Lebesgue (ejtsd: löbeg) szerint nullmértékű halmaz

def: intervallum $\mathbb{R}^n$-ben:

$$I: I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n, \qquad I_j = (a_j, b_j) \in \mathbb{R}$$

def: intervallum Lebesgue mértéke

$$\lambda(I) = \prod_{j=1}^{n} \lambda(I_j) \qquad \lambda(I_j) = (b_j - a_j)$$

def: azt mondjuk, hogy $A \subset \mathbb{R}^n$ nullmértékű, ha A lefedhető véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok intervallummal úgy, hogy azok „összmértéke" $\leq \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$

magyarul:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I^{(i)} \subset \mathbb{R}^n : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I^{(i)} : \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I^{(i)}) < \varepsilon$$

áll: ha $A_i \subset \mathbb{R}^n$ nullmértékű

akkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ is nullmértékű $\quad i \in \mathbb{N}$

Lépcsős függvények integrálja(ivá)ról szóló két lemma

def: legyen f olyan fv, hogy véges sok intervallumban nem nulla állandó, máshol 0

akkor f lépcsős fv.

A lemma legyen (f_j) lépcsős fv-ek monoton csökkenő sorozata

$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0$ majdnem mindenhol

akkor $\lim_{j\to\infty} \int f_j = 0$

B lemma legyen (f_j) lépcsős fv-ek monoton növő sorozata

$\left(\int f_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ számsorozat felülről korlátos

akkor $\lim_{j\to\infty} f_j(x)$ véges majdnem mindenütt

⌜ majdnem mindenhol = az egész térben, legfeljebb egy nullmértékű halmaz kivételével ⌟

Integrálás C_1 és C_2 fv osztályban

def: tfh $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lépcsős fv-ek monoton növő sorozatot alkotnak

$\int f_j$ sorozat felülről korlátos

akkor azt mondjuk hogy

$f(x) := \lim_{j \to \infty} f_j(x)$ függvény a C_1 fv osztályhoz tartozik

def: ha $f = f_1 - f_2$, ahol $f_1, f_2 \in C_1$

akkor azt mondjuk, hogy

$f \in C_2$

tétel legyen $f, g \in C_1$

$f \leq g$

$(f_j), (g_j)$ lépcsős fv-ek monoton sorozata

$\lim (f_j) = f$, $\lim (g_j) = g$ majdnem mindenütt

$\int f_j$ és $\int g_j$ korlátos

akkor $\lim \int f_j \leq \lim \int g_j$

következmény: $\int f := \lim \int f_j$ ha $f \in C_1$

tulajdonságok:

ha $f, g \in C_1$ akkor $(f+g) \in C_1$ és $\int (f+g) = \int f + \int g$

tfh $f \in C_1$ és $\lambda \geq 0$ állandó akkor $\lambda f \in C_1$ és $\int \lambda f = \lambda \int f$

ha $f \in C_1$ akkor f^+ és f^- is $\in C_1$

ha $f, g \in C_1$ akkor $f \cup g$ és $f \cap g$ is $\in C_1$

$\ulcorner (f \cup g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}$; $(f \cap g)(x) := \min\{f(x), g(x)\} \lrcorner$

(folyt. köv.)

Integrálás C_1 és C_2 fv osztályban (folytatás)

tulajdonságok:

ha $f, g \in C_2$ akkor $f+g \in C_2$ és $\int(f+g) = \int f + \int g$

ha $f \in C_2$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ akkor $\lambda \cdot f \in C_2$ és $\int \lambda f = \lambda \int f$

ha $f, g \in C_2$ és $f \leq g$ akkor $\int f \leq \int g$

ha $f \in C_2$ és f-et egy nullmértékű halmazon megváltoztatjuk, akkor az integrálja nem változik C_2-ben marad

ha $f \in C_2$ akkor f^+, f^- és $|f|$ is $\in C_2$

ha $f \in C_2$ akkor $|\int f| \leq \int |f|$

ha $f \in C_2$ akkor létezik (f_j) lépcsős függvény sorozat, hogy $\lim (f_j) = f$ majdnem mindenhol és $\int f = \lim \int f_j$

Beppo Levi tétele

tétel tfh $f_j \in C_2$

(f_j) monoton növő sorozat

$\int f_j$ felülről korlátos

ekkor $f := \lim (f_j)$ majdnem mindenhol véges

$f \in C_2$

$$\int f = \int \lim_{j \to \infty} (f_j) = \lim_{j \to \infty} \int f_j$$

tétel tfh $g_k \in C_2$

$g_k \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int g_k < +\infty$$

ekkor $f := \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ sor majdnem mindenhol konvergens

$f \in C_2$

$$\int f = \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int g_k \right)$$

megj: a két tétel ekvivalens, az elsőből következik a második

Lebesgue tétele

tétel tfh $f_j \in C_2$

$\lim(f_j) = f$ majdnem mindenhol

$g \in C_2 : |f_j(x)| \leq g(x)$ majdnem mindenhol

létezik

akkor $f \in C_2$

$\int f = \lim \int f_j$

spec eset

legyen $|f_j| \leq K$

$f_j(x) = 0$, ha $|x| > a$

$f_j \in C_2$

ha $\lim(f_j) = f$ majdnem mindenhol

akkor $f \in C_2$

$\int f = \lim \int f_j$

Fatou lemma

tfh $f_j \in C_2$

$f_j \geq 0$

létezik K, hogy $\int f_j \leq K$ $\forall j$ re

$\lim(f_j) = f$ majdnem mindenhol

akkor $f \in C_2$

$\int f \leq \liminf \int f_j$

Mérhető függvények fogalma, tulajdonságai

def: egy $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fv-t (Lebesgue) mérhetőnek nevezünk, ha f előállítható lépcsős függvények majdnem mindenhol konvergens sorozataként

állítás ha f Lebesgue-integrálható

akkor f mérhető

állítás ha f mérhető

létezik $g: |f| \leq g$

akkor f integrálható

tétel ha f, g mérhető

akkor $f+g$, fg és $\frac{f}{g}$ is mérhető $\quad$ [$g(x) \neq 0$ mm]

tétel ha f_i mérhető

$f = \lim(f_i)$ majdnem mindenhol

akkor f is mérhető

tétel tfh $f_1 .. f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mérhető fv-ek

$g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ folytonos

akkor $h := g \circ (f_1, f_2 .. f_k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mérhető

A Riemann és a Lebesgue integrál kapcsolata

tétel tfh $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos fv folytonos az $[a,b]$ intervallumon majdnem mindenhol

akkor f fv. Riemann és Lebesgue szerint is integrálható és a kettő megegyezik

tétel ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos fv Riemann szerint integrálható

akkor f majdnem mindenhol folytonos

megj: például a jegyzetben

Fubini tétele

tfh $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ integrálható fv

akkor $y\mapsto f(x,y)$ majdnem minden $x\in\mathbb{R}$ esetén integrálható $\mathbb{R}$-en

$x\mapsto\int f(x,y)\,dy$ is integrálható $\mathbb{R}$ en

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}}\left(\int f(x,y)\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\right)dx$$

megj: ha f nemnegatív és mérhető, akkor a Fubini tétel mindig érvényes

(az integrál ∞-is lehet)

Paraméteres integrálok

def: tfh $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ (legalábbis folytonos) fv

értelmezzük $g := \int_c^d f(x,y)\,dy$ függvényt

ezt nevezzük f paraméteres integrálfüggvénynek

tétel ha $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ folytonos

akkor g folytonos $[a,b]$-n

tétel tfh $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ folytonos

$\partial_1 f$ létezik és folytonos $(a,b)\times(c,d)$-n

$\partial_1 f$-nek létezik folytonos kiterjesztése a zárt $[a,b]\times[c,d]$-re

akkor g folytonosan diffható $[a,b]$-n

$$g'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x,y)\,dy \quad , x\in[a,b]$$

Az $L^2(A)$ fv.-tér

jelölés: legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz
akkor jelölje $L^2(M)$ az olyan $f: M \to \mathbb{R}$ mérhető függvények összességét, melyekre a függvények abszolútértékének négyzete integrálható

állítás $L^2(M)$ vektortér a szokásos műveletekkel

állítás ha $f, g \in L^2(M)$
akkor fg integrálható

def: legyen $f, g \in L^2(M)$
értelmezzük a következő műveletet: $\langle f, g \rangle = \int_M fg$

állítás $L^2(M)$ a fenti skalárszorzattal euklideszi tér

megj: itt is igaz a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség:

$$\left| \int_M fg \right| = |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\| = \sqrt{\int_M |f^2|} \sqrt{\int_M |g^2|}$$

def: Hilbert-térnek a teljes euklideszi teret nevezzük

Riesz-Fischer-tétel
az $L^2(M)$ tér teljes, vagyis Hilbert-tér

A $L^p(A)$ függvénytér

def: legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz

$1 \leq p < \infty$

jelölje $L^p(M)$ az olyan $f: M \to \mathbb{R}$ mérhető fv-ek ösmességét, melyekre $|f|^p$ integrálható

állítás $L^p(M)$ vektortér a szokásos műveletekkel

def: a $L^p(M)$ vektortéren vezessük be a következő normát:

$$\|f\| := \left\{ \int_M |f|^p \right\}^{1/p}$$

állítás a fenti normával $L^p(M)$ normált tér

Young-egyenlőtlenség

a és b nemnegatív számok

egy $1 < p < \infty$ számhoz rendeljük a q számot úgy, hogy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ekkor $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Hölder egyenlőtlenség

tfh $f \in L^p(M)$, $g \in L^q(M)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < \infty$

ekkor fg integrálható M-en

$$\int_M fg \leq \|f\|_{L^p(M)} \|g\|_{L^q(M)}$$

Minkowski egyenlőtlenség

ha $f, g \in L^p(M)$, $1 \leq p < \infty$

akkor $\|f+g\|_{L^p(M)} \leq \|f\|_{L^p(M)} + \|g\|_{L^p(M)}$

tétel: $L^p(M)$ teljes normált tér (Banach-tér)

$1 \leq p < \infty$

$L^\infty(M)$ függvénytér

def: legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz

tekintsük az összes $f: M \to \mathbb{R}$ majdnem mindenütt mérhető és korlátos függvényt

jelöljük ezt a halmazt $L^\infty(M)$ -mel

állítás $L^\infty(M)$ vektortér

def: $\|f\|_{L^\infty(M)} := \inf \left\{ \sup_{M \setminus A} |f| : \lambda(A) = 0 \right\}$

tétel $L^\infty(M)$ normált tér teljes is

tétel ha M mértéke véges

akkor

$$\|f\|_{L^\infty(M)} = \lim_{p \to \infty} \|f\|_{L^p(M)}$$

ℓ^p tér

def: legyen $1 \leq p < \infty$

tekintsük $a = (a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ olyan valós sorozatokat, amelyekre $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty$

ezek a sorozatok egy vektorteret alkotnak

norma: $\|a\| := \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right\}^{1/p}$

ezt a normált teret jelölje ℓ^p

tétel ℓ^p Banach-tér

spec eset: ℓ^2 az $\langle a, b \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ skaláris szorzattal Hilbert tér