Bizonyítás: alkalmazzuk a Young egyenlőséget: $a := \frac{|f(x)|}{\|f\|}$, $b := \frac{|g(x)|}{\|g\|}$. $\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(M)}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(M)}} \le \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q}$.

Integrálva mindekét oldalt M-re: $\frac{\int_M |f| \cdot |g|}{\|f\| \cdot \|g\|} \le \frac{1}{p} 1 + \frac{1}{q} 1 = 1$.

Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség): ha $f, g \in L^p(M) \Rightarrow \|f+g\|_{L^p(M)} \le \|f\|_{L^p(M)} + \|g\|_{L^p(M)}$.

Bizonyítás: $p = 1$ esetére triviális. $p > 1$ esetén:

$$\|f+g\|^p = \int_M |f+g|^p = \int_M |f+g|^{p-1} \cdot |f+g| \le \int_M |f+g|^{p-1} \cdot |f| + \int_M |f+g|^{p-1} \cdot |g| \le \text{(Hölder)}$$

$$\le \left\{ \int_M |f+g|^{(p-1)q} \right\}^{1/q} \cdot \left\{ \int_M |f|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \int_M |f+g|^{(p-1)q} \right\}^{1/q} \cdot \left\{ \int_M |g|^p \right\}^{1/p} =$$

$\left(\|f+g\|_{L^p(M)} \right)^{p/q} \cdot \left[\|f\|_{L^p(M)} + \|g\|_{L^p(M)} \right]$, $p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = p\frac{1}{p} = 1$. Így az előbbi egyenlőtlenségből $\|f+g\|_{L^p(M)} = \|f+g\|_{L^p(M)}^{p-p/q} \le \|f\|_{L^p(M)} + \|g\|_{L^p(M)}$. Tehát $L^p(M)$ tér normáltságának utolsó feltételét is igazoltuk, azaz $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$, tehát $L^p(M)$ normált tér.

Tétel (bizonyítás nélkül): $L^p(M)$ teljes normált tér, azaz Banach ($1 \le p < \infty$).