Anal tételek és egyéb cucok röviden

Def: komplex euklideszi tér:

X komplex vektortér, amelyen értelmezve van egy skalárszorzat, azaz egy

$X \times X \to \mathbb{C}$ függvény, amelyre

$z, w \in X$ esetén

a, $\langle z, w \rangle = \langle w, z \rangle^*$

b, $\langle z^{(1)} + z^{(2)}, w \rangle = \langle z^{(1)}, w \rangle + \langle z^{(2)}, w \rangle$

c, $\langle \lambda z, w \rangle = \lambda \langle z, w \rangle \qquad \lambda \in \mathbb{C}$

d, $\langle z, z \rangle = 0 \iff z = 0$

$\langle z, z \rangle \geq 0$

áll: X komplex euklideszi téren bevezetjük az

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$$

normát, ekkor igaz lesz

a, $\|z\| \geq 0$, $\|z\| = 0 \iff z = 0$

b, $\|\lambda z\| = |\lambda| \, \|z\|$

c, $\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|$

def: X komplex vektortér a fenti normával, ekkor X-et komplex normált térnek nevezzük

áll: ha X komplex euklideszi tér, akkor a fenti normával komplex normált tér is

def: Hilbert-tér := teljes komplex euklideszi tér

def: Banach-tér := teljes komplex normált tér

def: ortogonális elemek := $\langle x, y \rangle = 0$
($x, y \in X$, X Hilbert tér)

def: zárt altér := ha $Y \subset X$ (X Hilbert tér)
az összeadásra és számmal szorzásra nézve zárt, és Y zárt halmaz

def: $x \in X$ elem merőleges Y-ra := $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y$

def: ortogonális kiegészítő altér :=
$$Y^{\perp} := \{ z \in X : z \perp y, \ \forall y \in Y \}$$

áll: $Y^{\perp}$ altér X-ben

tétel: (Riesz féle felbontási tétel)
legyen X Hilbert tér
$Y \subset X$ altér
$Y^{\perp}$ ortogonális kiegészítő altér
akkor $\forall x \in X \quad \exists!\, y \in Y, z \in Y^{\perp} : \quad x = y + z$

lemma: (paralelogramma egyenlőtlenség)
ha X Hilbert tér, akkor $\forall a, b \in X$-re
$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right)$$

def: ortonormált rendszer := x_k véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok elem (Hilbert-térben)
$$\langle x_k, x_l \rangle = \delta_{kl}$$

def: lineárisan független elemek: $x_k \in X$ (vektortér)
bármely véges lineárkombinációja csak a triviális esetben lehet 0
↳ minden elem együtthatója nulla

<u>def</u>: dimenzió := a lineárisan független elemek maximális száma (végtelen is lehet)

<u>def</u>: szeparábilis := ha X normált térben léteznek véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok elem, amelyek lineárkombinációi egy mindenütt sűrű halmazt alkotnak, amelynek lezárása a teljes tér

<u>tétel</u>: (Schmidt-féle ortogonalizáló eljárás)

legyen X szeparábilis Hilbert tér

$y_k \in X$

ekkor megkonstruálhatók x_k elemek úgy, hogy azok ortonormált rendszert alkotnak és $x_k \in \mathcal{L}(y_k)$

lineárkombinációk halmaza

<u>def</u>: ortogonális sor := $\sum_k c_k x_k$ ahol $c_k \in \mathbb{K}$ és x_k ortonormált rendszert alkotnak

($x_k \in X$ szeparábilis Hilbert tér)

<u>tétel</u>: tfh az ortonormált rendszer végtelen sok elemből áll

ekkor $\sum_k c_k x_k$ sor konvergens $\Longleftrightarrow$ $\sum_k |c_k| < \infty$

<u>tétel</u>: legyen x_k ortonormált rendszer

$x = \sum_k c_k x_k$

ekkor $c_k = \langle x, x_k \rangle$ és $\|x\|^2 = \sum_k \|c_k\|^2$

<u>def</u>: Fourier-sor := $\sum_k c_k x_k$, ahol $c_k = \langle x, x_k \rangle$

és $x_k \in X$ szeparábilis Hilbert-térnek tétel: egy $x \in X$ elem Fourier-sora mindig konvergens, továbbá

$$\sum_k |c_k|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{(Bessel egyenlőtlenség)}$$

és

a Fourier-sor összege előállítja az elemet

$\Updownarrow$

$$\sum_k |c_k|^2 = \|x\|^2 \quad \text{(Parseval egyenlőség)}$$

tétel: legyen x_k egy ortonormált rendszer az X Hilbert térben és $x \in X$
akkor x egy Fourier-sorozat összege, azaz $x = \sum_k c_k x_k$ ahol $c_k = \langle x, x_k \rangle$ az x elemek X_0 altérben vett vetülete

$$\left(X_0 = \overline{\mathcal{L}(x_k)} \right)$$

def: zárt ortonormált rendszer := ha teljesül, hogy $\overline{\mathcal{L}(x_k)} = X$

tétel: legyen x_k zárt ortonormált rendszer
akkor $\forall x \in X$ elemet előállítja a Fourier sora

def: teljes ortonormált rendszer := ha $x \perp \forall x_k$ esetén $x = 0$

tétel: egy x_k ortonormált rendszer teljes $\Leftrightarrow$ zárt

<u>tétel</u>: legyen $X := L^2(a,b)$, (a,b) véges,

$$\varphi_k(t) = t^{k-1}, \quad t \in [a,b]$$

akkor $\mathcal{L}(\varphi_k) = L^2(a,b)$

<u>tétel</u>: legyen X normált tér

akkor $\exists$ olyan $\tilde{X}$ Banach tér,

amelynek van X-szel izomorf, mindenütt sűrű részhalmaza ($\tilde{X}_0$) úgy, hogy

$$\overline{\tilde{X}_0} = \tilde{X} \quad \text{és} \quad \tilde{X}_0 \leftrightarrow X$$

műveletttartó és normatartó kölcsönösen egyértelmű leképezés

<u>tétel</u>: legyen X, Y Banach tér

$M \subset X$ lineáris altér

$A : M \to Y$ korlátos lineáris operátor

akkor A egyértelműen kiterjeszthető az $\overline{M}$-ra úgy, hogy korlátos és lineáris legyen

(magyarul: $\tilde{A} : \overline{M} \to Y$ és $\tilde{A}x = Ax \quad \forall x \in M$)

<u>tétel</u>: (Hahn-Banach tétel) // egyszerű változat

legyen X Banach tér, X_0 valódi altér

$f : X_0 \to \mathbb{K}$ korlátos lineáris funcionál

akkor $\exists\, \tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ —— " ——

amelyre $\tilde{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in X_0$, és

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|$$

tétel: (Riesz-tétel)

legyen X Hilbert tér

$f : X \to \mathbb{K}$ korlátos lineáris funkcionál

akkor $\exists!\, y \in X$: $f(x) = \langle x, y \rangle$, $\|f\| = \|y\|_X$

def: duális tér (konjugált tér) :=

$X' := L(X, \mathbb{K})$ ahol X Banach tér

áll: $\Phi : X \to X'$ leképezés konjugáltan lineáris,

azaz $\Phi(y_1 + y_2) = \Phi(y_1) + \Phi(y_2)$

$\Phi(\lambda y) = \lambda^* \Phi(y)$

áll: legyen X Hilbert tér

akkor $f(x) := \langle x, y \rangle$ $x \in X$ által értelmezett

$\Phi : X \to X'$ egy leképezés $(\Phi(y) = f)$

Φ konjugáltan lineáris, normatartó

bijekció

tétel: legyen $1 \le p < \infty$, $X := L^p(M)$

akkor $\forall f \in X'$ $\exists!\, \psi \in L^q(M)$: $f(\varphi) = \int_M \varphi \psi$

(következmény: $L^p(M)$ duálisa izomorf és izometrikus $L^q(M)$-mel)

<u>def</u>: biduális tér := $(X')'$ jelölés X''
ahol X, X', X'' Banach tér

<u>def</u>: reflexív tér := ha X'' izomorf és izometrikus X-szel (X Banach tér)

<u>tétel</u>: az $F_x(f) := f(x)$ képlet lineáris és normatartó leképezést definiál az X és X'' egy altere között

$$X \ni x \longleftrightarrow F_x \in X''$$

X reflexív, ha ez bijekció

<u>def</u>: gyenge konvergencia := ha $\forall\, x \in X$ rögzített elemre $(A_j x) \to Ax$
ahol X, Y Banach tér, $A_j \in L(X,Y)$ $j \in \mathbb{N}$

<u>áll</u>: ha $\|A_j - A\|_{L(X,Y)} \to 0$ ($j \to \infty$ esetén) akkor

$(A_j) \to A$ gyengén

fordítva nem működik (csak véges dimenzióban)

<u>tétel</u>: legyen X, Y Banach tér
$A_j, A \in L(X,Y)$ és $(A_j) \to A$ gyengén
akkor $(\|A_j\|)_{j \in \mathbb{N}}$ sorozat korlátos

<u>tétel</u>: (Banach - Steinhaus tétel)
legyen X, Y Banach tér, $A_j \in L(X,Y)$
és (A_j) „pontonként korlátos" azaz
$\forall\, x \in X$ rögzített elemre $(A_j x)_{j \in \mathbb{N}}$ korlátos

akkor $(\|A_j\|)_{j\in\mathbb{N}}$ sorozat is korlátos

tétel: (gyenge kompaktsági kritérium)
ha (f_j) korlátos sorozat X'-ban, abból kiválasztható egy gyengén konvergens részsorozat

def: gyenge konvergencia elemekre := ha $\forall$ rögzített $f \in X'$ esetén $f(x_j) \to f(x)$ $(j \to \infty)$
$x_j, x \in X$, X Banach tér

áll: ha $\lim \|x_j - x\|_X = 0 \Rightarrow x_j \to x$ gyengén X ben

áll: legyen X, Y vektortér,
$A: X \to Y$ lineáris operátor

A injektív pontosan akkor, ha $Ax = 0_Y$ egyenletnek csak $x = 0_X$ a megoldása

áll: legyen X, Y vektortér,
$A: X \to Y$ injektív lineáris operátor
akkor $A^{-1}: Y \to X$ lineáris operátor

tétel: legyen X, Y Banach tér,
$A: X \to Y$ korlátos lineáris operátor
$D_A = X$, $R_A = Y$ és A injektív
akkor A^{-1} is korlátos lineáris operátor

<u>tétel</u>: (Banach nyílt leképezések tétele)

legyen X, Y Banach tér

$A : X \to Y$ korlátos lineáris operátor

$R_A = Y$.

akkor A operátorra az X minden nyílt halmazának képe nyílt halmaz Y-ban

<u>def</u>: operátor gráfja (grafikonja) :=

$$G_A := \{(x, Ax) \in X \times Y : x \in D_A = M\}$$

ahol X, Y Banach tér $M \subset X$, $A : M \to Y$ (lineáris) operátor

<u>def</u>: az $\|(x,y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ normával az $X \times Y$ normált tér

<u>def</u>: zárt operátor := ha G_A zárt halmaz

<u>áll</u>: az A operátor zárt $\Longleftrightarrow$ tetszőleges $x_j \in D_A$ sorozatot véve $x \in D_A$ és $Ax = y$ (ahol $x = \lim(x_j)$ és $y = \lim(Ax_j)$)

<u>áll</u>: ha A lineáris operátor folytonos, akkor zárt

<u>tétel</u>: legyen X, Y Banach tér

$A : X \to Y$ zárt lineáris operátor

$D_A = X$

akkor A operátor korlátos is

__def__: elsőfajú egyenlet :=

legyen X, Y Banach tér

$A: M \to Y$ lineáris operátor $(M \subset X)$

$b \in Y$ elem

keressük $x \in M$ elemet, amelyre $Ax = b$

__def__: másodfajú egyenlet :=

legyen X, Y Banach tér, $X = Y$, $M \subset X$

$A: M \to Y$ lineáris operátor

$\lambda \in \mathbb{K}$, $b \in Y$

keressük $x \in M$ elemet, amelyre $(A - \lambda I)x = b$

(ahol I az egységoperátor)

__def__: sajátérték := $\lambda \in \mathbb{K}$ szám A op sajátértéke, ha $\exists\, x_0 \neq 0$ $x_0 \in M$: $Ax_0 = \lambda x_0$ illetve $(A - \lambda I)x_0 = 0$

__def__: reguláris érték := ha $(A - \lambda I)^{-1}$ létezik, korlátos és értelmezési tartománya sűrű, akkor a $\lambda \in \mathbb{K}$ szám reguláris érték A operátorra nézve

__áll__: ha A zárt operátor és λ reguláris érték

akkor $(A - \lambda I)^{-1}$ nemcsak létezik és korlátos, de $R_{(A - \lambda I)^{-1}} = X$

megjegyzés: ekkor $\forall\, b \in X$ esetén $\exists!\, x = (A - \lambda I)^{-1} b$ megoldása $(A - \lambda I)x = b$ egyenletnek és az x megoldás folytonosan függ b-től

<u>tétel</u>: legyen X Banach tér

$A : X \to X$ korlátos lineáris operátor

akkor $\lim\limits_{k\to\infty} \| A^k \|^{\frac{1}{k}}$ létezik és véges

<u>def</u>: spektrálsugár := a fenti limes

jelölés: $r_\sigma(A)$

<u>def</u>: spektrum := nem reguláris értékek halmaza

($|\lambda| > r_\sigma(A)$ esetén $\lambda \in \mathbb{K}$ reguláris érték)

<u>def</u>: Neumann-sor := $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k$

<u>tétel</u>: $|\lambda| > r_\sigma(A)$ esetén $(\lambda I - A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k$,

a sor $L(X, X)$ normája szerint konvergens

<u>def</u>: legyen $\psi := \mathbb{K} \varphi$

$$(\mathbb{K}\varphi)(x) := \int_M \mathcal{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

$\mathcal{K} \in L^2(M \times M)$ magfüggvény

$$\int_{M\times M} |\mathcal{K}(x,y)|^2\,dx\,dy < \infty$$

$M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mérhető halmaz

$X := L^2(M)$

<u>áll</u>: $\mathbb{K} : L^2(M) \to L^2(M)$ korlátos lineáris operátor

lemma: legyen $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in L^2(M \times M)$

$$(\mathbb{K}\varphi)(x) := \int_M \mathcal{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

$$(L\psi)(x) := \int_M \mathcal{L}(x,y)\,\psi(y)\,dy$$

akkor $P := \mathbb{K}L$ operátor így írható:

$$(P\psi)(x) = \int_M \mathcal{P}(x,y)\,\psi(y)\,dy$$

ahol $\mathcal{P} \in L^2(M \times M)$, valamint

$$\mathcal{P}(x,y) = \int_M \mathcal{K}(x,t)\,\mathcal{L}(t,y)\,dt$$

def: legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány

$\mathcal{K} \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$

$$(\mathbb{K}\varphi)(x) := \int_{\bar{\Omega}} \mathcal{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

(folytonos magú operátor)

áll: $\mathbb{K} : C(\bar{\Omega}) \to C(\bar{\Omega})$ lineáris operátor folytonos

lemma: két folytonos magú operátor szorzata szintén folytonos magú operátor

def: Volterra típusú integrál operátor :=

$\bar{\Omega} = [a,b] \subset \mathbb{R}$ véges intervallum

$X := C[a,b]$, $\|\varphi\| := \sup_{[a,b]} |\varphi|$

$\mathcal{K} : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény

$\mathcal{K}(x,y) = 0$, ha $y > x$

$$(K\varphi)(x) = \int_a^x K(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

áll: spektrálsugara nulla $\left(r_\sigma(K) = 0 \right)$

lemma: két Volterra típusú operátor szorzata is Volterra típusú operátor

def: adjungált operátor :=

$$A^+ y := y^+ \text{ amelyre } \langle Ax, y\rangle = \langle x, y^+\rangle \quad \forall x \in D_A$$

$$D_{A^+} = \{ y \in X : \exists\, y^+ \in X : \langle Ax, y\rangle = \langle x, y^+\rangle \ \forall x \in D_A \}$$

ahol X Hilbert tér, $A : X \to X$ lineáris operátor, $\overline{D_A} = X$

áll: A^+ lineáris operátor

tétel: legyen X Hilbert tér,

$A : X \to X$ korlátos lineáris operátor

akkor $D_{A^+} = X$, A^+ korlátos lineáris operátor és $\|A^+\| = \|A\|$

<u>tétel</u>: legyen X Hilbert tér

$A: X \to X$ korlátos lineáris operátor

akkor:

$$(A+B)^+ = A^+ + B^+$$

$$(\lambda A)^+ = \lambda^* A^+$$

$$(AB)^+ = B^+ A^+$$

$$(A^+)^+ = A$$

$$O^+ = O$$

$$I^+ = I$$

<u>áll</u>: A^+ mindig zárt operátor

<u>tétel</u>: legyen X Hilbert tér,

$A: X \to X$ korlátos lineáris operátor

akkor tetsz $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$\overline{R_{(\lambda I - A)}}^{\perp} = S_{\lambda^*}(A^+) :=$$

$$\{ y \in X : (\lambda^* I - A^+) y = 0 \}$$

<u>def</u>: legyen X Hilbert tér

$A: X \to X$ lineáris operátor, $\overline{D}_A = X$

önadjungált operátor:

$A^+ = A$ (ilyenkor $D_{A^+} = D_A$)

szimmetrikus operátor:

$A^+ \supset A$ (ilyenkor $D_{A^+} \supset D_A$)

állítás: legyen X komplex Hilbert tér,

$A: X \to X$ szimmetrikus operátor

akkor $\langle Ax, x\rangle$ valós

állítás: legyen X komplex Hilbert tér,

$A: X \to X$ lineáris operátor

$\overline{D_A} = X$

$\langle Ax, x\rangle$ valós $\forall x \in D_A$

akkor A szimmetrikus

állítás: legyen X Hilbert tér

A szimmetrikus lineáris operátor

akkor A sajátértékei valósak és a különböző sajátértékhez tartozó sajátelemek merőlegesek

tétel: legyen $A: X \to X$ korlátos és önadjungált operátor

akkor $\|A\| = \sup\{\langle Ax, x\rangle : \|x\|_X = 1\} =: \alpha$

def: operátor határai :=

$$M := \sup\{\langle Ax, x\rangle : \|x\|_X = 1\}$$

$$m := \inf\{\langle Ax, x\rangle : \|x\|_X = 1\}$$

ahol $A: X \to X$ korlátos és önadjungált operátor

tétel: $\lambda \notin [m, M] \subset \mathbb{R}$ esetén λ reguláris érték

def: pozitív operátor $:= \langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in D_A$

állítás: pozitív operátor minden sajátértéke nemnegatív

def: izometrikus operátor := ha

$$\|Ax\|_X = \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

ahol $A : X \to X$ lineáris operátor és X Hilbert tér

áll: ha A izometrikus, akkor skalárszorzat-tartó (azaz távolság és szögtartó)

megjegyzés: ortonormált rendszert ortonormált rendszerbe képez, de a teljességet általában nem tartja meg

def: unitér operátor := izometrikus és értékkészlete a teljes tér

tétel: legyen $A : X \to X$ korlátos lineáris operátor

akkor A unitér $\Longleftrightarrow$ $A^{-1} = A^{+}$

tétel: $F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ unitér

Fourier-transzformáció

def: véges rendű operátor := értékkészlete véges dimenziójú

(itt $A : X \to X$ korlátos lineáris operátor, X Hilbert tér)

tétel: legyen $A : X \to X$ véges rendű operátor

R_A n dimenziós

akkor $\exists \varphi_j, \psi_j$ elemek, hogy

$$Af = \sum_{j=1}^{n} \langle f, \psi_j \rangle \varphi_j$$

<u>tétel</u>: legyen $A : X \to X$ véges rangú operátor
akkor A-nak véges sok sajátértéke létezik, ezek véges ranggal (a nullát kivéve, mert az végtelen) és ami nem sajátérték, az reguláris érték

<u>def</u>: kompakt operátor (teljesen folytonos operátor) :=
ha $\exists A_j : X \to X$ véges rendű operátorok,
hogy $\lim\limits_{j \to \infty} \| A_j - A \| = 0$
ahol A korlátos lineáris operátor
X szeparábilis Hilbert tér

megjegyzés: minden véges rendű operátor kompakt, a kompakt operátorok zárt alteret alkotnak $L(X,X)$-ben

<u>tétel</u>: legyen $A : X \to X$ kompakt operátor
akkor A-nak legfeljebb megszámlálhatóan sok sajátértéke lehet, ezek rangja véges (kivéve a 0) és a sajátértékek csak a 0-ban torlódhatnak

<u>tétel</u>: ha A kompakt operátor, akkor ami nem sajátérték, az reguláris érték

<u>tétel</u>: ha A kompakt operátor, akkor $R_{\lambda I - A}$ zárt altér

<u>tétel</u>: ha A kompakt, akkor A^+ is kompakt
λ az A sajátértéke $\Leftrightarrow$ λ^* az A^+ sajátértéke
és a rangok egyenlőek

tétel: (Fredholm-féle alternativa-tétel)

$(\lambda I - A) f = b$ egyenlet megoldható, ha

1, λ reguláris érték

2, $\lambda = 0$, akkor

$\exists$ megoldás $\iff$ f merőleges $S_{\lambda^*}(A^+)$

tétel: legyen X Hilbert tér,

$A : X \to X$ kompakt és önadjungált operátor

akkor $\exists\, \lambda_1$ sajátérték, x_1 sajátelem, hogy

$$|\lambda_1| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$$

$$A x_1 = \lambda_1 x_1$$

áll: ha ezután A-t leszűkítjük, ott is kompakt és önadjungált lesz, így megkaphatjuk az összes 0-tól különböző sajátértéket és sajátelemet és ezek ortonormált rendszert képeznek

tétel: a sajátelemek teljes ortonormált rendszerét kapjuk X-ben, ha az előbbit kibővítjük a 0-hoz tartozó sajátelemek ortonormált rendszerével

tétel: (Hilbert-Schmidt tétel)

$$A x = \sum_k \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k \qquad \forall x \in X$$