Analízis II.

Fizika BSc (fizikus szakirány), 2014. tavasz

Vizsgaidőpontok. Május 20., 29., június 18., 25., 30., július 3. A vizsgák 8:30-kor kezdődnek a Déli tömb 3-719-es termében. A felkészülési idő 1 óra, egyszerre mindig 4 hallgató fog felkészülni (amíg még van annyi), ezért reggel is legyenek ott legalább ennyien. Ha a hallgatók elfogynak, akkor a vizsga véget ér, további esetlegesen későn érkező hallgatókra nem várok. Konzultációt szívesen tartok, az időpontot emailben célszerű egyeztetni, de rövidebb kérdésekre emailben is tudok válaszolni.

Tudnivalók. Megjelenés hétköznapi öltözetben. A vizsgán a részletes tematika nem használható, csak annak a címszavas változata. Ezt vizsgára nem kell hozni, én adok belőle. Üres lap viszont legyen mindenkinél. A tematikából mindenki két tételt húz, de a felelet során a húzott tételektől eltérő kérdéseket is fel fogok tenni. A közepes és elégséges jegyekért a fogalmakat és tételeket tudni és legfőképpen *érteni kell*, ezt konkrét (egyszerű) példákon való alkalmazásokkal tesztelni fogom (például $f(x,y) = xy$ bilineáris függvény-e, $[0,1] \cup \{2\}$ halmaznak a 2 határpontja-e stb.). A jeles és jó érdemjegyekért a fogalmak és tételek mellett az elhangzott bizonyítások főbb lépéseit is ismerni kell (legalábbis minél többet a minél jobb jegyért).

Részletes vizsgatematika.

1. **Egyváltozós Riemann-integrál.**
    - *Riemann-integrálhatóság egyváltozóban:* motiváció (terület), felosztás, alsó és felső közelítőösszegek, osztópont hozzávételének hatása, $s_{\mathcal{F}} \leq S_{\mathcal{G}}$, Darboux-féle alsó és felső integrál, Riemann-integrálhatóság;
    - *Ekvivalens feltételek integrálhatóságra:* oszcillációs összeg, Rimeann-féle összeg, Riemann-integrálhatóság ekvivalens feltételei a négyféle összeg segítségével (nem biz.);
    - *Integrálfüggvény:* definíció, folytonosság, Lipschitz-folytonosság (biz.), differenciálhatóság folytonos f esetén (biz.), folytonos függvény primitív függvényének létezése, Newton–Leibniz-tétel (biz.);

2. **Görbék rektifikálhatósága és a vonalintegrál értelmezése**
    - *Görbék:* motiváció (pontszerű test pályája), definíció, görbe=leképezés (nem képhalmaz), halmaz paraméterezése, példák, egyszerű ív, töröttvonal, beírt töröttvonal, görbe ívhossza, rektifikálható görbe, példa folytonos, de nem rektifikálható görbére ($x \sin \frac{1}{x}$ grafikonja), Lipschitz-folytonosság elégséges feltétel rektifikálhatóságra (biz.), folytonosan differenciálható $\implies$ Lipschitz-folytonos (biz.), ívhossz nem változik átparaméterezéssel, egyszerű ív (mint halmaz) hossza értelmes;
    - *Vonalintegrál:* motiváció (munkavégzés), definíció, átparaméterezéssel nem változik a vonalintegrál (ha létezik), elégséges feltétel a vonalintegrál létezésére (f folytonos, γ folytonos és rektifikálható, nem biz.), folytonosan differenciálható görbe esetén a vonalintegrál felírható mint Riemann-integrál (biz. vázlat), a vonalintegrál tulajdonságai (algebra, triviális becslés);

3. **Vonalintegrál és primitív függvény.**
    - *Primitív függvény és Newton–Leibniz-tétel vonalintegrálokra:* definíció, Newton–Leibniz-tétel vonalintegrálokra (biz. vázlat), Newton–Leibniz-tétel következményei;
    - Szükséges és elégséges feltételek primitív függvény létezésére: ha van potenciál (vagyis a vektormező konzervatív), akkor zárt görbén vonalintegrál 0, az integrál független az úttól, sőt ezek ekvivalensek a potenciál létezésével (biz.), szükséges feltétel potenciál létezésére a keresztben vett parciális deriváltak egyenlősége (biz.), általában ez nem elégséges (példa), elégséges, ha a tartomány csillagszerű (biz.).

4. **Paraméteres integrálok.**
   - *Differenciálhatósági tételek:* paraméteres integrálok differenciálhatósága (biz.), egy további paraméteres integrál differenciálhatósági tétel (paraméter az integrálási határban és az integrandusban is, biz.)
   - *Alkalmazás:* $\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}\, dx = \log 2$.

5. **Komplex differenciálhatóság.**
   - *Komplex számok (ismétlés):* képzetes egység, valós és képzetes rész, algebrai és trigonometrikus alak, argumentum, abszolút érték, komplex számsík, hatványozás és gyökvonás (többértékű!), komplex sorozatok konvergenciája, komplex függvények ($f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z)$), $f(z) = az + b$ hasonlósági transzformáció;
   - *Komplex értelemben vett differenciálhatóság:* definíció (különbségi hányados és maradéktag), deriválás és algebrai műveletek (összeg, szorzat, hányados, összetett függvény), Cauchy–Riemann-egyenletek (biz.), példák ($f(z) = \overline{z}$ nem differenciálható, valós értékű komplex függvény csak konstans esetben differenciálható), $(u(x, y), v(x, y))$ Jacobi-mátrixa irányítástartó hasonlósági transzformáció mátrixa, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az $a + \mathrm{i}b$ komplex számok és az irányítástartó hasonlósági transzformációk között, lokális aszimptotikus körtartás, $f(z) = \overline{z}$ irányításváltó, ezért nem differenciálható;
   - *Áramlások:* $f(z)$ sebességvektor, stacionárius, divergencia- és rotációmentes, síkbeli áramlás $\equiv \overline{f(z)}$ holomorf ($f(z)$ antiholomorf), példák ($f(z) = z, \mathrm{i}z, \overline{z}$).

6. **Komplex hatványsorok és elemi függvények.**
   - *Komplex hatványsorok:* hatványsor, Cauchy–Hadamard-tétel (nem biz.), konvergenciasugár, egyenletes konvergencia;
   - *Elemi függvények:* exponenciális függvény, hatványsor, konvergenciasugár, derivált, $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, $e^z \neq 0$, abszolútérték, argumentum, komplex szám exponenciális alakja, geometriai szemléltetés (vízszintes és függőleges egyenesek képei), trigonometrikus függvények hatványsora, logaritmusfüggvény reguláris ága, derivált, geometriai szemléltetés, hatványfüggvények, geometriai szemléltetés.

7. **Komplex vonalintegrál.**
   - *Görbék a komplex számsíkon:* görbe a komplex számsíkon, ívhossz, rektifikálhatóság;
   - *Komplex vonalintegrál:* vonalintegrál értelmezése, a vonalintegrál kifejezése valós vonalintegrálok segítségével, elégséges feltétel a létezésre (f folytonos és γ folytonos, rektifikálható), folytonosan differenciálható görbe esetén a komplex vonalintegrál felírható Riemann-integrálként (biz.), Newton–Leibniz-tétel komplex vonalintegrálokra (biz.);
   - *Primitív függvény:* primitív függvény definíciója, a vonalintegrál úttól való függetlensége, zárt görbén vett vonalintegrál eltűnik és primitív függvény létezése ekvivalensek (biz.).

8. **Cauchy-alaptétel és Cauchy-integrálformula.**
   - *Cauchy-alaptétel:* egyszerű zárt görbe (Jordan-görbe), egyszeresen összefüggő tartomány, Cauchy-alaptétel egyszeresen összefüggő tartományra (biz.), Goursat-lemma (biz.), Cauchy-alaptétel több Jordan görbére (biz.);
   - *Cauchy-formula:* Cauchy-formula (biz.), példák ($\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} dz, \int_{|z|=2} \frac{z}{z^2+1} dz$);

9. **Hatványsorba fejthetőség és következményei.**
   - *Hatványsorba fejtés:* reguláris függvény hatványsorba fejthetősége, a hatványsor együtthatóinak integrálformulája (biz.);

- *A hatványsorbafejthetőség következményei:* végtelen rendben eltűnő függvény azonosan nulla (biz.), unicitás tétel (biz.), alkalmazás addíciós formulák igazolására (biz.), maximumelv (biz.), mese a harmonikus függvényekről, egészfüggvények, Liouville tétele (biz.), az algebra alaptétele (biz.).

10. **Laurent-sorok, izolált szingularitások és reziduumtétel.**

   - *Laurent-sorok:* definíció, Laurent-sorok konvergenciája körgyűrűn (biz.), összegfüggvény regularitása (biz.), körgyűrűn reguláris függvény Laurent-sorba fejthető (biz.), példa;
   - *Izolált szingularitások:* izolált szingularitás definíciója, megszüntethető szingularitás, pólus, lényeges szingularitás, megszüntethető szingularitás jellemzése (biz.), pólus jellemzése (nem biz.), Casorati–Weierstrass-tétel (nem biz.), példák;
   - *Reziduumtétel:* reziduum definíciója, reziduumtétel (biz.), alkalmazás improprius integrál kiszámításásra ($\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$).

11. **Nullmértékű halmazok és lépcsős függvények.**

   - *Nullmértékű halmazok:* intervallum $\mathbb{R}^n$-ben, nullmértékű halmaz, példák (véges, megszámláéható, egyenes $\mathbb{R}^2$-ben), megszámlálható sok nullmértékű halmaz uniója nullmértékű (biz.), majdnem mindenütt.
   - *Lépcsős függvények integrálja:* lépcsős függvény, integrál, az integrál tulajdonságai (nem biz.), két lemma lépcsős függvények monoton sorozatairól („A és B lemma", biz. csak B).

12. **Integrál a C_1 és C_2 osztályban.**

   - *C_1 osztály:* a C_1 osztálybeli függvények integrálja, az integrál definíciójának értelmessége (egyenlőtlenség biz.), az integrál tulajdonságai (összeg, pozitív számszoros, pozitív rész, alsó és felső burkoló integrálhatósága biz.);
   - *C_2 osztály:* a C_2 osztálybeli függvények integrálja, a definíció jogossága (biz.), az integrál tulajdonságai (összeg, számszoros, abszolútérték, pozitív, negatív rész, alsó és felső burkoló integrálhatósága biz.);

13. **Integrál konvergenciatételek.**

   - *Beppo-Levi tétele:* két változat kimondássa és a két változat ekvivalenciája (biz.), következmények (elég határ/összegfüggvény integrálhatósága, nemnegatív függvény integrálja mikor 0, biz.),
   - *Lebesgue-tétel:* Lebesgue-tétel (biz.), Fatou-lemma (nem biz.), Lebesgue-tétel módosítása (a határfüggvény majorálható, biz.).

14. **Mérhető függvények és halmazok, integrálás mérhető halmazon.**

   - *Mérhető függvények:* mérhetőség definíciója, ha mérhető és majorálható, akkor integrálható (biz.), mérhetők összege, szorzata, hányadosa, limesze mérhető (biz.), folytonos és mérhető kompozíciója mérhető (biz.);
   - *Mérhető halmazok:* halmaz karakterisztikus függvényének definícója, mérhető halmaz definíciója, mérhető halmazok metszete, uniója, különbsége mérhető (biz.), additivitás, σ additivitás (biz.);
   - *Integrálás mérhető halmazon:* mérhető halmazon vett integrál értelmezése, integrálható függvény megszorítása integrálható (biz.);

15. **Riemann-integrál és Lebesgue-integrál, L^2 terek.**

   - *Riemann-integrál és Lebesgue-integrál:* a Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle kritériuma (biz.), Rimeann-integrálható függvény C_1-beli (biz), impropriusan Riemann-integrálható függvény nem feltétlenül Lebesgue-integrálható (példa);

- L^2 *tér:* az $L^2(M)$ tér, vektortér (biz.), skalárszorzat bevezetése, Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség (biz.), Riesz–Fischer-tétel (biz.).

16. L^p **terek.**

- L^p *tér:* az $L^p(M)$ tér, vektortér (Jensen-egyenlőtlenség), norma bevezetése, Young-egyenlőtlenség (biz.), Hölder-egyenlőtlenség (biz.), Minkowski-egyenlőtlenség (biz.);
- L^∞ *tér:* az $L^\infty(M)$ tér, lényeges szuprémum, teljesség (biz.).