Fizika Bsc Analízis III.

Vizsgatematika

2014/15 őszi félév

---

1. Hilbert terek geometriája: skaláris szorzat; Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség; ortogonalitás; ortokomplementer elemi tulajdonságai;

2. Pont és zárt konvex halmaz távolsága Hilbert térben; a Riesz-féle ortogonális felbontási tétel;

3. Totális és teljes halmazok Hilbert térben; ortogonális és ortonormált sorozatok fogalma; az elemi Pithagorasz-tétel; Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció; Parseval-tétel; absztrakt Fourier-sorok; Bessel-egyenlőtlenség; Fourier-sorba fejthetőség kritériumai;

4. Folytonos lineáris funkcionálok normált téren; sűrű altéren értelmezett folytonos lineáris funkcionál kiterjeszthetősége; a Hahn–Banach-tétel (bizonyítás nélkül) és a kis Hahn–Banach-tétel; az $L^p_{\mathbb{K}}(M)$ terek duálisa;

5. Folytonos lineáris funkcionálok Hilbert téren; a Riesz-féle reprezentációs tétel;

6. Normált tér biduálisa; normált tér kanonikus beágyazása a saját biduálisába; normált tér teljessé tétele; reflexív Banach terek;

7. Operátorsorozat pontonkénti konvergenciájának fogalma; a Banach-Steinhaus tétel (bizonyítás nélkül), és következményei; funkcionálsorozat gyenge, illetve a gyenge-*-konvergenciája;

8. Lineáris operátor inverze; a Banach-féle nyílt leképezés tétel (bizonyítás nélkül); a Banach-féle izomorfia tétel és a Banach-féle zárt gráf tétel;

9. Első- és másodfajú operátoregyenletek; reguláris érték, sajátérték és spektrum fogalma; szükséges és elégséges feltétel operátor folytonos inverzének létezésére; abszolút konvergens operátorsorok Banach téren és a Carl Neumann-sor; az invertálható elemek halmazának nyíltsága Banach téren;

10. A spektrálsugár fogalma és a spektrálsugár tétel; $(A - \lambda.I)^{-1}$ hatványsorként történő előállítása; négyzetesen integrálható magú operátorok;

11. Folytonos lineáris operátor adjungáltja Hilbert téren; az adjungált operátor elemi tulajdonságai; speciális operátorok (normális, önadjungált és pozitív operátorok, ortogonális projekciók); véges dimenziós Hilbert téren értelmezett operátor adjungáltja; ortonormált sorozat és korlátos sorozat által meghatározott operátor adjungáltja;

12. Adjungált operátor spektruma; normális operátor sajátértékei és sajátvektorai; numerikus értékkészlet és numerikus sugár fogalma; a $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \overline{W(A)}$ tartalmazás; önadjungált és pozitív operátor spektruma; a numerikus sugár és az operátornorma kapcsolata önadjungált operátor esetén;

13. Félskalárszorzat és a félskalárszorzatra vonatkozó Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség; az operátorra vonatkozó Schwarz-egyenlőtlenség; az $\inf W(A) \in \mathrm{Sp}(A)$ és $\sup W(A) \in \mathrm{Sp}(A)$ összefüggések önadjungált operátor esetén;

14. Kompakt operátorok elemi tulajdonságai; Hilbert–Schmidt-tétel kompakt önadjungált operátorokra;

15. A kompakt operátorok Riesz-féle elmélete; a Fredholm-alternatíva tétel;