$X := L^2(M)$, ahol M mérhető halmaz. $\mathcal{K}(x,y) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x)\psi_j(y)$, ahol $\phi_j, \psi_j \in L^2(M) \Rightarrow \mathcal{K} \in L^2(M \times M)$.

$(K\phi)(x) = \int_M \mathcal{K}(x,y)\phi(y)dy = \int_M \left[\sum_{j=1}^{m} \phi_j(x)\psi_j(y)\right]\phi(y)dy = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x) \int_M \psi_j(y)\phi(y)dy$. Röviden:

$K\phi = \sum_{j=1}^{m} \phi_j \langle \phi, \psi_j \rangle$.

Az előbbiek alapján egy elfajult magú (elsőfajú) integrálegyenlet megoldása kiszámolható egy lineáirs algebrai egyenletrendszer megoldásával.

Kompakt (teljesen folytonos) operátorok

Definíció: egy $M \subset Y$ halmazt feltételesen (vagy relatíve) sorozatkompaktnak nevezünk, ha lezárása sorozatkompakt.

Megjegyzés: M feltételesen sorozatkompakt, ha tetszőleges M-beli sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat. $\mathbb{R}^n$ -ben a feltételesen sorozatkompakt halmazok a korlátos halmazok.

Definíció: legyenek X, Y Banach terek! Egy $A : X \to Y$ lineáris operátort teljesen folytonosnak, avagy kompaktnak nevezünk, ha X tetszőleges korlátos halmazát feltételesen (avagy relatíve) sorozatkompakt halmazba képezi.

Megjegyzés: Ekkor A korlátos is, továbbá két kompakt operátor összege és számszorosa is kompakt.

Állítás: egy $A : X \to Y$ operátor kompakt $\Leftrightarrow \forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, x_k \in X$ korlátos sorozatra $(Ax_k)_{k \in \mathbb{N}}$ -ból kiválasztható konvergens részsorozat.

Állítás: legyen X Hilbert tér, $A : X \to X$ véges rendű operátor. Ekkor A kompakt.

Tétel: legyenek X, Y Banach terek, $A_j \in L(X,Y)$ operátorok kompaktak, és $\exists A \in L(X,Y)$: $\lim_{j \to \infty} A_j = A \Rightarrow A$ is kompakt operátor.

Bizonyítás: legyen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ egy X-beli korlátos sorozat. Bizonyítani akarjuk, hogy $(Ax_k)_{k \in \mathbb{N}}$ -nek van konvergens részsorozata Y-ban. Tudjuk, hogy $A \in L(X,Y)$. Mivel A_1 kompakt, ezért az $(A_1 x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatból kiválasztható Y-ban konvergens részsorozat, legyen ez $(A_1 x_{k1})_{k \in \mathbb{N}}$! $(A_2 x_{k1})_{k \in \mathbb{N}}$ -ből kiválasztható konvergens részsorozat, legyen ez $(A_2 x_{k2})_{k \in \mathbb{N}}$. $(A_3 x_{k2})_{k \in \mathbb{N}}$ -ből megint kiválasztható…

$$\begin{array}{lllllll} & x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots & \\ A_1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} & \cdots & \text{részsorozatra } (A_1 x_{k1})_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergens} \\ A_2 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} & \cdots & \text{részsorozatra } (A_2 x_{k2})_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergens} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_j & x_{1j} & x_{2j} & \cdots & x_{kj} & \cdots & \text{részsorozatra } \left(A_j x_{kj}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergens} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Tekintsük az $(x_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ átlós sorozatot. Belátjuk, hogy $(Ax_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens Y-ban. $(x_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ az eredeti $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatnak olyan részsorozata, amely bármelyik sorban levő részsorozatnak a részsorozata, bizonyos indextől kezdve.

$$\|Ax_{kk} - Ax_{mm}\|_Y = \left\|\left[Ax_{kk} - A_j x_{kk}\right] + \left[A_j x_{kk} - A_j x_{mm}\right] + \left[A_j x_{mm} - Ax_{mm}\right]\right\|_Y \le$$
$$\le \left\|\left(A - A_j\right)x_{kk}\right\|_Y + \|A_j x_{kk} - A_j x_{mm}\|_Y + \left\|\left(A_j - A\right)x_{mm}\right\|_Y \le$$
$$\le \|A - A_j\|_{L(X,Y)}\|x_{kk}\|_X + \|A_j x_{kk} - A_j x_{mm}\|_Y + \|A_j - A\|_{L(X,Y)}\|x_{mm}\|_X.$$

$(x_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat, ehhez $\exists c > 0 : \|x_{kk}\| \le c$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\lim\limits_{j\to\infty}\|A_j - A\| = 0$, ezért $\exists j_0 : j \ge j_0 \Rightarrow \|A_j - A\| \le \varepsilon$. Válasszuk pl: $j = j_0$. Mivel $\left(A_{j_0}x_{kk}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens, ezért $\exists k_0 : k, l \ge k_0 \Rightarrow \left\|A_{j_0}x_{kk} - A_{j_0}x_{ll}\right\| \le \varepsilon$. Tehát $k, l \ge k_0$ esetén $\|Ax_{kk} - Ax_{ll}\|_Y \le c\varepsilon + \varepsilon + c\varepsilon = (2c+1)\varepsilon \Rightarrow (Ax_{kk})$ Cauchy sorozat.

Következmény: kompakt operátorok alteret képeznek $L(X, Y)$ -ban.

Tétel: (bizonyítás nélkül) legyen X szeparábilis Hilbert tér. Ha $A : X \to X$ kompakt operátor, akkor $\exists A_j : X \to X$ véges rendű operátorok, hogy $\lim\limits_{j\to\infty}\|A_j - A\|_{L(X,X)} = 0$.

Összefoglalva: ha X szeparábilis Hilbert tér, akkor az $A : X \to X$ korlátos operátor kompakt $\Leftrightarrow$ előáll véges rendű operátorok sorozatának norma szerinti limeszeként.

Példa: legyen $X = L^2(M)$ Hilbert tér, $K : L^2(M) \to L^2(M)$ négyzetesen integrálható magú integráloperátor, $(K\phi)(x) := \int_M \mathscr{K}(x, y)\phi(y)dy$. Ez a K operátor kompakt. Ennek igazolásának alapgondolata: tudjuk, hogy $L^2(M)$ szeparábilis Hilbert tér (végtelen dimenziós). Legyenek ebben teljes ortonormált rendszerek $\psi_1, \psi_2, \ldots$ illetve $\phi_1, \phi_2, \ldots$. Ekkor $\mathscr{K}(x, y) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{j,k\le m} c_{jk}\phi_j(x)\psi_k(y)\right)$, $\mathscr{K}_N(x, y) = \sum\limits_{m=1}^{N}\sum\limits_{j,k\le m} c_{jk}\phi_j(x)\psi_k(y)$,

$\lim\limits_{N\to\infty}\|\mathscr{K}_N - \mathscr{K}\|_{L^2(M\times M)} = 0$. $\mathscr{K}_N$ -nek véges rendű operátorok felelnek meg. $\|K_N - K\|_{L\left(L^2(M), L^2(M)\right)} \to 0$, ha

$N \to \infty$.

Másodfajú egyenlet kompakt operátorokra

Legyen X szeparábilis Hilbert tér, $A: X \to X$ kompakt operátor. Tekintsük a $(\lambda I - A)f = b$ másodfajú egyenletet, melyben $\lambda \neq 0$ rögzített. Tudjuk, hogy A kompakt operátor tetszőleges előírt pontossággal megközelíthető egy B véges rendű operátorral. $\exists A_0 : X \to X$ véges rendű operátor, hogy $\|A - A_0\| < |\lambda|$. $B_0 := A - A_0 \Leftrightarrow A = A_0 + B_0$, ahol A_0 véges rendű, és $\|B_0\| < |\lambda|$. Tehát a másodfajú egyenlet így írható:
$[\lambda I - (A_0 + B_0)]f = b \Leftrightarrow (\lambda I - B_0)f = b + A_0 f$.
$|\lambda| > \|B_0\| \Rightarrow |\lambda| > B_0$ korlátos operátor spektrálsugara $\Rightarrow \lambda$ reguláris érték B_0 operátorra nézve $\Rightarrow$ a legutóbbi egyenlet ekvivalens: $f = (\lambda I - B_0)^{-1}(b + A_0 f) = \underbrace{(\lambda I - B_0)^{-1} b}_{\text{adott}} + (\lambda I - B_0)^{-1} A_0 f$. λ -val beszorozva, átrendezve:

$\lambda f - \underbrace{\lambda(\lambda I - B_0)^{-1} A_0}_{:=B:=B_\lambda} f = \underbrace{\lambda(\lambda I - B_0)^{-1} b}_{:=g}$. A bevezetett jelöléssel $(\lambda I - B_\lambda)f = g$. Észrevétel: B_λ véges rendű operátor, mert A_0 véges rendű operátor. Legyen $\delta > 0$ rögtített szám, és válasszuk A_0-t úgy, hogy $\|A - A_0\| < \delta$ legyen. Ekkor az előbbi gondolatmenet érvényes $\forall \lambda$ -ra, A_0 nem függ λ -tól, ha $\lambda \geq \delta$ (de δ -tól igen). A_0 véges rendű operátor $\lambda \geq \delta$ esetén, és $A_0 f = \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j$ alakban írható.

$Bf = B_\lambda f = \lambda(\lambda I - B_0)^{-1} \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda \langle f, \psi_j \rangle (\lambda I - B_0)^{-1} \phi_j$. A másodfajú egyenlet:

$$\lambda f - \sum_{j=1}^{m} \lambda \langle f, \psi_j \rangle (\lambda I - B_0)^{-1} \phi_j = g = g_\lambda.$$

12.07

Tehát kaptuk, hogy $\lambda f - \sum_{j=1}^{m} \lambda \langle f, \psi_j \rangle (\lambda I - B_0)^{-1} \phi_j = g = g_\lambda$. Ez megfelel egy lineáris algebrai egyenletrendszernek: $\lambda \mathcal{I} \xi - \mathcal{B}_\lambda \xi = \beta_\lambda$. Ekkor $\det(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{B}_\lambda) = 0$ egyenlet gyökei a sajátértékek. A mátrix ($\mathcal{B}_\lambda$) és az operátor (B_λ) sajátértékei azonosak az eredeti operátor (A) sajátértékeivel, és rangjuk is azonos. Belátható, hogy a mátrix elemei a λ változónak holomorf függvényei! Így a determináns is holomorf függvénye λ -nak. Tudjuk, hogy egy holomorf függvény gyökei nem torlódhatnak egy véges pontban, hacsak nem az azonosan 0 függvény. Mivel $\lambda < \|A\|$, ezért csak véges sok gyök van. Tehát tetszőleges rögzített δ esetén A operátornak véges sok δ -nál nagyobb abszolút értékű sajátértéke van, s ezek véges rangúak.

Tétel: ha A kompakt operátor, akkor A-nak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok sajátértéke van, a 0-tól különböző sajátértékek véges rangúak, s a sajátértékek csak a 0-ban torlódhatnak. (Gondoljunk csak a $\delta := 1/k$, $k \in \mathbb{N}$ esetre!)

Tétel (biz. nélkül): minden $\lambda \neq 0$, ami nem sajátérték, az reguláris érték A (kompakt operátorra) nézve.

Következmény: ha $\lambda \neq 0$ nem sajátérték, $(\lambda I - A)f = b$ másodfajú egyenletnek $\forall b$ -re létezik egyetlen f megoldás, és ez folytonosan függ b-től.

Mi a helyzet, ha λ sajátérték?

Emlékeztető: tetszőleges korlátos lineáris operátor esetén $\overline{R_{\lambda I - A}}^{\perp} = S_{\overline{\lambda}}(A^*) \Leftrightarrow \overline{R_{\lambda I - A}} = S_{\overline{\lambda}}(A^*)^{\perp}$. Ha $R_{\lambda I - A}$ zárt altér, akkor $R_{\lambda I - A} = \overline{R_{\lambda I - A}} = S_{\overline{\lambda}}(A^*)^{\perp}$.

Tétel: ha A kompakt operátor, akkor $\lambda \neq 0$ esetén $R_{\lambda I - A}$ zárt altér.

Bizonyítás: látható, hogy $R_{\lambda I - A}$ lineáris altér. Azt kell bizonyítani, hogy $R_{\lambda I - A}$ zárt halmaz. Legyen tetszőleges $\psi_j \in R_{\lambda I - A}$ és $\exists \lim \psi_j = \psi$, ekkor $\psi \in R_{\lambda I - A}$? Mivel $\psi_j \in R_{\lambda I - A} \Rightarrow \exists \phi_j \in X : (\lambda I - A)\phi_j = \psi_j$. Jelöljük: $S_\lambda(A) := \{\phi \in X : (\lambda I - A) = 0\}$. Ekkor $S_\lambda(A)$ zárt lineáris altér (A folytonos). A Riesz tétel következtében $X := S_\lambda(A) \oplus S_\lambda(A)^{\perp} \Leftrightarrow \forall x \in X \exists ! x_1, x_2 : x_1 \in S_\lambda(A), x_2 \in S_\lambda(A)^{\perp}, x = x_1 + x_2$. Ennek megfelelően $X \ni \phi_j = f_j + g_j$, ahol $f_j \in S_\lambda(A)$. $g_j \in S_\lambda(A)^{\perp}$, $\psi_j = (\lambda I - A)\phi_j = \underbrace{(\lambda I - A)f_j}_{=0} + (\lambda I - A)g_j \Rightarrow (\lambda I - A)g_j = \psi_j$. Kis állítás: $\left(g_j\right)_{j \in \mathbb{N}}$ korlátos sorozat X-ben.

Bizonyítás (a tétel bizonyításán belül): indirekt feltesszük, hogy $\exists \left(g_{j_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ részsorozat, hogy $\lim\limits_{k \to \infty} \|g_{j_k}\|_X = \infty$. Legyen $h_{j_k} = \frac{g_{j_k}}{\|g_{j_k}\|_X}$, ekkor $\|h_{j_k}\|_X = 1$. $(\lambda I - A)g_{j_k} = \psi_{j_k}$ egyenletet osztva $\|g_{j_k}\|$ -val: $(\lambda I - A)h_{j_k} = \frac{\psi_{j_k}}{\|g_{j_k}\|_X} \to 0_X$, ugyanis ψ_j konvergens $\Rightarrow$ korlátos. $\lim\limits_{k \to \infty} \left(\lambda h_{j_k} - A h_{j_k}\right) = 0_X$. $\left(h_{j_k}\right)$ korlátos sorozat (mert $\|h_{j_k}\| = 1$), A kompakt operátor, ezért $\exists \left(\widetilde{h}_{j_k}\right)$ részsorozat, amelyre $\left(A\widetilde{h}_{j_k}\right)$ konvergens $\Leftrightarrow \left(\lambda \widetilde{h}_{j_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ is konvergens. $\lambda \neq 0 \Rightarrow \left(\widetilde{h}_{j_k}\right)$ konvergens, $\left(\widetilde{h}_{j_k}\right)_{k \in \mathbb{N}} \to h_0 \Rightarrow (\lambda I - A)\widetilde{h}_{j_k} \to 0 \Rightarrow (\lambda I - A)h_0 = 0$. Ebből következik, hogy $h_0 \in S_\lambda(A)$. Másrészt $h_{j_k} = \frac{g_{jk}}{\|g_{jk}\|}$, $g_{j_k} \in S_\lambda(A)^{\perp} \Rightarrow h_{j_k} \in S_\lambda(A)^{\perp} \Rightarrow$ limeszben $h_0 \in S_\lambda(A)^{\perp}$. Másrészt $h_0 \in S_\lambda(A)$, így $h_0 = 0$, de ez meg nem lehet, mert $\left\|\widetilde{h}_{j_k}\right\| = 1 \Rightarrow \|h_0\| = 1$ kéne lennie.

Tehát $(\lambda I - A)g_j = \psi_j$, $\lim(\psi_j) = \psi$, $\|g_j\|_X$ korlátos. Mivel A kompakt és g_j korlátos $\Rightarrow \exists \tilde{g}_{j_k}$ részsorozat, hogy $A\tilde{g}_{j_k}$ konvergens. ψ_{j_k} is konvergens $\Rightarrow \lambda g_{j_k}$ is konvergens, $\lambda \neq 0 \Rightarrow (g_{j_k})$ konvergens. $g_{j_k} \to g_0$ X-ben, $g_0 \in X$. $(\lambda I - A)g_0 = \psi \Rightarrow \psi \in R_{\lambda I - A}$.

Tétel (bizonyítás nélkül): legyen $A: X \to X$ kompakt operátor. Ekkor A^* is kompakt. Továbbá $\lambda \neq 0$ az A-nak sajátértéke $\Leftrightarrow \bar{\lambda}$ sajátértéke A^* -nak, és ekkor a rangok egyenlők.

Összefoglalás (Fredholm alternatíva): legyen $A: X \to X$ kompakt operátor, $\lambda \neq 0$ tetszőleges szám s $(\lambda I - A)f = b$ másodfajú egyenlet. Ekkor két eset lehetséges:

1. ha $\lambda \neq 0$ az A-nak nem sajátértéke (legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok, véges rangú, 0-ban torlódó sajátértékek), akkor a másodfajú egyenletnek $\forall b \in X$ esetén $\exists ! f$ megoldása és ez folytonosan függ b-től ($(\lambda I - A)^{-1}$ folytonos)
2. ha $\lambda \neq 0$ sajátérték, akkor a másodfajú egyenletnek a megoldása nem egyértelmű, a homogén egyenletnek véges sok lineárisan független megoldása van. A megoldás pontosan létezik, ha $b \perp S_{\bar{\lambda}}(A^*)$ minden elemére. Ez annyi db ortogonalitási feltétel, amennyi a λ sajátérték rangja.

Önadjungált kompakt operátorok

Tétel: legyen X szeparábilis Hilbert tér, $A: X \to X$ kompakt és önadjungált operátor, $A \neq 0$. Ekkor $\exists \lambda_1$ sajátérték: $|\lambda_1| = \|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\|_X = 1\}$.

Megjegyzés: ha λ_1 az A operátor olyan sajátértéke, amelyre $|\lambda_1| = \|A\|$ és x_1 olyan sajátelem, hogy $\|x_1\| = 1$, azaz $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $\|x_1\| = 1$, akkor $|\langle Ax_1, x_1\rangle| = |\langle \lambda_1 x_1, x_1\rangle| = |\lambda_1 \langle x_1, x_1\rangle| = |\lambda_1| = \|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle : \|x\|_X = 1|\}$. Más szóval, az $x \mapsto |\langle Ax, x\rangle|$, ahol $\|x\| = 1$, ez a függvény felveszi a suprémumot az $x = x_1$ sajátelemen, a maximum (ami most a suprémum is) értéke $= |\lambda_1|$. Fordítva: ha x^* olyan, hogy $\|x^*\| = 1$, és arra $|\langle Ax, x\rangle|$ maximális, akkor ez sajátelem és a maximum egyenlő a sajátérték abszolút értékével. Ugyanis
$|\langle Ax^*, x^*\rangle| \leq \|Ax^*\| \cdot \|x^*\| \leq \|A\| \cdot \|x^*\|^2 = \|A\|$, a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségben egyenlőség pontosan akkor áll fenn, amikor $Ax^* \parallel x^*$, azaz $Ax^* = const \cdot x^*$.

További sajátértékek, sajátelemek keresése.

Legyen $X_1 := \{x \in X : x \perp x_1\}$, ahol $A_1 := A|_{X_1}$, a leszűkítés, és $Ax_1 = \lambda_1 x_1$.

Állítás: X_1 invariáns altér, azaz $x \in X_1 \Rightarrow Ax \in X_1$.

Bizonyítás: tfh $x \in X_1$! $\langle Ax, x_1\rangle = \langle x, Ax_1\rangle = \langle x, \lambda_1 x_1\rangle = \lambda_1 \langle x, x_1\rangle = 0$, tehát $Ax \in X_1$. Az előbbi tételt alkalmazhatjuk az A_1 operátorra X_1 Hilbert térben. Ekkor $\exists \lambda_2$ sajátérték, hogy $|\lambda_2| = \|A_1\| = \sup\{\langle A_1 x, x\rangle : \|x\|_X = 1, x \in X_1\}$. A maximum helye x_2 sajátelem helyén van, $\lambda_2 x_2 = Ax_2$, $x_2 \perp x_1$. Így egymás után megkaphatjuk az A operátor sajátértékeit és sajátelemeit, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ....$ Ha A véges rendű, akkor az eljárás véges sok lépés után befejeződik.

Tétel: legyenek az A önadjungált operátor sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ és sajátelemei $x_1, x_2, \dots$ A sajátelemekről feltehető, hogy ortonormált rendszert alkotnak. Ekkor $\forall x \in X$ elemre $Ax = \sum_k \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k$. Az (x_k) ortonormált rendszert kibővítve a $\lambda = 0$ -hoz tartozó sajátelemek ortonormált rendszerével, akkor ezek egy teljes ortonormált rendszert alkotnak.