p'. Ezek között ugyebár az $\varepsilon^2 - p^2 = \varepsilon'^2 - p'^2 = m^2$ össze-

[1] Nem túl gyakorlatias ez a feladat; ha a részecskék már „lényegesen relativisztikusan” mozognak, azaz mozgási energiájuk összemérhető a nyugalmi energiájukkal, akkor azt a folyamatot sem szabad(na) elhanyagolni, amikor két részecske nagyenergiájú ütközése több másik keletkezésével jár; vagyis végső soron a részecskeszám nem lesz állandó, hanem egy meghatározandó dinamikai mennyiség. De ez messzebbre vezet.

függés áll fenn. (Megjegyzés: ez a feladat egy elég hosszadalmas számolás, gyakorlásnak jó, ilyen nem lesz a ZH-n. A c fénysebességet érdemes 1-nek venni, azaz a tömeget és az impulzust is energiaegységekben mérni. Ez gyk. azt jelenti, hogy számolás közben c-t lehagyjuk, és a végén, ha akarjuk, minden impulzusba és tömegbe $p \to pc$, $m \to mc^2$ módon visszaírhatjuk a fénysebességet.)

Tegyük fel, hogy ε'-t (és így nyilván p'-t is), valamint a szóródott részecske kilépési irányát (szögét, jelöljük ezt ϑ-val) is meg tudjuk mérni! A Compton-szórás elemzésének mintájára adjunk meg ezen két mennyiség között összefüggést! Visszakapjuk-e az $m \to 0$, $M = m_e$ esetben a Compton-képletet[2]?

7. Bizonyítsuk be (gyakorlásképpen; az energia– és az impulzusmegmaradást konkrétan végigszámolva), hogy szabadon mozgó elektron nem tud fotont kisugározni! Útmutatás: vegyük az eredeti elektron mozgásirányát x tengelynek, az elektron eredeti és végső impulzusa legyen p és p', a kilépő foton energiája és szöge ε ill. ϑ a kilépő elektron szöge β. Felírva a három egyenletet (energia, impulzus$\leftrightarrow$, impulzus$\updownarrow$), kiküszöbölhetjük β-t, majd p'-t kétféleképpen előállítva a $2\varepsilon(\sqrt{m^2+p^2} - p\cos\vartheta) = 0$ egyenletet kapjuk (megint c=1-gyel számolva), ami nyilván lehetetlen, ha $\varepsilon \neq 0$. (Ugye?)

[2] Nyilván igen. Ha nem, elszámoltuk. Amikor $m = 0$, akkor nyilván $\varepsilon = p$, $\varepsilon' = p'$ (emlékezzünk, c-t egynek vettük). A számoláshoz segédlet: ε'-t és ε-t, valamint p-t és p'-t is egyszerre érdemes használni, úgy, hogy közben a kisujjunkban van, hogy ezek persze összefüggenek: $\varepsilon^2 - p^2 = m^2$, $\varepsilon'^2 - p'^2 = m^2$. A helyes eredmény:

$$\varepsilon' = \frac{(M+\varepsilon)\left(M\varepsilon + m^2\right) + p^2\cos^2\vartheta\sqrt{M^2 - m^2\sin^2\vartheta}}{(M+\varepsilon+p\cos\vartheta)(M+\varepsilon-p\cos\vartheta)}.$$