

Kvantumfizika vizsgfeladatok 2009.

I. Számolási feladatok (pontozásnál az eredmény számszerű helyessége számít!)

1. Mekkora sebességgel lökődik vissza egy kezdetben álló H-atom, amelynek elektronja az $n=2$ kvantumszámú Bohr-pályájáról az $n=1$ pályára „átugorva” sugárzott ki egy fotont? (Használható számértékek: az alapállapot ($n=1$) energiája $-2,18 \times 10^{-18}$ J, a H-atom tömege $1,69 \times 10^{-27}$ kg, a fény sebessége vákuumban $3,00 \times 10^8$ m/s). (5 pont)

2. Homogén mágneses térben, amelynek indukciója $B=10^{-3}$ Tesla erősségű, elektron nyugszik. Válasszuk B irányát z -tengelynek! **Az elektron az x -tengelyre vonatkozóan határozott $+\frac{1}{2}$ spinvetületű spinállapotban van.** Határozza meg az elektronnak a mágneses térrel való kölcsönhatásából származó potenciális energiája várható értékét és annak szórását is! ($\mu_{\text{elektron}} = 9,3 \times 10^{-24}$ J/Tesla). (5 pont)

II. Elvi feladatok (pontozásnál a gondolati helyesség az elsődleges!)

1. 3 kérdés a kvantummechanikai hullámegyenlet konstrukciójához kapcsolódóan
- 1.1 Mit mértek a Colella-Overhauser-Werner kísérletben? Mi köze hozzá a nem-relativisztikus mozgást végző részecskét leíró a Schrödinger-egyenletnek? Hogy jön az egészbe a gravitáció? (2 pont)
- 1.2 A szabadon mozgó részecske energiája és lendülete (impulzusa) közötti relativisztikus kapcsolat $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$, ahol c a fény vákuumbeli sebessége, m a részecske nyugalmi tömege. Adja meg a de Broglie által javasolt energia-frekvencia, impulzus-hullámvektor megfeleltetés alapján a részecske szabad relativisztikus mozgásának hullámfüggvényét meghatározó egyenletet! (2 pont)
- 1.3 Adja meg az 1.2-beli diszperziós reláció energiára megoldott alakjának az impulzus szerinti sorbafejtését. A részecske nyugalmi energiáját meghaladó energiarész első **két(!)** tagjának felhasználásával adja meg a nem-relativisztikus (elsőrendű idő-deriváltat tartalmazó) Schrödinger egyenlet Hamilton operátorának a nem-relativisztikus sebességeket enyhén meghaladó sebességek esetén érvényes kiegészítését. A tér-koordináták szerinti deriválás hányadik hatványa jelenik meg ebben a tagban? (3 pont)

2. Képzeljünk el 3 rést egy síklapon. Hogyan változik meg a három réses rendszeren áthaladó elektronnyaláb által kialakított interferencia-mintázat, ha olyan detektort helyezünk el az egyik rés mellett, amelyikkel százszázalékos biztonsággal azonosítható, ha az elektron a szóbanforgó résen haladt át? (5 pont)

3. Egy aszimmetrikus falmagasságú, a szélességű potenciálgödör (lásd **a táblára felrajzolt ábrát!**) bal oldalán elhelyezkedő potenciálgát magassága U_0 , szélessége d . Ez a gát választja el a gödörbeli részecskét a külvilágtól, amelyben szabad mozgást végezhet. A jobb oldali szélén a falat tekintsük végtelen magasnak. A gödörben kezdetben az m tömegű részecskének olyan hullámcsomag-állapota van, amelynek mindegyik síkhullám komponensére igaz, hogy $(\hbar k)^2 / (8\pi^2 m) < U_0$. Itt \hbar a Planck állandó, k pedig a síkhullám komponens hullámszáma. A hullámcsomag átlagos $\langle v \rangle$ kezdeti sebessége balra mutat. Adjon **képregény formában kvalitatív leírást** és képenként magyarázó szöveget is(!) a hullámcsomag mozgásáról! (6 pont)

4. Egy m_1 és egy tömegű m_2 tömegű tömegpontot egy (nulla tömegű) D rugóállandójú rugó köt össze.

4.1 Írja fel a rendszer klasszikus mechanikai Hamilton-függvényét, majd a korrespondencia elv alapján készítse el a Hamilton-operátort! (1 pont)

4.2 Vezesse be a tömegközépponti és a relatív koordinátákat és a hozzájuk konjugált impulzusokat! Számítsa ki ezek felcserélési relációit, ha az eredeti változók közötti nem-nulla kommutátorok a következők: $[x_1, p_1]=i\hbar/2\pi$, $[x_2, p_2]=i\hbar/2\pi$? (1 pont)

4.3 Írja át a Hamilton-függvényt, majd a Hamilton-operátort ezekre a változókra és ennek alapján adja meg a tömegközéppont szabad mozgásából és a hozzá viszonyított rezgésekből álló együttes mozgás lehetséges energiáit. (2 pont)

4.4 Mit gondol az energia lehetséges értékeinek spektrumáról, ha a rendszert N tömegpont alkotja, amelyek csak harmonikus erőkkel hatnak kölcsön? (1 pont)

5. Egy Stern-Gerlach berendezésen áthaladó ezüstatom-nyaláb részecskéi $2/3$ valószínűséggel a mágneses tér (z-nek nevezett) irányában, $1/3$ valószínűséggel azzal ellentétesen térnek el.

5.1 Adja meg azon spin-állapot(ok) képletét, amely(ek) a mondott z-irányú mérésre vezetnek! Egyértelműen meghatározható-e ez az állapot? (3 pont)

5.2 Megmondható-e a fentiek alapján az, hogy mekkora lett volna a pozitív, illetve a negatív eltérések gyakorisága, ha ugyanezt a nyalábot egy 90 fokkal elforgatott tengelyű Stern-Gerlach készüléken engedték volna át? (1 pont)

5.3 Elemezze az x-tengely irányú mérési statisztikát az 5.1 kérdésre válaszként megadott képlet segítségével! (3 pont)

6. A He-atommag terében egyetlen kötött mozgást végző elektron legalacsonyabb energiájú állapotának térbeli valószínűségi amplitudóját jelölje $\psi(\mathbf{r})$.

6.1 Javasoljon hullámfüggvényt a semleges He-atom legalacsonyabb energiájú elektron-állapotára (hány elektron van benne?) az **elektron spintulajdonságának figyelembevételével!** (4 pont)

6.2 Milyen energia-járulékot nem vesz figyelembe (hanyagol el) a válaszként megadott közelítő hullámfüggvény? (1 pont)

7. Ismertesse szabad választása szerint a Gähler-Zeilinger kísérlet vagy a Rarity-Tapster kísérlet elvi elrendezését. Válasszában feltétlenül térjen ki arra, hogy a választott kísérletben mit figyelnek meg és az a kvantummozgás melyik fontos sajátosságára világít rá? (5 pont)