Atomfizika gyakorlófeladatok, 2. adag

relativisztikus kinematika, hullámok, egyebek

Nagy Márton

2016. október 19.

Olyan feladatokat is felsorolok, amik esetleg (azóta) előkerültek gyakorlaton is. Nem baj, nyugodtan számoljuk ki őket még egyszer! :D

1.) Vizsgáljuk a hidrogénatomot a Bohr-modellben még egy kicsit!

- Mekkora mágneses teret kelt az atommag helyén a keringő elektron a különböző n-nel jellemzett állapotokban[1]?
- Ha a mag (proton) tömegét is figyelembe vesszük (vagyis azt, hogy a mag és az elektron a közös tömegközéppont körül kering), mik lesznek az elektron energiaszintjei? (A kvantumfeltétel továbbra is legyen ugyanaz: az össz-impulzusmomentum $n\hbar$, ahol $n = 1, 2, \ldots$.)
- Mekkora lesz az $n = 2$ és az $n = 3$ állapot közötti átmenetnek megfelelő foton hullámhossza?
- Ha most a mag nem egy proton, hanem egy deuteron (proton + neutron), azaz nehézhidrogénről van szó, akkor mekkora lesz az előbb kiszámolt hullámhossz[2]?
- Vizsgáljuk most a *pozitróniumot*, vagyis azt a képződményt, amikor (azonos tömegű, de ellentétes töltésű) elektron és pozitron kering egymás körül! Mik most a rendszer energiaszintjei a Bohr-modell alapján?

2.)* Általánosítsuk a nulla tömegű részecskékre (fotonokra) levezetett Compton-féle energiaváltozás képletét tömeges részecskékre!

Nagy energiájú (azaz: relativisztikus sebességű) m tömegű részecskéket szóratunk szabad, kezdetben álló M tömegű részecskéken. Legyen a bejövő részecske energiája ε, impulzusának nagysága p, a szórás után pedig ε' és p'. Ezek között ugyebár az $\varepsilon^2 - p^2 = \varepsilon'^2 - p'^2 = m^2$ összefüggés áll fenn[3]. Tegyük fel, hogy ε'-t (és így nyilván p'-t is), valamint a szóródott részecske kilépési irányát (szögét, jelöljük ezt ϑ-val) is meg tudjuk mérni! A Compton-szórás elemzésének mintájára adjunk meg ezen két mennyiség között összefüggést! Visszakapjuk-e az $m \to 0$, $M = m_e$ esetben a Compton-képletet[4]?

3.) Mozogjon egy m tömegű részecske az x tengely mentén egy egydimenziós potenciálgödörben, ahol a helyzeti energia $V(x)$. Határozzuk meg a következő esetekben, hogy a Sommerfeld-féle kvantumfeltétel alapján mik a lehetséges energiaszintek! (Segítség: gondoljunk az energiamegmaradásra!)

- Legyen először $V(x) = a \cdot x^5$, ha $x > 0$, és $V(x) = \infty$, ha $x < 0$, ahol a J$/m^5$ dimenziójú konstans, a ∞ pedig azt jelenti, hogy a részecske a határról visszapattan.
- Legyen most $V(x) = ax^4$, ahol a (dimenziós) konstans!
- Legyen most $V(x) = ax^{2m}$, ahol m pozitív egész szám, a pedig ismét (dimenziós) konstans!

[1] A valódi atomokban is kelthet mágneses teret az atommag helyén az elektronfelhő, de annak értékét egyáltalán nem a Bohr-modellből kell meghatározni. Az itt kiszámolt eredmény nagyságrendileg érdekes csak.

[2] Így fedezték fel a deutériumot (Urey, 1931); észrevették, hogy vannak kicsit eltolt hullámhosszú átmeneti vonalak is a hidrogén színképében.

[3] Ez a feladat egy elég hosszadalmas számolás, gyakorlásnak jó, ilyen nem lesz a ZH-n. Ezenkívül ebben a feladatban a c-t, a fénysebességet érdemes 1-nek venni (még így is elég hosszú a számolás).

[4] Nyilván igen. Ha nem, elszámoltuk. Amikor $m = 0$, akkor nyilván $\varepsilon = p$, $\varepsilon' = p'$ (emlékezzünk, c-t egynek vettük). A számoláshoz segédlet: ε'-t és ε-t, valamint p-t és p'-t is egyszerre érdemes használni, úgy, hogy közben a kisujjunkban van, hogy ezek persze összefüggenek: $\varepsilon^2 - p^2 = m^2$, $\varepsilon'^2 - p'^2 = m^2$. A helyes eredmény:

$$\varepsilon' = \frac{(M+\varepsilon)\left(M\varepsilon + m^2\right) + p^2\cos^2\vartheta\sqrt{M^2 - m^2\sin^2\vartheta}}{(M+\varepsilon+p\cos\vartheta)(M+\varepsilon-p\cos\vartheta)}.$$

- (ez nehezebb; nem is annyira lehet átalakítani): legyen $V(x) = V_0 \mathrm{ch}(x/b)$, ahol V_0 energia–, b pedig hosszúság dimenziójú állandó!

4.) A Bohr-Sommerfeld-kvantálás segítségével megérthetjük azt, hogy az ideális gázban az impulzustérben „egyenletesen oszlanak el az állapotok". Ehhez tekintsünk egy nagy, a, b, c oldalú téglatest alakú dobozt, amiben egy m tömegű részecske mozog. Klasszikusan mindhárom irányú mozgás periodikus, úgyhogy alkalmazhatjuk mindhárom irányban a Sommerfeld-kvantálást. Mik az impulzuskomponensek lehetséges értékei? Mik a részecske energiaszintjei? Hány energiaszint van egy adott E energia alatt? Számoljuk végig részletesen!

5.) Számoljuk ki egy kvantumos harmonikus oszcillátor fajhőjét[5]! Legyen a körfrekvencia ω. Tudjuk, hogy az energiaszinteket egy $n \in \mathbb{N}$ szám indexeli: az n-edig lehetséges energia $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$. Induljunk ki abból, hogy T hőmérsékleten egy adott E_n energiájú állapot valószínűsége, p_n az $\exp(-E_n/k_B T)$-vel arányos[6]! Mennyi ebből az energia várható értéke, vagyis mennyi energiája van a „testnek" (oszcillátornak) T hőmérsékleten? Ennek deriváltja a fajhő.

6.) Vizsgáljuk meg részletesen a fotonkibocsátáskor visszalökődő atom által elvitt energiát!

- Legyen egy atom tömege M, legyen alap– és gerjesztett állapota között az energiakülönbség Δ. Ezek közötti átmenetkor elvileg a kisugárzott foton energiája Δ, de ha figyelembe vesszük, hogy az impulzusmegmaradás miatt az atom visszalökődik, akkor kiderül, hogy a fotonenergia kevesebb. Mivel általában $\Delta \ll Mc^2$, először számoljuk ki a kisugárzott foton energiáját úgy, hogy a visszalökődő atom tömegét változatlannak gondoljuk, valamint mozgását nemrelativisztikusnak!
- Határozzuk meg az előző eredmény sorfejtését Δ/Mc^2 szerint! Mekkora az első olyan tag, ami korrekciót jelent a visszalökődés nélkül gondolt Δ fotonenergiához?
- Határozzuk meg most az előző eredmény eggyel további sorfejtését! Állítás: ez már nem helyes semmiképpen, mert ha ezt nem hanyagoljuk el, akkor „ugyanennyire" nincs jogunk nemrelativisztikusan kezelni az atom mozgását.
- Számoljuk ki most egzakt, relativisztikus módon a problémát! Ehhez figyelembe kell venni nemcsak azt, hogy a visszalökődött atom mozgása relativisztikus, hanem azt is, hogy az alapállapotú atom mc^2 nyugalmi energiája kevesebb, mint a gerjesztett atomé (Mc^2): $Mc^2 - \Delta = mc^2$. Az energia– és impulzusmegmaradásból számítsuk ki most, hogy mekkora lesz a kilépő foton energiája!
- Fejtsük most sorba ezt az eredményt, a Δ/Mc^2-t (vagy a Δ/mc^2-et; most már nem mindegy, hogy melyikkel számolunk!) mégis kicsinek gondolva! Visszakapjuk-e az előző, nemrelativisztikusan számolt sorfejtési eredményeket?
- (ha még van türelmünk:) Ismételjük meg az ebben a feladatban feladott összes számítást a fordított esetre: amikor egy kezdetben álló, alapállapotú atom elnyel egy fotont, és ezáltal gerjesztett állapotba kerül (és meg is lökődik). A kérdések itt arra vonatkoznak, hogy mekkora energiával kell „belőni" a fotont; ez nyilván nagyobbnak adódik, mint Δ.

7.) Vizsgáljuk az olyan ideális gázban a sebességeloszlást, ahol a hőmérséklet annyira nagy, hogy a részecskék mozgása már relativisztikusnak tekintendő[7]! Legyen a gáz részecskéinek tömege m, és határozzuk meg a sebesség nagyságának eloszlását abból kiindulva, hogy az *impulzustérben* egyenletesen vannak betöltve az állapotok (vagyis adott $\mathrm{d}^3\mathbf{p}$ impulzuscellában lévő állapotok száma $\mathrm{d}^3\mathbf{p}$-vel arányos), és egy adott állapot betöltési valószínűsége $e^{-E/k_B T}$-vel arányos! Milyen a sebesség nagyságának eloszlása? Mekkora a legvalószínűbb sebesség[8]?

---

[5] Ezt, amit most csinálunk, Einstein tette meg először. Történeti érdekessége, hogy ez volt az első számolás, amiben bárminek is a fajhője hőmérsékletfüggőnek adódott.

[6] Nem egyenlő vele: meg kell még szorozni egy olyan normálási állandóval, hogy $\sum_n p_n = 1$ legyen.

[7] Nem túl gyakorlatias ez a feladat; ha a részecskék már „lényegesen relativisztikusan" mozognak, azaz mozgási energiájuk összemérhető a nyugalmi energiájukkal, akkor azt a folyamatot sem szabad(na) elhanyagolni, amikor két részecske nagyenergiájú ütközése több másik keletkezésével jár; vagyis végső soron a részecskeszám nem lesz állandó, hanem egy meghatározandó dinamikai mennyiség. De ez messzebbre vezet.

[8] A várható értékek kiszámolását nem kérem; ehhez nem feltétlenül ismert típusú integrálokat kellene kiszámolni.