Analízis II.

1. óra

(előző félév folytatása)

Binomiális sor

0) Emlékeztető:

- $x_0 \in \mathbb{R}$ körüli hatványsor (sor $\rightarrow$ összefv.) $\underbrace{\qquad}_{\text{elhok}}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k \qquad c_k \in \mathbb{R}$$

Tudjuk, hogy ha a konv. sugár $(R) > 0$, akkor:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

- Taylor-formula Lagr.-féle maradéktaggal: (összefv. $\underset{?}{\rightarrow}$ sor)

Ha f $(N+1)$-szer diffh. x_0 környezetében

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}}$$

ha $N \to \infty$-re ez a tag eltűnik $(\to 0)$, akkor a fv. Taylor-sora ~~hatványsor~~

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \ldots$ előállítja a fv.-t

1) <u>Probléma</u> (binomiális sor):

- tekintsük $f(x) := (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > -1$ -et
- f-t szeretnénk az $x_0 = 0$ körül Taylor-sorba fejteni

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1}, \quad f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad f''(0) = \alpha \cdot (\alpha-1)$$

$$f^{(k)}(x) = \alpha \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \quad f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-k+1)$$

$$\vdots$$

Tehát az f k. $x_0 = 0$ körüli Taylor-sora:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k$$

ahol $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ lehet

2) <u>Kérdés</u>: a) ez a sor milyen x-ekre konvergens (konv. sugár)?

b) a sor összege egyenlő-e $(1+x)^{\alpha}$-val?

(ha tudnánk, hogy mikor tart a Lagr.-féle maradéktag, akkor ezeket is el tudnánk dönteni)

a) Belátjuk, h. a konv. sugár $= 1$:

a hányados kritériumot ~~(h)~~ alkalmazzuk

$$c_k := \binom{\alpha}{k}, \quad a_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \quad x \text{ rögzített}, \ x \neq 0$$

Tek. az $|a_k|$-tagokból alkotott „számsort", erre alkalmazzuk a hányados kritériumot!

~~(mivel $|x| > 1$ esetben)~~

$$\underbrace{\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}}_{} = \frac{\left|\binom{\alpha}{k+1}\cdot x^{k+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{k}\cdot x^{k}\right|} = \left|\frac{\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{(k+1)!}\cdot x^{k+1}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}\,x^{k}}\right| = \underbrace{\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|}_{\xrightarrow{k\to\infty}\,1}\cdot|x| \to |x|$$

ha ez <1 lim-ben, akkor a sor abszolút konvergens → konvergens

$$\Downarrow$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x| < 1$$

Vagyis $k\to\infty$ $\exists\, 0 < q_0 < 1,\ k_0 \in \mathbb{N} : k > k_0$ $\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \le q_0$

$$|x| < q_0 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \text{ esetén}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergens}$$

($|x| > 1$ esetén $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = |x| > 1$ divergens

$$\Downarrow$$

a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ sor is divergens)

b) <u>Áll.:</u> $|x| < 1$ esetén a sor előállítja $f(x)$-et, azaz:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = (1+x)^{\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

($|x| = 1$-re külön meg kell nézni)

Biz.: $f(x) := (1+x)^{\alpha}$, $g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ $(|x|<1)$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+x} \cdot f(x)$$

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k \cdot x^{k-1} \overset{?}{=} \frac{\alpha}{1+x} g(x) \qquad (|x|<1)$$

ilyenkor szabad deriválni, mert egyenletesen konvergens is a bin. sor (majorálható $c_k \cdot R_0^k$ -val) → l. előző félév

Mi.: $\cancel{\frac{\alpha}{1+x} g(x) = \frac{\alpha}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k}$

$$(1+x) g'(x) = (1+x) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k \cdot x^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot k \cdot x^k =$$

$k=0$-ra 0 a tag

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l+1} (l+1) \cdot x^l + \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} \cdot l \cdot x^l = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{l+1}(l+1) + \binom{\alpha}{l} \cdot l \right] \cdot x^l$$

$l := k-1$ $\qquad$ $l := k$

ms.: $$\binom{\alpha}{l+1}(l+1) + \binom{\alpha}{l} \cdot l = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-l)}{l!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-l+1)}{l!} \cdot l =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-l+1)}{l!} \overbrace{[\alpha - l + l]}^{\alpha} = \binom{\alpha}{l} \cdot \alpha$$

$\Downarrow$

$$(1+x) g'(x) = \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} \cdot x^l \cdot \alpha}_{x \neq 0} = \alpha \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{\alpha}{1+x} \cdot g(x)$$

$\Downarrow$

$f(x)$ és $g(x)$ ugyanannak a diffegyenletnek tesznek eleget.

+

†

az f és g fv. az $x=0$-ban ugyanazon kezdeti feltételnek tesz eleget: $f(0)=1$, $g(0)=1$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{f(x)=g(x), \quad |x|<1}}$$

(a d.e. megoldása:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(f(x)\right)\right)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha}{1+x}, \text{ ha } f(x)\neq 0$$ (ez teljesül biztos f-re)

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(g(x)\right)\right)=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{1+x}, \text{ ha } g(x)\neq 0$$

$$\frac{d}{dx}\ln\left(f(x)\right)=\frac{d}{dx}\ln\left(g(x)\right), \text{ amíg } g(x)\neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left(f(x)\right)=\ln\left(g(x)\right)+\text{konstans}$$

$\uparrow$

ez 0, mivel $x=0$-ban a két fv. egyenlő)

3) <u>alkalmazások:</u>

a) Megj.: $\alpha=n\in\mathbb{N}$ esetén $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ binomiális tétel

b) $\alpha=\frac{1}{2}$ $\quad \sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}x^k \qquad |x|<1$

c) $\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-x^2)^k$, ezt 0-tól ξ-ig integrálva $(|\xi|<1)$

$$\underline{\underline{\arcsin\xi=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}(-1)^k\xi^{2k+1}\cdot\frac{1}{2k+1}}}$$

d) $f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^k$$

integrálva 0-tól ξ-ig $\left(|\xi| < 1\right)$

$$\ln(1+\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\xi^{k+1}}{k+1}$$

(= trükkös sorfejtések)

Taylor-formula többváltozós fvekre

1) Legyen X normált tér, f X-ből $\mathbb{R}$-be képező fv., amely $(N+1)$-szer diffható az $a \in X$ egy ρ sugarú környezetében. Legyen $h \in X$, $\|h\|_X < \rho$, vagyis $a+h \in a$ pont ρ sugarú környezetében.

$$f(a+h) = f(a) + \dots \ ?$$

a) levezetés:

$g(t) := a + t \cdot h$, $t \in \mathbb{R}$, $-\delta < t < 1+\delta$ (visszavezetjük 1 változóra)

$g(t)$ még ilyenkor is $\in B_\rho(a)$

$$\varphi(t) = f(g(t)) = (f \circ g)(t) = f(a+th)$$

$\Downarrow$

φ $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}$-be képező fv., $(N+1)$-szer diffh. $(-\delta, 1+\delta)$ int-on

Alkalmazzuk a Taylor-formulát ϕ fv-re!

$$\phi(1)=\phi(0)+\frac{\phi'(0)}{1!}\cdot 1+\dots+\frac{\phi^{(N)}(0)}{N!}\cdot 1^N+\frac{\phi^{(N+1)}(\tau)}{N+1!}\cdot 1^{N+1}$$

ahol

$0<\tau<1$

$$\phi(1)=f(a+h)\ ,\qquad \phi(0)=f(a)\ ,\qquad \phi'(t)=\underbrace{f'(a+th)}_{\in L(X,\mathbb{R})}\cdot\underbrace{h}_{h\in X}\in\mathbb{R}$$

$\in L(\mathbb{R},X)$ mert

(mert $t\in\mathbb{R}$ szerint deriváltunk)

$$\phi''(t)=\left[f''(a+th)\cdot h\right]\cdot h=\underbrace{f''(a+th)}_{\text{bilineáris operátor}}(h,h)$$

mert h nem függ t-től (t-ben konstans)

$$\phi^{(k)}(t)=\underbrace{f^{(k)}(a+th)}_{\text{multilineáris leképezés}}\cdot(\overset{1}{h},\overset{2}{h},\dots,\overset{k}{h})$$

$$\phi^{(k)}(0)=f^{(k)}(a)\cdot(h,h,\dots h)$$

Behelyettesítve ezeket az értékeket:

$$\boxed{f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)\cdot h}{1!}+\frac{f''(a)\cdot(h,h)}{2!}+\dots+\frac{f^{(N)}(a)\cdot(\overset{1}{h},\overset{2}{h},\dots\overset{k}{h})}{N!}+\frac{f^{(N+1)}(a+\tau\cdot h)\cdot(\overset{1}{h},\overset{2}{h},\dots\overset{N+1}{h})}{(N+1)!}}$$

ahol

$\exists\,\tau\in(0,1)$

b) pl. $X=\mathbb{R}^n$, $N:=1$ f $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}$-be képez

- $f'(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, ennek megfelel $(\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \dots \partial_n f(a))$

$$f'(a)\cdot h = (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \dots \partial_n f(a)) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(a)\cdot h_j$$

$h \in \mathbb{R}^n$

- $f''(a) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, R)) \longleftrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilin. folyt. leképezés

Ennek megfelel:

$$f''(a) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \partial_2\partial_1 f(a) & \dots & \partial_n\partial_1 f(a) \\ \partial_1\partial_2 f(a) & \partial_2^2 f(a) & \dots & \partial_n\partial_2 f(a) \\ \vdots & & \ddots & \\ \partial_1\partial_n f(a) & & \dots & \partial_n^2 f(a) \end{pmatrix}$$

hasonlóan $(a+\tau h)$-ra

$$f''(a+\tau h)(h,h) = \sum_{j,k=1}^{n} \partial_j \partial_k f(a+\tau h)\, h_j h_k$$

- Tehát a Taylor-formula $N=1$ esetén:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{\sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(a)\cdot h_j}{1!} + \frac{\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j \partial_k f(a+\tau h)\, h_j h_k}{2!}$$

$$h = (h_1, h_2, \dots h_n) \in \mathbb{R}^n \qquad 0 < \tau < 1$$

2) Mi a helyzet, ha f X normált térből Y normált térbe képez

Belátható, ha f X normált térből Y normált térbe képez és N-szer diffh. az $a \in X$ pont egy (s) környezetében, akkor:

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)\cdot h}{1!} + \dots + \frac{f^{(N)}(a)\cdot(h,h,\dots h)}{N!} + R_N,}$$

ahol $\|R_N\|_Y < \frac{\|h\|_X^N}{N!} \cdot \sup \|f^{(N)}(\xi) - f^{(N)}(a)\|_Y$

$\|h\|_X < \rho \qquad \xi \in B_\rho(a)$

Többváltozós fv-ek lokális szélsőértéke

Legyen a továbbiakban X normált, f X-ből $\mathbb{R}$-be képező fv.

1) <u>Def</u> Tfh. f X-ből $\mathbb{R}$-be képező fv. értelmezve van $a \in X$ pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy az f fv-nek a-ban lokális minimuma van, ha

- $\exists \delta > 0 \qquad x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \geq f(a)$
- sig. lok min -"- $\quad x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \quad f(x) > f(a)$
- lokális max. hasonlóan definiálható

2) <u>Tétel</u>: Tfh. f fv. diffh. a-ban ($\Rightarrow f$ értelmezve van a egy környezetében). Ha f-nek a-ban lokális szélső-értéke van (lok. min./max.-a van), akkor $f'(a) = 0$.

<u>Biz.</u>: Most $f'(a) \in L(X, \mathbb{R})$. Azt kellene belátni, hogy $f'(a)\cdot h = 0 \quad \forall h \in X$.

Az, hogy az f diffh. a-ban, azt jelenti, hogy

$\exists \delta_1 > 0 : \|x\|_X < \delta_1$, akkor:

$$f(a+x) - f(a) = \underbrace{f'(a)}_{\in L(X,\mathbb{R})} \cdot x + \eta(x) \quad \text{ahol:} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\eta(x)}{\|x\|_X} = 0$$

- $h \in X$ tetszőleges rögzített elem, $x := t \cdot h$, $|t|$ elég kicsi, vagyis $\|t \cdot h\|_X < \delta_1 \iff |t| < \frac{\delta_1}{\|h\|}$

$$f(a+th) - f(a) = f'(a) \cdot (th) + \eta(th) \quad / : t \neq 0$$

$$\frac{f(a+th) - f(a)}{t} = f'(a) \cdot h + \underbrace{\frac{\eta(th)}{|t|}}_{\to 0, \text{ ha } t \to 0}$$

$$\frac{\eta(th)}{|t|} = \underbrace{\frac{\eta(th)}{\|th\|_X}}_{\to 0, \text{ ha } t \to 0} \|h\|_X$$

rögzített (véges)

$\Rightarrow \underline{\underline{f'(a) \cdot h = 0}}$

<u>Vis:</u> indirekt fktb: $\exists h \in X : f'(a) \cdot h \neq 0$, pl. $f'(a) \cdot h > 0$

$$\Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : |t| < \delta_2 \quad f'(a) \cdot h + \underbrace{\frac{\eta(th)}{t}}_{\text{ha egy 0-hoz tartó kicsi tagot adunk hozzá egy véges értékhez, az az előjelet nem rontja el}} > 0$$

min. esetén:

$$\frac{f(a+th) - f(a)}{t} > 0, \text{ ha } |t| < \delta_2 \Rightarrow \text{ellentmondás}$$

$\Downarrow$

(ha t előjelet vált, akkor a számláló is, de szélsőértéknél pont nem szabadna neki)

2. óra

lokális szélsőértékek (folyt.):

3) <u>Def.:</u> Legyen g egy $X \times X$-ből $\mathbb{R}$-be képező bilineáris és folytonos leképezés. Azt mondjuk, hogy a g:

- pozitív definit, ha $g(h,h) > 0$, $\forall h \in X \setminus \{0\}$
- negatív definit, ha $g(h,h) < 0$, —||—
- pozitív szemidefinit, ha $g(h,h) \geq 0$ $\forall h \in X$
- negatív —||—, ha $g(h,h) \leq 0$ —||—

(• indefinit: $\oplus$ és $\ominus$ értékeket is felvesz)

- szigorúan poz. definit, ha $\exists c > 0$ áll.: $g(h,h) \geq c \cdot \|h\|^2$
- szigorúan neg. —||—, ha —||— : $g(h,h) \leq -c \cdot \|h\|^2$

<u>Megjegyzések:</u>

1) $X := \mathbb{R}^n$ esetén, ha g poz. definit $\Rightarrow$ g szig. poz. definit

<u>M.i.</u> legyen $S_1 := \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1 \}$ (egységsugarú gömbfelület). Tudjuk, hogy mivel S_1 korlátos és zárt és $S_1 \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ <u>S_1 sorozatkompakt</u>.

Tekintsük $G(h) := g(h,h)$, $h \in \cancel{\mathbb{R}^n}\ S_1$. <u>$G$ folytonos</u>, mivel g folytonos (bilineáris, korlátos), és G g-ből összetett fv-el előállítható.

$\Downarrow$

Weierstrass-tétele miatt $\exists h_0 \in S_1$: G felveszi infimumát (minimumát.) (S_1-en). (korlátos $\rightarrow$ van véges infimuma, és mivel zárt, ezt fel is veszi)

Tehát $G(h) \geq G(h_0) \overset{\text{poz. def.}}{>} 0$. Más szóval:

$$g(h,h) \geq c := G(h_0) > 0, \; h \in S_1$$

Legyen $x \in X$ tetsz. $(x \neq 0)$, $h := \frac{x}{\|x\|}$.

$$\underline{\underline{g(x,x)}} = g\left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}, \|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^2 \cdot \underbrace{g\left(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{h}, \underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{h}\right)}_{\geq c} \underline{\underline{\geq c\,\|x\|^2}}$$

2.) $X := \mathbb{R}^n$ esetén egy bilin. folyt. leképezés egy mátrix-szal reprezentálható.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

. Ha A szimmetrikus valós (a második deriváltakból képezett mátrix pl. ilyen), akkor A $\forall$ sajátértéke valós. Bizonyítható, hogy ekkor ha A minden s.é. poz. $\Rightarrow$ A pozitív definit,

ha A — " — neg. $\Rightarrow$ A negatív — " —,

ha A — " — ≥ 0 $\Rightarrow$ A pozitív szemidefinit,

ha A — " — ≤ 0 $\Rightarrow$ A negatív — " —.

(különböző előjeleknél indefinit)

4) <u>Tétel:</u> Tfh. (X normált térből $\mathbb{R}$-be képező) f fv. 'a' egy környezetében kétszer diffh., és f'' folytonos a-ban.

1. Ha f-nek a-ban lok. min. van $\Rightarrow$ $f''(a)$ ($X \times X \to \mathbb{R}$ bil. leképezés) pozitív szemidefinit.

(Hasonlóan f-nek a-ban lok. max. van $\Rightarrow f''(\dots)$ neg. szemidef.)

2. Ha $f''(a)$ szig. poz. def. és $f'(a)=0$ $\Rightarrow$ f-nek a-ban szig. lok. ~~max~~ min-a van.

<u>Biz.:</u> Alkalmazzuk a Taylor-formulát az f fv-re az

1. 'a' pontban. Legyen $h \in X \setminus \{0\}$ rögz. vektor, $t \in \mathbb{R}$. 'a'-ból áttérünk $a+t\cdot h$ pontra. Elég kis $|t|$ esetén ($t \neq 0$):

$$f(a+th) = f(a) + \cancel{\frac{f'(a)}{1!}}\cdot t\cdot h + \frac{f''(a+\vartheta t h)}{2!}\cdot(th,th) \qquad \exists \vartheta: 0<\vartheta<1$$

Tfh. f-nek a-beli min-a van $\Rightarrow$ Tudjuk, h.

$$f'(a)=0 \Rightarrow f(a+th) - f(a) = \frac{f''(a+\vartheta\cdot t\cdot h)}{2!}\cdot t^2(h,h)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{f(a+th)-f(a)}{t^2}}_{\geq 0} = \frac{1}{2} f''(a+\vartheta\cdot t\cdot h)\cdot(h,h) =$$

$$= \frac{1}{2} f''(a)\cdot(h,h) + \frac{1}{2}\underbrace{\left[f''(a+\vartheta\cdot t\cdot h) - f''(a)\right]\cdot(h,h)}_{\to 0,\ \text{ha } t\to 0\ (h \text{ rögz.})}, \text{ mis:}$$

$$\left|\left[f''(a+\vartheta\cdot th) - f''(a)\right]\cdot(h,h)\right| \leq \underbrace{\|f''(a+\vartheta\cdot t\cdot h) - f''(a)\|}_{\to 0}\cdot \overbrace{\|h\|\|h\|}^{\text{rögz}}$$

$\Downarrow$

$$f''(a)\cdot(h,h) \geq 0 \quad \forall h \in X \quad (h \in X \text{ tetsz. rögzített } \cancel{\text{szám}} \text{ érték})$$

2. Tfh. $f''(a)$ bilin. folyt. leképezés szig. poz. definit, $f'(a)=0$. Legyen $h \in X\setminus\{0\}$ rögzített. Az előbbiek szerint elég kis $|t|$ esetén ($t \neq 0$):

$$f(a+th) = f(a) + \frac{f''(a+\tau t\cdot h)}{2!}(th, th) \qquad \exists\ 0<\tau<1$$

$$\frac{f(a+th)-f(a)}{t^2} = \frac{f''(a+\tau\cdot t\cdot h)}{2!}\cdot(h,h) = \underbrace{\frac{1}{2}f''(a)\cdot(h,h)}_{>0} +$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left[f''(a+\tau\cdot th) - f''(a)\right]\cdot(h,h)}_{\to 0,\ \text{ha } t\to 0}$$

Legyen $c_1 := \|h\|$. Ekkor egyrészt – mivel $f''(a)$ szig. poz. definit –: $f''(a)\cdot(h,h) \geq c\,\|h\|^2 = c\cdot c_1^2$, a második tagra: $\left|\left[f''(a+\tau\cdot t\cdot h) - f''(a)\right](h,h)\right| \leq \underbrace{\|f''(a+\tau\cdot t\cdot h) - f''(a)\|}_{\to 0}\cdot\|h\|^2_X$

$$\Rightarrow 2\cdot\frac{f(a+th)-f(a)}{t^2} \geq \underset{\substack{\vee\\ 0}}{c}\cdot\|h\|^2 - \|f''(a+\tau\cdot t\cdot h) - f''(a)\|\,\|h\|^2 =$$

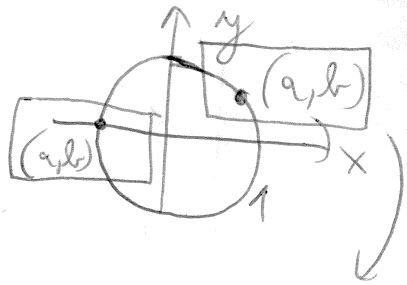
$$= \Big\{\underset{\searrow 0}{c} - \underbrace{\|f''(a+\tau\cdot t\cdot h) - f''(a)\|}_{\to 0,\ \text{ha } t\to 0}\Big\}\|h\|^2 > 0, \text{ ha } \|h\| \text{ elég kicsi}$$

(rögz. h-ra c adott konst.,
a másik tag viszont $\to 0$)

Implicit fv. tétel

1) Probléma a legegyszerűbb esetben: Adott egy $\mathbb{R}^2$-ből $\mathbb{R}$-be képező ϕ fv.. $\phi(x,y)=0$ egyenlőség milyen feltételek mellett definiál egy fv-t (y kifejezhető x segítségével egyértelműen). Pontosabban: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \phi(x,y)=0\}$ halmaz mikor tekinthető egy egyváltozós fv. grafikonjának?

pl. 1. $\phi(x,y) := x^2+y^2-1$



$y = \sqrt{1-x^2}$

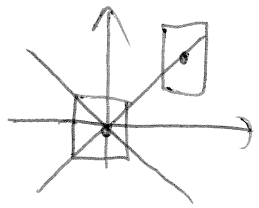
$y = -\sqrt{1-x^2}$

ebben a ~~környezetben~~ egyértelmű x-y fv. megadható, de a teljes köre "kétértékű" a fv (nincs egyértelmű x, y összefügg.)

$(-1,0)$ pont esetében $\partial_2\phi(-1,0)=0$ → ez problémát okoz, ettől lesz kétértékű.

2. $\phi(x,y) = x^2+y^2+1$ $\quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \phi(x,y)=0\} = \emptyset$

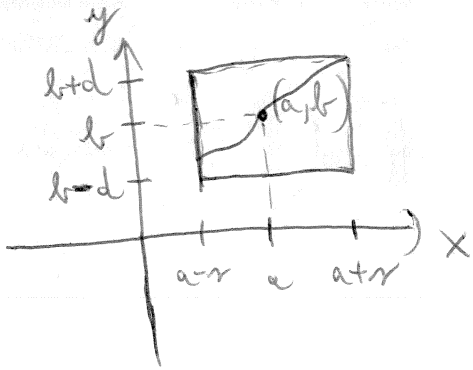
3. $\phi(x,y) = y^2-x^2$ $\quad \phi(x,y)=0 \to y=\pm x$



$\partial_2\phi(0,0)=0$

2) <u>Tétel:</u> Legyen ϕ $\mathbb{R}^2$-ből $\mathbb{R}$-be képező fv., amely értelmezve van és folytonos valmely $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ egy környezetében, és $\phi(a,b)=0$, továbbá $\partial_2\phi$ $\exists$ és folyt. (a,b) egy környezetében, és $\partial_2\phi(a,b)\neq 0$.

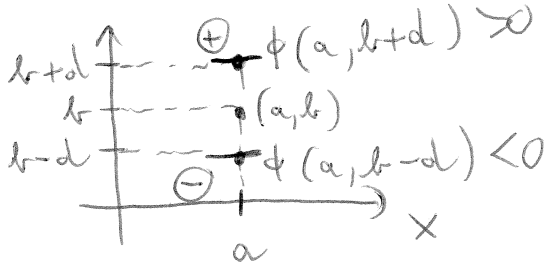
→ Ekkor az 'a' pontnak létezik $B_r(a)$ $(=(a-r, a+r))$ környezete és a b pontnak olyan $(b-d, b+d)$ környezete és $f: B_r(a)\to\mathbb{R}$ folyt. fv., amelyre $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \phi(x,y)=0$ és $x\in B_r(a), y\in(b-d,b+d)\} = \{x, f(x) : x\in B_r(a)\}$



<u>Biz.:</u> Mivel $\partial_2\phi(a,b)\neq 0$, pl. $\partial_2\phi(a,b)>0$, továbbá $\partial_2\phi$ folyt. fv., azért létezik (a,b)-nek egy olyan környezete, ahol $\partial_2\phi(x,y)>0$ $\Rightarrow$ ~~(tehát)~~ az 'a' elég kis környezetében fekvő rögzített x pontok esetében $y\mapsto\phi(x,y)$ szig. mon. nő a 'b' egy kis környezetében.

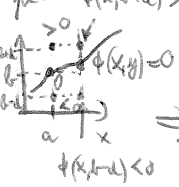
Mivel $\phi(a,b)=0$ és $y\mapsto\phi(a,y)$ szig. mon. nő $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ olyan $d>0$: $\phi(a,b+d)>0$, $\phi(a,b-d)<0$.



ϕ folytonos (a,b) egy körny.-ben. Feltehető, ebben benne van $(a,b+d)$ és $(a,b-d)$, azért $\exists r>0$: $x\in B_r(a)\Rightarrow$

pl. $\phi(x,b+d)>0$



$\Rightarrow \phi(x,b+d)>0$ és $\phi(x,b-d)<0$. ϕ folyt. $\Rightarrow$ rögzített $x\in B_r(a)$ esetén $y\mapsto\phi(x,y)$ folyt., amely $y=b+d$ esetén poz., $y=b-d$ esetén neg. $\Rightarrow \exists\, y=f(x)\in(b-d,b+d)$: $\phi(x,f(x))=0$. $y=f(x)$ egyértelmű, mivel $y\mapsto\phi(x,y)$ szig. mon. nő. Eddig bizonyítottuk:

$\partial_2\phi(x,y)>0$

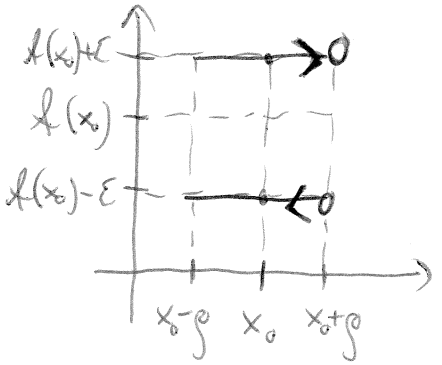
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \phi(x,y)=0,\ x\in B_r(a),\ y\in(b-d,b+d)\} = \{(x,f(x)) : x\in B_r(a)\}$

és $f(x)$ egyértelmű.

→ Azt kellene még belátni, hogy az így értelmezett $f: B_r(x) \to \mathbb{R}$ ~~(fv.)~~ fv. folytonos. Ez az „előző" gondolatmenet módosításával biz. ható. Legyen $x_0 \in B_r(a)$ egy tetszőleges rögzített pont. Belátjuk, hogy f folyt. x_0-ban. Módosítás: (a, b) helyett az $(x_0, f(x_0))$ pontot tekintjük. Egyrészt $\phi(x_0, f(x_0)) = 0$, továbbá $\partial_2 \phi$ létezik és folyt. $(x_0, f(x_0))$ egy körny. ben, $\partial_2 \phi(x_0, f(x_0)) > 0$.

$b - d < f(x_0) < b + d$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetsz. szám, ε-t elég kicsire választva:

$b - d < f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) + \varepsilon < b + d$. Mivel $\phi(x_0, f(x_0)) = 0$, és $\phi(x_0, f(x_0) + \varepsilon) > 0$ (mivel $y \mapsto \phi(x_0, y)$ szig. mon. nő), $\phi(x_0, f(x_0) - \varepsilon) < 0$. ϕ folyt. $\Rightarrow \exists \rho > 0 : x \in B_\rho(x_0)$ esetén



$\phi(x, f(x_0) + \varepsilon) > 0$, $\phi(x, f(x_0) - \varepsilon) < 0$.

Ezért a Bolz. tétel, és szig. mon. miatt:

$\exists! g(x) : \phi(x, g(x)) = 0$. ~~Egyszerű~~ Ezért

$g(x) = f(x)$: $g(x) = f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho > 0 \ x \in B_\rho(x_0) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$

3) <u>Tétel:</u> ($\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ϕ fv-k esete).

Legyen $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan fv., amelyre $\exists\, a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$: $\phi(a,b) = 0$, ϕ folyt. (a,b) egy köny.-ben, $\partial_{n+1}\phi$ lét. és folyt. (a,b) egy köny.-ben, $\partial_{n+1}\phi(a,b) \neq 0$.

Ekkor $\exists$ az $a \in \mathbb{R}^n$-beli pontnak olyan $B_r(a)$ környezete, b-nek olyan $(b-d, b+d)$ környezete, $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$ folyt. fv.: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \phi(x,y) = 0,\ x \in B_r(a),\ y \in (b-d, b+d)\} =$

$$= \{(x, f(x)) : x \in B_r(a)\}.$$

<u>Biz.:</u> Lényegében azonos az előző biz.-al.

4) <u>Tétel (biz. nélkül):</u>

Legyen $\phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$-ből $\mathbb{R}^m$-be képező fv., amelyre $\exists\, (a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. $\phi(a,b) = 0$, ϕ folyt. (a,b) egy környezetében, $y \mapsto \phi(x,y)$ (x rögz.) folyt. diffh. b egy környezetében, $\partial_y \phi$ folyt. (a,b) egy környezetében. $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots \phi_m)$

$$\underset{\text{(Jacobi)}}{F :=} \begin{pmatrix} \partial_{y_1}\phi_1 & \partial_{y_2}\phi_1 & \dots & \partial_{y_m}\phi_1 \\ \partial_{y_1}\phi_2 & \partial_{y_2}\phi_2 & \dots & \partial_{y_m}\phi_2 \\ \vdots & & & \\ \partial_{y_1}\phi_m & \partial_{y_2}\phi_m & \dots & \partial_{y_m}\phi_m \end{pmatrix}, \quad \det F(a,b) \neq 0.$$

Ekkor $\exists\, (a,b)$ pontnak olyan $B_r(a) \times B_\rho(b)$ környezete, $f : B_r(a) \to B_\rho(b) \in \mathbb{R}^m$.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \phi(x,y) = 0,\ x \in B_r(a),\ y \in B_\rho(b)\} = \{(x, f(x)) : x \in B_r(a)\}$$

3. óra

5) Tétel (biz. nélkül):

Tfh. teljesülnek az előző tétel feltételei, és $x \mapsto \Phi(x,y)$ is folyt. diffható (a,b) egy környezetében (megj.: Φ folyt. diffh. (a,b) egy kömy.-ben). Ekkor az $f: B_r(a) \to \mathbb{R}^m$ fv. folytonosan diffható (a,b) egy környezetében.

Megj.: ha tudom, hogy f diffh., akkor az f deriváltja kiszámítható, mis. $\Phi(x, f(x)) = 0$, ha $x \in B_r(a)$. Mivel Φ összes parc. deriváltja $\exists$ és folytonos (a,b) egy kömy.-ben $\Rightarrow \Phi$ diffh., ezért mivel feltevés szerint f diffh. a egy kömy. ben, az összetett fv. diff. szabálya szerint:

$$0 = \frac{d\Phi}{dx} = \partial_x \Phi(x, f(x)) + \partial_y \Phi(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{f'(x)}_{\text{folyt.}} = \underbrace{-\left[\partial_y \Phi(x, f(x))\right]^{-1}}_{\text{folytonos}} \cdot \underbrace{\partial_x \Phi(x, f(x))}_{\text{folyt.}}$$

$\Leftarrow$

Inverz fv. tétel

Tétel: Legyen g $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^n$-be képező fv., amely folyt. diffh. a $b \in \mathbb{R}^n$ pont egy kömy.-ben, továbbá a

$$g' = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1 & \partial_2 g_1 & \cdots & \partial_n g_1 \\ \partial_1 g_2 & \partial_2 g_2 & \cdots & \partial_n g_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 g_n & \partial_2 g_n & \cdots & \partial_n g_n \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa $\neq 0$ b-ben

$\Downarrow$

(b egy kömy. ben sem 0).

Legyen $a := g(b)$ $(\in \mathbb{R}^n)$. Ekkor $\exists\, B_r(a), B_r(b)$, $h: B_r(a) \to B_r(b)$ folyt. diffh. fv.: $\{(x,y) \in B_r(a) \times B_r(b) : x = g(y)\} = \{(x, h(x)), x \in B_r(a)\}$.

Megj.: A fenti tétel azt jelenti, hogy ha leszűkítem a g fv.-t az 'a' egy környezetére, ennek létezik inverze, amely folyt. diffható, $g^{-1} = h$.

Biz.: Visszavezetem az implicit fv. tételre: $\phi(x,y) := x - g(y)$.

Egyrészt $\phi(a,b) = a - g(b) = 0$, ϕ x szerint folyt. diffható, y szerint is, mivel g folyt. diffh. b egy körny.-ben, $\partial_y \phi(x,y) = -g'(y)$, annak det $\neq 0$ felt. szerint.

Megj.: $(g^{-1})'(x) = h'(x) = [g'(h(x))]^{-1} = [g'(g^{-1}(x))]^{-1}$ (← mátrix inverz)

$$\boxed{g(g^{-1}(x)) = x}$$

Feltételes szélsőérték

1) Def.: Legyen F $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$-ből $\mathbb{R}$-be képező fv., ϕ $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$-ből $\mathbb{R}^m$-be képező fv, $\phi(a,b) = 0$, F értelmezve van (a,b) egy környezetében. Azt mondjuk, hogy F fv-nek az (a,b) pontban lokális minimuma van a „$\phi(x,y) = 0$ feltétel" mellett, ha $\exists\, \delta > 0 : x \in B_\delta(a)$, $y \in B_\delta(b)$ és $\phi(x,y) = 0 \Rightarrow F(x,y) \geq F(a,b)$.

Tfh. Φ folytonosan diffható az (a,b) pont egy környezetében, $\Phi(a,b)=0$, $\det\left[\partial_y \Phi(a,b)\right] \neq 0$, továbbá tfh. F $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$-ből $\mathbb{R}$-be képező fv. folyt. diffh. (a,b) egy környezetében, F-nek lokális sz.é.-e van a $\Phi(x,y)=0$ feltétel mellett. Milyen szükséges felt. adódik?

→ Az implicit fv. diff.-ról szóló tétel szerint $\exists B_{\delta_1}(a)$, $B_{\delta_2}(b)$ és $f: B_{\delta_1}(a) \to B_{\delta_2}(b)$ folyt. diffh. fv., melyre:

$$\{(x,y) \in B_{\delta_1}(a) \times B_{\delta_2}(b) : \Phi(x,y)=0\} = \{(x, f(x)) : x \in B_{\delta_1}(a)\}.$$

Mivel F-nek lok. sz.é.-e van (a,b)-ben a $\Phi(x,y)=0$ feltétel mellett $\Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in B_\delta(a), y \in B_\delta(b)$ és $\Phi(x,y)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ pl. $F(x,y) \geq F(a,b)$ (min.)

→ $\delta_3 := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta\}$, $x \in B_{\delta_3}(a)$ esetén $f(x) \in B_{\delta_3}(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x, f(x)) \geq F(a, f(a))$. Ez azt jelenti, hogy a $g(x) := F(x, f(x))$ képlettel értelmezett fv-nek lok. min.-a van az 'a' helyen: $g(x) \geq g(a)$. $\Rightarrow g$ diffh. 'a'-ban $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = g'(a) = \partial_x F(a, \underbrace{f(a)}_{b}) + \partial_y F(a, \underbrace{f(a)}_{b}) \cdot f'(a) =$$

$$= \partial_x F(a,b) + \partial_y F(a,b) \cdot \underbrace{\left\{ -\left[\partial_y \Phi(a,b)\right]^{-1} \cdot \partial_x \Phi(a,b) \right\}}_{f'(a)} =$$

$$= \partial_x F(a,b) - \underbrace{\left\{ \partial_y F(a,b) \cdot \left[\partial_y \Phi(a,b)\right]^{-1} \right\}}_{\text{Lagrange-multipl.} \leftarrow \lambda} \cdot \partial_x \Phi(a,b) = (*)$$

$\lambda := -\partial_y F(a,b) \cdot [\partial_y \phi(a,b)]^{-1}$ (szám mátrix mértéke) (konstans szám ← a, b helyen)

→ <u>jelölés</u>: $G(x,y) := F(x,y) + \underbrace{\lambda \cdot \phi(x,y)}_{\text{szám (skalár)}} \Rightarrow (*) = \partial_x G(a,b) = 0$

<u>Észrevétel</u>: $\partial_x G(a,b) = 0$, $\lambda = -\partial_y F(a,b) \cdot [\partial_y \phi(a,b)]^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda \cdot \partial_y \phi(a,b) = -\partial_y F(a,b) \Leftrightarrow \partial_y G(a,b) = 0$

<u>Tétel</u>:

Tfh. F $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$-ből $\mathbb{R}$-be képező és ϕ $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$-ből $\mathbb{R}^m$-be képező fv. folyt. diffh. (a,b) egy környezetében, $\phi(a,b) = 0$, de $[\partial_y \phi(a,b)] \neq 0$. Ha F-nek (a,b)-ben lok. sz. é-e van a $\phi(x,y) = 0$ fellt. mellett. $\Rightarrow \exists \lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m)$: $G(x,y) = F(x,y) + \lambda \cdot \phi(x,y)$ képlettel értelmezett G fv-re:

$\underbrace{\partial_x G(a,b) = 0}_{n \text{ db egyenlet}}$, $\underbrace{\partial_y G(a,b) = 0}_{m \text{ db egyenlet}}$.

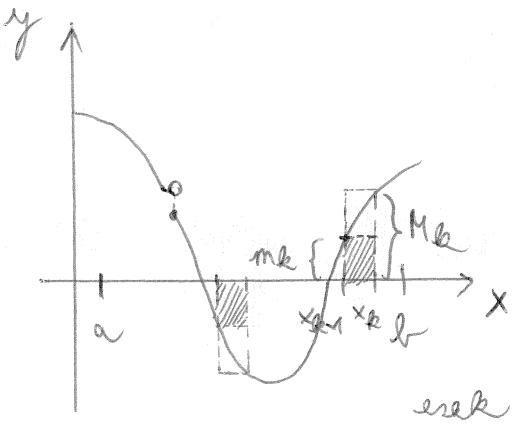
<u>Megj.</u>: (a,b)-re ~~további~~ feltétel $\underbrace{\phi(a,b) = 0}_{m \text{ db egyenlet}}$

a, b, λ $n+2m$ ismeretlen, $n+2m$ db egyenlet

Vonalintegrál

1) <u>Rövid áttekintés</u> az $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}$-be képező fv-k Riemann-int.ról.

- Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos fv. ($[a,b]$ <u>véges</u> zárt interv.)



$[a,b]$ egy felosztása:

$$x_0=a<x_1<\dots<x_{k-1}<x_k<\dots<x_m=b$$

$$\left\{\begin{aligned} m_k &:= \inf_{[x_{k-1},x_k]} f = \inf\{f(x): x\in[x_{k-1},x_k]\} \\ M_k &:= \sup_{[x_{k-1},x_k]} f = \sup\{f(x): x\in[x_{k-1},x_k]\} \end{aligned}\right.$$

ezek végesek, mivel f korlátos

- A τ felosztáshoz tartozó alsó összeg: $s(\tau):=\sum_{k=1}^{m} m_k(x_k-x_{k-1})$

  és felső összeg: $S(\tau):=\sum_{k=1}^{m} M_k(x_k-x_{k-1})$ (előjeles területek).

- Nyilvánvaló, hogy bmely τ felosztásra $s(\tau)\le S(\tau)$
- Könnyen belátható, hogy bmely τ_1,τ_2 felosztásra $s(\tau_1)\le S(\tau_2)$

$\Longrightarrow$ bmely rögzített τ_2 esetén $\forall\tau$-ra $s(\tau)\le S(\tau_2)$: az alsó összegek halmaza felülről korlátos. Hasonlóan a felső összegek halmaza alulról korlátos. $\Rightarrow$ az alsó összegek halmazának $\exists$ felső korlátja (legkisebb felső korlátja), a felső összegek halmazának lét. alsó korlátja (legnagyobb alsó korlátja).

• **Def:** Ha az alsó összegek halmazának felső határa = = a felső összegek halmazának alsó határa, akkor azt mondjuk, hogy f Riemann-int.h., a közös ~~értékét~~ nevezzük f Riemann int.-nak.

• **Pl.:** $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ rac.}, \ x \in [0,1] \\ 0, & \text{ha } x \text{ irrac.}, \ x \in [0,1] \end{cases}$

$\forall \tau$ esetén $s(\tau) = 0$ ($\forall$ tart.-on van irracionális),

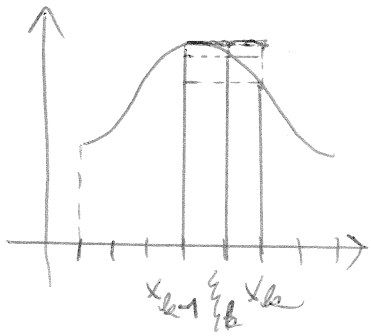
$\downarrow$ nem Riemann-integrálható $\quad S(\tau) = 1$ (—||— van racionális).

• **Def.:** Legyen $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fv., τ egy felosztás:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_m = b, \ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

$k = 1, \dots, m$. A τ felosztáshoz tartozó közelítő összeg (téglalap összeg):

$$t(\tau) := \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$



Nyilván $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$.

$\Rightarrow s(\tau) \le t(\tau) \le S(\tau)$

Tétel: Tfh. f R.-integrálható, akkor „$t(\tau)$ közelítő értékek tartanak az f fv. I R.-integráljához, miközben a felbontás minden határon túl finomítjuk":

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$; ha τ felosztás δ-nál finomabb (minden részintervallumra, ha $< \delta$) $\Rightarrow |t(\tau) - I| < \varepsilon$

<u>Megj.:</u> $S(\tau)$ és $s(\tau)$ is tart I-hez.

<u>Megj.:</u> A tétel állítása megfordítható.

- <u>Tétel:</u> jelölés: $O(\tau) = S(\tau) - s(\tau)$ (oszcillációs összeg),

$$O(\tau) = \sum_{k=1}^{m} (M_k - m_k) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

f R.-inthető $\Longleftrightarrow O(\tau) \to 0$, miközben a felbontást minden határon túl finomítjuk.

(A Riemann-integrálás 3. ekvivalens definíciója.)

- <u>Tétel:</u> Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folyt. $\Rightarrow f$ R.-inthető.

<u>Biz.:</u> Alapgondolat: $O(\tau) = \sum_{k=1}^{m} (M_k - m_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$. Mivel

f folyt., $D_f = [a,b]$ sorozatkompakt $\overset{\text{Heine-tétel}}{\Rightarrow} f$ egyenl. folyt. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ x, \tilde{x} \in [a,b], |x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$

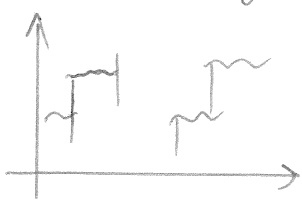
$\Rightarrow$ ha a felbontás δ-nál finomabb $\Rightarrow M_k - m_k < \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow O(\tau) \leq \sum_{k=1}^{m} \varepsilon (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon (b - a)$$

<u>Megj.:</u> Ha f „szakaszonként folytonos": $a = \alpha_0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_{k-1} < \alpha_k < \ldots < \alpha_n = b$,

f folyt. (α_{k-1}, α_k)-n és a végpontokban $\exists$ véges határértéke.

Ekkor f R.-inthető.



(Vagyis nem kell az egész $[a,b]$-on értelmezve lennie, megszámlálhatóan véges pontban lehet szakadása)

4. óra

Folytonosan differenciálható út, ill. görbe, ezek ívhossza (vonalintegrál előkészítése)

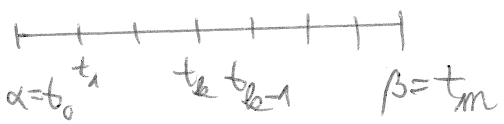
1) **Def.:** Legyen $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ folyt. diffh. fv.. Ekkor azt mondjuk, h. φ az $\mathbb{R}^n$ térben egy folytonosan diffh. utat (L) határoz meg (áthaladunk ugyanazon a ponton többször).

Megj.: t időpontban a mozgó pont a $\varphi(t)\in\mathbb{R}^n$ pontban van.

2) **Tétel:** Az L út hossza $\int_\alpha^\beta |\dot\varphi(t)|\,dt$

Biz.: Hogyan értelmezzük az L út hosszát?

$[\alpha,\beta]$-t felosztjuk véges sok részre,



a $\varphi(t_{k-1}), \varphi(t_k)$ pontokat összekötő egyenesszakaszok hosszának összegét tekintem. Ha ennek az összegnek $\exists$ h. é.-e, „miközben az $[\alpha,\beta]$ felosztásait minden határon túl finomítjuk", akkor azt nevezzük az út hosszának.

A tétel állítása szerint ez a határérték létezik, ha φ folyt. diffh..

→ A törött vonal hossza:

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\right| = \sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}\right|(t_k-t_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\varphi_j(t_k)-\varphi_j(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}\right]^2} \cdot (t_k - t_{k-1}) \overset{\text{Lagrange-k.é.t.}}{=} \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left[\dot{\varphi}_j(\tau_{jk})\right]^2} \cdot$$

τ egy közbülső pont (j-től, k-tól függ)

$$\cdot (t_k - t_{k-1})$$

mr.:

$|\dot{\varphi}(t)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} [\dot{\varphi}_j(t)]^2}$. Az lenne a jó, ha a fenti összeg helyett ilyen összeg állna:

$$\sum_{k=1}^{m} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} [\dot{\varphi}_j(\tau_k)]^2} \cdot (t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} |\dot{\varphi}(\tau_k)| (t_k - t_{k-1}),$$ mis

nem függene τ j-től

ennek határértéke, miközben a felosztást minden határon túl finomítjuk: $\int_\alpha^\beta \underbrace{|\dot{\varphi}(t)|}_{\text{folyt. fv.}} dt$. Nem nehéz belátni, hogy a kétféle összeg különbsége tart 0-hoz, miközben a „felosztást minden határon túl finomítjuk".

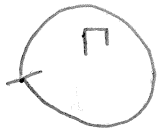
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, ha a felosztás δ-nál finomabb $\Rightarrow$ a két összeg eltérése $< \varepsilon$.

3) <u>Def.</u>: Legyen $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ folyt. diffh., <u>injektív</u>, továbbá $\dot{\varphi}(t) \neq 0 \ \forall t$. Ekkor azt mondjuk, hogy φ egy <u>egyszerű</u> folytonosan diffh. L utat határoz meg (nem megyek át ugyanazon a ponton többször). Ekkor az R_φ értékkészletet

kivéve: $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ lehet

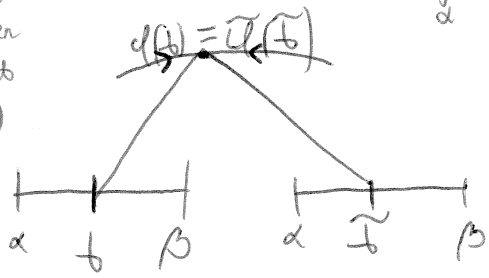
($\mathbb{R}^n$-beli) egyszerű folyt. diffh. görbének nevezzük.

$\Gamma := R_\varphi \subset \mathbb{R}^n$. Egyetlen kivétel: $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ lehetséges egyszerű zárt folyt. diffh. út illetve görbe.



4) Tétel: Legyen $\varphi, \tilde{\varphi} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ olyan folyt. diffh. fv-k, amelyek egyszerű folyt. diffh. utat határoznak meg, $R_\varphi = R_{\tilde{\varphi}}$. Ekkor a φ és $\tilde{\varphi}$ által meghat. út hossza megegyezik: $\int_\alpha^\beta |\dot{\varphi}(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta |\dot{\tilde{\varphi}}(\tilde{t})|\,d\tilde{t}$ („paraméterezés").

(ugyanahhoz a pontho[illegible] nem lehetünk ugyanaz az érték tartozik, de összességben az értékkészlet megegyezik)



A közös értéket nevezzük az egyszerű folyt. diffh. görbe ívhosszának.

(nem lényeges, merre megyünk végig

pl. $\tilde{\varphi}(\beta)=\varphi(\alpha)$ ← a görbén)
$\tilde{\varphi}(\alpha)=\varphi(\beta)$

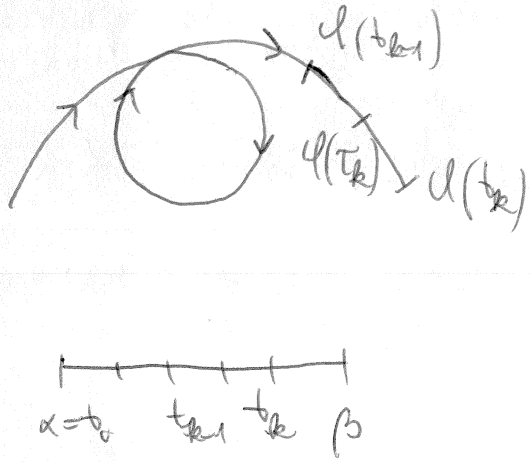
A vonalintegrál kül. típusainak definíciója, kiszámítása

I.

1) Def.: Legyen $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ folyt. diffh., $\Gamma := R_\varphi$, (nem kell egyszerűség)

$f : \Gamma \to \mathbb{R}$ folyt. fv.

Tekintsük az $[\alpha,\beta]$ intv. egy véges felosztását, egy $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $\sum_{k=1}^{m} f(\varphi(\tau_k)) \cdot [\varphi_j(t_k) - \varphi_j(t_{k-1})]$.



Ha ennek az összegnek $\exists$ véges h.é.-e, „miközben az $[\alpha,\beta]$ felosztást $\forall$ határon túl finomítjuk", akkor ezt ner. az f fv.-nek az L <u>íven vett</u> x_j (<u>j-edik szám szerinti</u>) <u>vonalintegráljának</u>, jell.: $\int_L f(x)\,dx_j$.

<u>Áll.:</u> A fenti feltételek mellett a limesz $\exists$,

$$\int_L f(x)\,dx_j = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\dot{\varphi}_j(t)\,dt .$$

<u>Biz.:</u>

$$\sum_{k=1}^{m} f(\varphi(\tau_k))\cdot\left[\varphi_j(t_k)-\varphi_j(t_{k-1})\right] = \sum_{k=1}^{m} f(\varphi(\tau_k))\cdot\frac{\varphi_j(t_k)-\varphi_j(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}\cdot(t_k-t_{k-1}) \overset{\text{Lagr.-k.é.t.}}{=} \sum_{k=1}^{m} f(\varphi(\tau_k))\cdot\dot{\varphi}_j(\tau_k^*)\cdot(t_k-t_{k-1})$$

Ha ehelyett $\sum_{k=1}^{m} f(\varphi(\tau_k))\cdot\dot{\varphi}_j(\tau_k)\cdot(t_k-t_{k-1})$ lenne, akkor a limesz létezik, mégpedig $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\dot{\varphi}_j(t)\cdot dt$.

Belátható, hogy a 2 összeg különbsége $\to 0$, miközben a felosztást $\forall$ határon túl finomítjuk

2) <u>II. Def.:</u> Legyen $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ folyt. diffh., ez meghat. L folyt. diffh. utat, $\Gamma := R_\varphi \subset \mathbb{R}^n$, $g:\Gamma\to\mathbb{R}^n$ folyt. fv.

Tekintsük a köv. összeget:

$$\sum_{k=1}^{m} \langle \underbrace{g(\varphi(\tau_k))}_{\in \mathbb{R}^n}, \underbrace{\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})}_{\in \mathbb{R}^n} \rangle$$ Ha ennek $\exists$ a.h.é.,

miközben a felosztás $\forall$ határon túl fin., akkor ezt a

g fv. nek az L íven vett <u>vonalintegráljának</u> nev.,

jel.: $\int_L g(x)\,dx$

<u>Áll.:</u> $$\int_L g(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \langle \underbrace{g(\varphi(t))}_{\in \mathbb{R}^n}, \underbrace{\dot{\varphi}(t)}_{\in \mathbb{R}^n} \rangle\,dt = \sum_{j=1}^{n} \int_\alpha^\beta g_j(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}_j(t)\,dt =$$

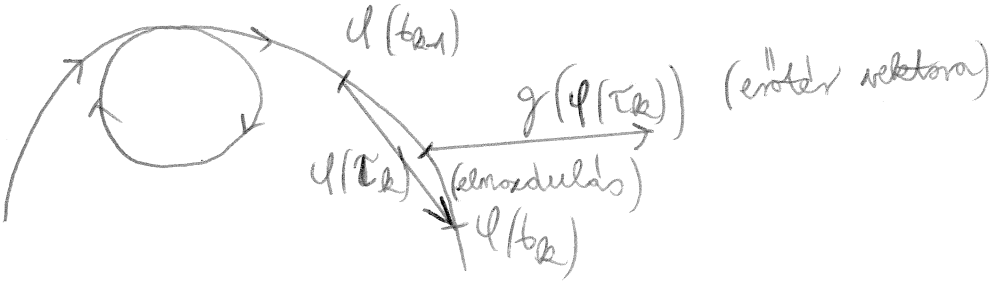
visszavezettük az előző ~~ál~~ állítás

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_L g_j(x)\,dx_j$$

<u>Biz.:</u> Visszavez. az előző állítás: $$\sum_{k=1}^{m} \langle g(\varphi(\tau_k)), \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} g_j(\varphi(\tau_k)) \cdot \left[\varphi_j(t_k) - \varphi_j(t_{k-1}) \right] \right] = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{m} g_j(\varphi(\tau_k)) \left[\varphi_j(t_k) - \varphi_j(t_{k-1}) \right] \right\} \to$$

$$\to \sum_{j=1}^{m} \int_\alpha^\beta g_j(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}_j(t)\,dt$$



<u>Megj.:</u> $\langle g(\varphi(\tau_k)), \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \rangle$ erőtér munkája, miközben $\varphi(t_{k-1})$ pontból $\varphi(t_k)$ pontba jutunk.

3) <u>III. def.:</u> Legyen $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ folyt. diffh. fv, $\Gamma:=R_\varphi\in\mathbb{R}^n$, $f:\Gamma\to\mathbb{R}$ folyt. fv. Tekintsük a:

$$\sum_{k=1}^{m} f(\varphi(\tau_k))\,|\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})| \to ?$$ (létezik-e a lim?).

Ha $\exists$ a lim., akkor azt nev. az f fv. „<u>ívhossz szerinti</u>" <u>vonalintegráljának</u>, jel. $\int_L f\,ds$.

<u>Áll.:</u> $\int_L f(\varphi(t))\cdot|\dot\varphi(t)|\,dt$

4) <u>Megjegyzés:</u> Ha speciálisan L <u>egyszerű</u> folyt. diffh. út, akkor $\Gamma:=R_\varphi$ egyszerű folyt. diffh. görbe, az L úton vett vonalintegrálok függetlenek a φ választásától, ha $R_\varphi=\Gamma$ azonos, $\varphi(\alpha)$ és $\varphi(\beta)$ azonos (a Γ görbére vett vonalint. független a paraméterezéstől): $\int_\Gamma f(x)\,dx:=\int_L f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta\langle f(\varphi(t)),\dot\varphi(t)\rangle\,dt$

5) <u>Def.:</u> Tfh. $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ folyt., $\dot\varphi$ „szakaszonként folytonos", azaz $\dot\varphi$ $\exists$ és folyt. $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_\ell\in(\alpha,\beta)$ pontok kivételével, ezekben a pontokban $\dot\varphi$-nak $\exists$ véges jobb- és baloldali határértéke.

Ekkor azt mondjuk, hogy φ „<u>szakaszonként folyt.-an diffh.</u>" <u>utat</u> (L) határoz meg (véges sok pontban ugrása lehet a deriváltnak).

<u>Megj.:</u> Az ilyen L útra (egysz. görbére) az előbbi def.-k, ill. állítások kiterjeszthetők (szakasz. $\int$).

A vonalintegrálok alaptulajdonságai

1) Legyen $\varphi: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$, L szakasz. folyt. diffh. ívt, $\Gamma := R_\varphi$,

$f_1, f_2: \Gamma \to \mathbb{R}^n$ folyt., $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\int_L [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]\, dx = \lambda_1 \int_L f_1(x)\, dx + \lambda_2 \int_L f_2(x)\, dx .$$

(Has. áll. érvényes a másik két vonalint. típusra is.)

2) $\varphi_1: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2: [\beta,\gamma] \to \mathbb{R}^n$ szak. folyt. diffh., $\varphi(t) := \begin{cases} \varphi_1(t), & t \in [\alpha,\beta] \\ \varphi_2(t), & t \in [\beta,\gamma] \end{cases}$

(L_1 ívt) $\varphi_1(\beta) = \varphi_2(\beta)$ (L_2 ívt) (L ívt)

$\Gamma := R_\varphi$

$f: \Gamma \to \mathbb{R}^n$ folyt., akkor:

$$\int_L f(x)\, dx = \int_{L_1} f(x)\, dx + \int_{L_2} f(x)\, dx .$$

(Has. áll. igaz a másik két típusra. Fordítva paraméterezve az $\int$ előjelet vált.)

3) Legyen $\varphi: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ $(\alpha<\beta)$, L szak. folyt. diffh. ívt. $\Gamma := R_\varphi$. Ha

$f: \Gamma \to \mathbb{R}^n$, $\left|\int_L f(x)\, dx\right| = \left|\int_\alpha^\beta \langle f(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle\, dt\right| \le \int_\alpha^\beta |\langle f(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle|\, dt \le$

$$\le \int_\alpha^\beta \underbrace{|f(\varphi(t))|}_{\le \sup_\Gamma |f|} \cdot |\dot\varphi(t)|\, dt < \sup_\Gamma |f| \cdot \int_\alpha^\beta |\dot\varphi(t)|\, dt = L \text{ ívhossza} \cdot \sup_\Gamma |f|$$

- Hasonlóan $h: \Gamma \to \mathbb{R}$ fv-re:

$$\left|\int_L h(x)\, dx_j\right| \le L \text{ ívhossza} \cdot \sup_\Gamma |h|$$

- $\left| \int_L h \, ds \right| \leq L$ ívhossza $\sup_{\Gamma} |h|$

A fenti tul.-ok értelemszerűen átvihetők az egyszerű szak. folytonosan diffh. görbéken vett vonalintegrálokra.

A (vektorértékű) fv-k vonalintegráljának az úttól való függetlensége

1) Kérdés: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tart. (nyílt és összefüggő halmaz), $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ folyt. fv., $a, b \in \Omega$. A két pontot összekötjük egy (szak.) folyt. diffh. úttal (ill. egyszerű görbével) Ω-ban. Milyen felt.-k teljesülése esetén igaz, hogy az integrál értéke csak az 'a' és 'b' ponttól függ?

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{L_{a,b}} f(x)\,dx$$

($\varphi: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ szak. folyt. diffh., $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $\varphi(t) \in \Omega \to$ ezt nevezzük $L_{a,b}$-nek)

2) Def.: Legyen $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ folyt. fv., tfh. $\exists\, \phi: \Omega \to \mathbb{R}$ folyt. diffh. fv., hogy $\phi' = f$, azaz: $\partial_j \phi = f_j$ Ω-n. Ekkor a ϕ-t az f fv. primitív fv.-nek nev.

Tétel: Tfh. $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ folyt. és $f = \phi'$ (ahol $\phi: \Omega \to \mathbb{R}$ folyt. diffh.).

Ekkor $\int_a^b f(x)\,dx$ értéke az 'a' és 'b' pontokat összekötő, Ω-n haladó szak. folyt. diffh. utak esetében csak a kezdő- és végpontoktól függ.

<u>Biz.:</u> $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ folyt. diffh., $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi(t)\in\Omega$.

$$\underline{\underline{\int_a^b f(x)\,dx}} = \int_{L_{a,b}} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \langle f(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle\,dt = \int_\alpha^\beta \sum_{j=1}^n f_j(\varphi(t))\cdot\dot\varphi_j(t)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \underbrace{\sum_{j=1}^n \Phi'_j(\varphi(t))\,\dot\varphi_j(t)}_{\langle \Phi'(\varphi(t)),\,\dot\varphi(t)\rangle}\,dt = \int_\alpha^\beta (\Phi\circ\varphi)'(t)\,dt \overset{\text{Newton-Leibniz}}{=} (\Phi\circ\varphi)(\beta)-(\Phi\circ\varphi)(\alpha) =$$

$$= \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \underline{\underline{\Phi(b)-\Phi(a)}}$$

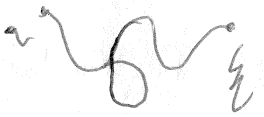
<u>Tétel:</u> Tfh. $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ folyt., $\int_a^b f(x)\,dx$ csak a kezdő- és végpontoktól függ $\Rightarrow$ f-nek $\exists$ prim fv.-e (a megfordítás is igaz).

<u>5. óra</u>

0) <u>Tsm:</u>

$\int f(x)\,dx$, ha f folyt. fv., Φ a prim fv.-e: (Φ $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}$-be képez) $\Phi' = f \Rightarrow \partial_j \Phi = f_j \quad \forall j$

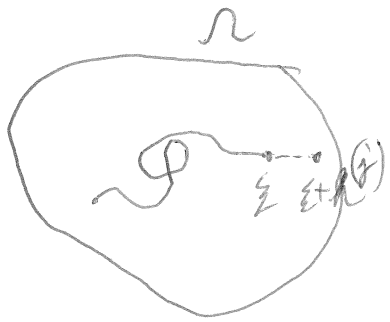
1) <u>Áll.:</u> Tfh. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány (nyílt és összefüggő), $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ folyt. Továbbá $\int_L f(x)\,dx$, $\forall$ Ω-ban haladó L út esetén csak az L kezdő- és végpontjától függ $\Rightarrow$ értelmezve $F(\xi) := \int_a^\xi f(x)\,dx$ fv.-re $F'(\xi) = f(\xi)$



($\Rightarrow$ $\exists$ f-nek primitív fv-e)

<u>Biz.:</u> Legyen L Ω-ban haladó olyan szakaszonként folyt. diffh. út, amelynek kezdőpontja valamely rögzített $a \in \Omega$, végpontja $\xi \in \Omega$, azaz $\varphi: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ szak. folyt. diffh.), $\varphi(t) \in \Omega$ $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = \xi$, tekintsük $F(\xi) := \int_L f(x)\,dx = \int_a^\xi f(x)\,dx$. Belátjuk, hogy F-nek a j-edik vált. szerinti, azaz a ξ_j szerinti parc. deriv. létezik, és $= f_j(\xi)$. (Ekkor a parc. der.-ak $\exists$-nek és folytonosak $\Rightarrow$ differenciálható a fv.). $h^{(j)} := (0, \dots, 0, \overset{j}{h}, 0, \dots, 0)$ $h \in \{\mathbb{R} \setminus 0\}$

$$\frac{F(\xi + h^{(j)}) - F(\xi)}{h} = \partial_j F(\xi)$$



ξ-t és $(\xi + h^{(j)})$-t egyenes szakasszal kössük össze ($\xi + h^{(j)} \in \Omega$, mert $h^{(j)}$ pici)

$$\psi(t) := \begin{cases} \varphi(t), & \alpha \le t \le \beta \\ (\xi_1, \dots \xi_{j-1}, \xi_j + (t-\beta), \xi_{j+1}, \dots \xi_n) & \beta \le t \le \beta + h \end{cases}$$

$\downarrow$

(ez az egyenes szakasszal bővített görbe íja k)

ψ meghatároz egy szak. folyt. diff. utat

a vonalint. tulajdonságai miatt

$$\frac{F(\xi + h^{(j)}) - F(\xi)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{\xi + h^{(j)}} f(x)\,dx - \int_a^{\xi} f(x)\,dx\right] = \frac{1}{h}\int_{\xi}^{\xi + h^{(j)}} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h} \langle f(\psi(t)), \underbrace{\psi'(t)}_{\substack{\text{(a j. koord. 1,} \\ \text{egyébként 0)}}} \rangle\,dt = \frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h} f_j(\xi_1, \dots \xi_{j-1}, \xi_j + t - \beta, \xi_{j+1}, \dots \xi_n) =$$

$(0, 0, 0, \dots 0, 1, 0, \dots 0)$ $\quad (\beta < \tau < \beta + h)$

$$= f_j(\xi_1, \dots \xi_j, \underbrace{\xi_j + \tau - \beta}_{\to \xi_j \text{ (ha } \tau \to \beta)}, \xi_{j+1}, \dots \xi_n) \to f_j(\xi) \quad \text{ha } h \to 0$$

<u>Tehát</u>:

$\partial_j F(\xi) = f_j(\xi) \Rightarrow$ Mivel f folytonos $\Rightarrow$ F folyt.-an deriválható, F „totálisan" is diff.!"

= az „előző" 2 tétel összefoglalása

<u>Tétel</u> Tfh $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ folyt fv., az $\int_L f(x)\,dx$ vonalintegrál csak az Ω-ban haladó „szakaszos" és végpontjától függ

$\Updownarrow$

f-nek létezik prim fv., azaz $\exists \Phi: \Omega \to \mathbb{R}: \Phi' = f$

Megj. Ha ϕ f-nek primitív fv-e $\Rightarrow$ $\phi + c$ is prim. fv (c = áll-ra)

2) Áll.: Legyen $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ folyt. fv., $\phi' = f$ (ϕ f-nek egy prim. fv-e). Ekkor $\boxed{\phi - F = \text{áll}}$, ahol $F(\xi) := \int_a^\xi f(x)\,dx$

Biz.: Mivel: $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx = \int_a^\xi \phi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \langle \phi'(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle \overset{\text{ltz}}{=}$

$\varphi: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(\alpha) := a$, $\varphi(\beta) = \xi$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\left[\phi(\varphi(t))\right] dt = \phi(\varphi(\beta)) - \phi(\varphi(\alpha)) = \phi(\xi) - \phi(a)$$

(a primitív fv. konstans erejéig egyértelmű)

3) Tétel.: $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ folyt. diffh., azaz $\forall j$-re, f_j fv-k első parc. deriv. lét.-nek és folytonosak. Továbbá tfh. f-nek van prim fv.-e $\exists\, \phi: \Omega \to \mathbb{R} : \phi' = f$, azaz $\partial_j \phi = f_j$. Mivel f_j egyszer folyt. diffh.!

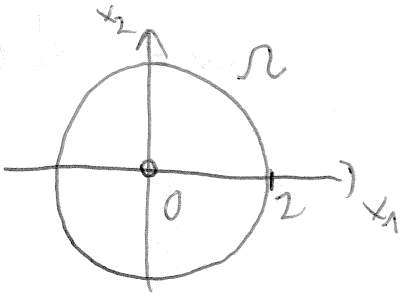
$\partial_k f_j = \partial_k(\partial_j \phi) = \partial_k \partial_j \phi$. Másrészt $\partial_j f_k = \partial_j(\partial_k \phi) = \partial_j \partial_k \phi$. A $\partial_j \partial_k \phi$ és $\partial_k \partial_j \phi$ parc. d.-ok folytonosak Ω-n $\Rightarrow$ Young-tétel:

$$\partial_j \partial_k \phi = \partial_k \partial_j \phi$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{\partial_j f_k = \partial_k f_j}$$

a) Áll.: Ha $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonosan diffható és f-nek van prim fv.-e $\Rightarrow \partial_j f_k = \partial_k f_j \quad \forall j,k$.

b) Kérdés: A feltétel (fentiek) elegendő-e ~~ét.~~ ét.-ban?

Pl.: $\Omega := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |\underline{x}| < 2\}$ (ez is összefüggő, csak csúnya, mert 0-ban nincs ét.-ve),



$f = (f_1, f_2)$

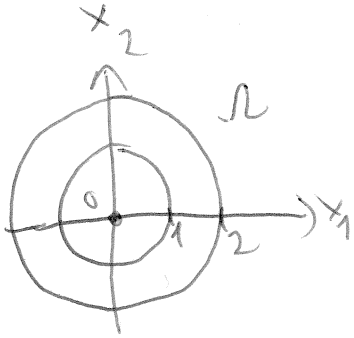
$$f_1(x_1,x_2) := \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2} \qquad x \neq 0$$

$$\partial_2 f_1(x_1x_2) = \frac{-(x_1^2+x_2^2)+2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$$

$$f_2(x_1,x_2) := \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}$$

$$\partial_1 f_2(x_1,x_2) = \frac{(x_1^2+x_2^2)-2x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$$

$\Rightarrow \partial_2 f_1 = \partial_1 f_2$ DE



Vegyük az egységsugarú körvonalra vett integrált. Ennek 0-nak kéne lennie, ha csak a végpontoktól függ az integrál. L zárt ~~szak~~ folyt. diffh. út,

$\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Belátjuk, hogy $\int_L f(x)\,dx \neq 0$, mis. $\int_L f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \langle f(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle\,dt =$

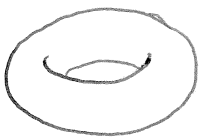
$$= \int_0^{2\pi} \left[f_1(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}_1(t) + f_2(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}_2(t) \right] dt = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos t \cdot \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right] dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi \neq 0$$

c) <u>Definíció</u>: Egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ~~tartomány~~ (nyílt és összefüggő halmaz) <u>egyszerűen összefüggőnek</u> nevezem, ha tetsz. Ω-ban haladó <u>zárt</u> szak. folyt. diffh. út (~~vagy~~ görbe) „folytonos" magatással" ponttá lehet zsugorítani úgy, hogy végig a tartományban maradjak.

paraméterezés

(Más dim.-ban pl. vagy a fenti eset

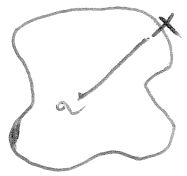


torusz → nem egysz. ö.f.)

d) <u>Tétel</u>: Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egyszerűen ö.f. tartomány, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ folyt. diffh.. Ha $\partial_j f_k = \partial_k f_j$ Ω-ban $\forall j, k \Rightarrow$

$\Rightarrow f$-nek $\exists$ prim fv.-e ($\Longleftrightarrow \int_L f(x)\,dx$ csak L kezdő és végpontjától függ)

<u>Spec. eset</u>: <u>Def</u>: Az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ~~tartomány~~ <u>csillagszerűnek</u> nev., ha $\exists\, a \in \Omega : \forall x \in \Omega$ esetén az a és x pontokat összekötő egyenes szakasz $\subset \Omega$.



<u>Megj.</u>: Ekkor Ω egysz. ö.f.. A fenti tétel biz.-t ezen a spec. eset. végezzük el.

– Rövid kitérő: paraméteres integrálok

• Jelölés (def.): Legyen $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ (téglalap) (legalább) folyt. fv. Tekintsük: $g(x):=\int_c^d f(x,y)\,dy$ $(x\in[a,b])$

Ezt paraméteres integrálnak nevezzük.

• Tétel: Ha f folyt. $\Rightarrow$ g is folyt. $[a,b]$-n.

• Biz.: Legyen $x_0\in[a,b]$ tetsz. rögz. pont. Belátjuk, hogy g folyt. x_0-ban. $|g(x)-g(x_0)|=\left|\int_c^d f(x,y)\,dy-\int_c^d f(x_0,y)\,dy\right|=$

$$=\left|\int_c^d [f(x,y)-f(x_0,y)]\,dy\right|\le\int_c^d |f(x,y)-f(x_0,y)|\,dy$$

f Heine-tétele miatt egyenletesen folytonos $[a,b]\times[c,d]$.

D_f unis. korlátos és zárt $\Rightarrow$ sorozatkompakt (véges dim.)

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ (csak ε-tól függ): $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$, ha $|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|<\delta$. $\Rightarrow \int_c^d \underbrace{|f(x,y)-f(x_0,y)|}_{<\varepsilon,\ \text{ha } |x-x_0|<\delta}\,dy<\varepsilon(d-c)$,

ha $|x-x_0|<\delta$

• Tétel: Ha $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ folyt., $\exists\partial_1 f$ $(a,b)\times(c,d)$-n, és létezik folyt. kiterjesztése $[a,b]\times[c,d]$-n. Ekkor g folyt. diffh. $[a,b]$-n, mégpedig $g'(x)=\int_c^d \partial_1 f(x,y)\,dy$

Biz.: Legyen $x, x_0 \in (a,b)$ $x \neq x_0$ $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left[\int_c^d f(x,y)\,dy - \int_c^d f(x_0,y)\,dy\right] = \int_c^d \frac{f(x,y)-f(x_0,y)}{x-x_0}\,dy$.

Lagr. közt. $\Rightarrow \exists\, \xi_{x,y}$: $\int_c^d \partial_1 f(\xi_{x,y}, y)\,dy$,

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - \int_c^d \partial_1 f(x,y)\,dy\right| = \left|\int_c^d \left[\partial_1 f(\xi_{x,y},y) - \partial_1 f(x,y)\right] dy\right| \leq$$

$\partial_1 f$ is egyenletesen folyt. $[a,b]\times[c,d]$

$$\leq \int_c^d |\partial_1 f(\xi_{x,y},y) - \partial_1 f(x,y)|\,dy < \varepsilon(d-c), \text{ ha } |x-x_0|<\delta$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \int_c^d \partial_1 f(x,y)\,dy$$

(A deriválás $\int$-ba való bevitelhez nem elég a folytonosság, még paraméteres esetben sem. kell a deriált folyt. kiterjesztő hetősége is a határokra)

bizonyítás vége

3/d) Tétel: Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ csillagszerű tartomány, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ folyt. diffh., $\partial_j f_k = \partial_k f_j$ Ω-n $\forall j,k$. Akkor f-nek van primitív fv-e.

(2. eset folyt.-a)

Biz.: Ω csillagszerű tart., egyszerűség kedvéért tfh. $a=0$ ("csillagközéppont"). Legyen $\xi \in \Omega$ tetsz., $L_{0,\xi} := \{t\xi : t\in[0,1]\}$,

Legyen $F(\xi) = \int_{L_{0,\xi}} f(x)\,dx$. $\varphi(t) = t\cdot\xi$, $\dot\varphi(t) = \xi$. $\varphi(t)\in\Omega$, mivel Ω csill.szerű

(a potenciált a 0-hoz viszonyítjuk)

Belátjuk, hogy $F' = f$, más szóval $\partial_j F(\xi) = f_j(\xi)$

(ez most nem általános, csak ezt a konkrét egyenest nézzük)

$$F(\xi) = \int_{L_{0,\xi}} f(x)\,dx = \int_0^1 \langle f(\varphi(t)), \dot\varphi(t)\rangle\,dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^n f_k(\varphi(t))\cdot \underbrace{\dot\varphi_k(t)}_{\xi_k}\,dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^n f_k(t\xi)\cdot \xi_k\,dt \qquad (\text{„n db paraméteres } \int\text{"})$$

$$\partial_j F(\xi) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \partial_{\xi_j}\left[f_k(t\cdot\xi)\,\xi_k\right]dt = (*)$$

bederiválunk

konst. ∂_j szemp.-ből

$\to k \neq j$: $\partial_{\xi_j}\left[f_k(t\cdot\xi)\cdot\xi_k\right] = \partial_j f_k(t\cdot\xi)\cdot t\cdot \xi_k$

$\to k = j$: $\partial_{\xi_j} = \partial_{\xi_k}$: $\partial_{\xi_k}\left[f_k(t\cdot\xi)\,\xi_k\right] = \partial_j f_k(t\cdot\xi)\cdot t\cdot \xi_k + f_k(t\cdot\xi)$

$$(*) = \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n \overbrace{\partial_j f_k}^{=\partial_k f_j}(t\cdot\xi)\cdot t\cdot\xi_k + f_j(t\cdot\xi)\right]dt = \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n \partial_k f_j(t\cdot\xi)\cdot t\cdot\xi_k + f_j(t\cdot\xi)\right]dt =$$

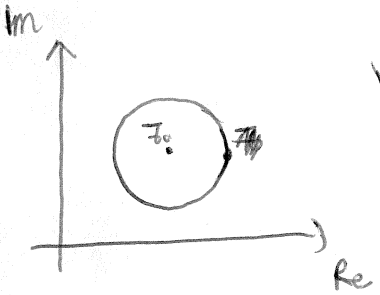
jelölés: $g_j(t) := f_j(t\cdot\xi)\cdot t$, $\dot g_j(t) = \sum_{k=1}^n \partial_k f_j(t\xi)\cdot\xi_k\cdot t + f_j(t\cdot\xi)\cdot 1$ ($\dot g_j = \frac{\partial g_j}{\partial t}$)

$$= \int_0^1 \dot g_j(t)\,dt = g_j(1) - g_j(0) = f_j(\xi) - 0 = f_j(\xi)$$

$\partial_j F(\xi) = f_j(\xi)$ speciálisan ~~ezt az egyenest~~ csillagozott tart.-ra

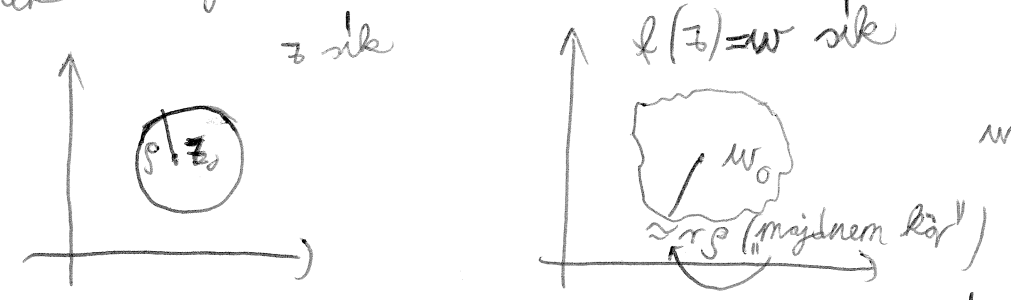
Komplex fv.-tan

1) <u>Def.:</u> Legyen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ képező fv. ($\mathbb{C}$: komplex sík).
Tfh. f értelmezve van egy $z_0 \in \mathbb{C}$ pont egy környezetében.



Azt mondjuk, hogy f diffható a z_0 pontban, ha $\exists$ és véges $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} := f'(z_0)$.
def. szerint

Ennek a geometriai jelentése:



$w_0 = f(z_0)$

Mi lesz egy z_0 körüli „kis" ρ sugár kör képe?

$$f'(z_0) = \underbrace{r}_{\text{abszolútértékek}} \cdot \overbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}^{\text{argumentum}} \qquad \text{Tfh. } f'(z_0) \neq 0 \quad (r>0)$$

$\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Ezért ha z közel van z_0-hoz:

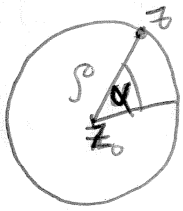
$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \approx r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \approx r$$

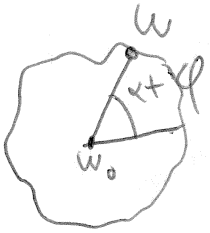
$$\Rightarrow |f(z)-f(z_0)| \approx r\underbrace{|z-z_0|}_{=\rho} = r\rho \quad (r = \text{áll adott } z_0\text{-ra})$$

$f'(z_0) \neq 0$ esetén a leképezés „lineszben körtartó".

Továbbá $\arg \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \approx \varphi$

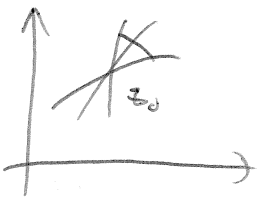
$$\arg\left[f(z)-f(z_0)\right] - \arg(z-z_0) = \varphi \quad \text{(áll.)}$$

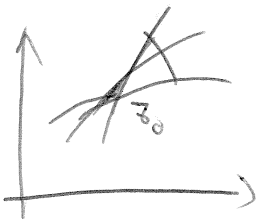




$\approx \varphi$ szöggel való elforgatás

6. óra



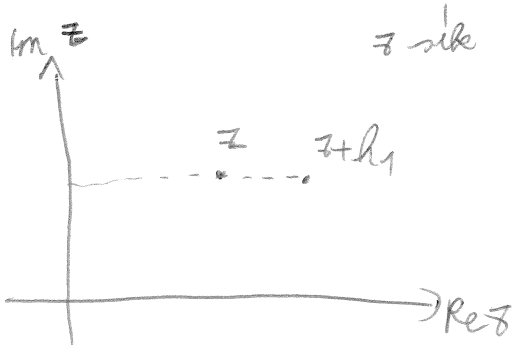


Összefoglalva: ha f diffh. z_0-ban és $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow f$ leképezés „lineáris kőtartó" és szögtartó (konform).

Cauchy-Riemann egyenletek

Tfh. g $\mathbb{C}$-ből $\mathbb{C}$-be képező fv. diffh. z pontban. Ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(z+h)-g(z)}{h} = g'(z)$. $h = h_1 + ih_2$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, $g(z) = \overbrace{g_1(z)}^{\in\mathbb{R}} + i\overbrace{g_2(z)}^{\in\mathbb{R}}$.

~~(Első eset: $h = h_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)~~



$\mathbb{C} \ni z = (x_1 + ix_2) \leftrightarrow (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (megfeleltethetők)

z sík

jelölés: ~~$\widetilde{g}(x_1,x_2) := g(x_1+ix_2) = g(z)$~~

$\widetilde{g_1}(x_1,x_2) := g_1(x_1+ix_2)$

$$\tilde{g}_2(x_1,x_2) = g_2(x_1 + i x_2)$$

$$\tilde{g}(x_1,x_2) := (\tilde{g}_1(x_1,x_2), \tilde{g}_2(x_1,x_2))$$

$\Downarrow$

$\tilde{g}$ $\mathbb{R}^2$-ből $\mathbb{R}^2$-be képező ~~fv~~ fv.

- Első eset: $h = h_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$g'(z) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{g(z+h_1) - g(z)}{h_1} \Rightarrow \frac{g(z+h_1) - g(z)}{h_1} = \frac{\tilde{g}_1(x_1+h_1, x_2) - \tilde{g}_1(x_1,x_2)}{h_1} +$$

$$+ i \frac{\tilde{g}_2(x_1+h_1, x_2) - \tilde{g}_2(x_1,x_2)}{h_1} \xrightarrow[0]{h_1} \partial_1 \tilde{g}_1(x_1,x_2) + i\, \partial_1 \tilde{g}_2(x_1,x_2) = g'(z)$$

- Második eset: $h = i h_2$, $h_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$g'(z) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{g(z+ih_2) - g(z)}{ih_2} \Rightarrow \frac{g(z+ih_2) - g(z)}{ih_2} = \frac{\tilde{g}_1(x_1, x_2+h) - \tilde{g}_1(x_1,x_2)}{ih_2} +$$

$$+ \frac{\cancel{i}\, \tilde{g}_2(x_1, x_2+h_2) - \tilde{g}_2(x_1,x_2)}{\cancel{i} h_2} \xrightarrow[0]{h_2} \partial_2 \tilde{g}_2(x_1,x_2) - i\, \partial_2 \tilde{g}_1(x_1,x_2) = g'(z)$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\partial_1 \tilde{g}_1(x_1,x_2) = \partial_2 \tilde{g}_2(x_1,x_2)}, \quad \boxed{\partial_1 \tilde{g}_2(x_1,x_2) = -\partial_2 \tilde{g}_1(x_1,x_2)}$$

<u>Tétel</u>: Ha g diffhető $z = (x_1 + i x_2)$ pontban, akkor (x_1,x_2)-ben ~~telj.~~ a pontok a C.-R. ~~egyenletek~~.

$\Downarrow$

(a komplexbeli ~~diffhatóság~~ szigorúbb megkötés)

Cauchy-alaptétel

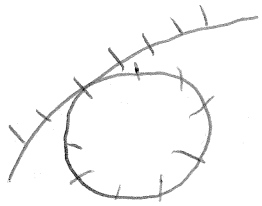
1) **Def.**

Legyen $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ szakaszonként folyt. diffh. $\varphi(t) = \underbrace{\varphi_1(t)}_{\in \mathbb{R}} + i\underbrace{\varphi_2(t)}_{\in \mathbb{R}}$.
(Ez meghat. egy szakaszonként folyt. diffh. L utat $\mathbb{C}$-ben).

$\Gamma := R_\varphi$. Legyen $g : \Gamma \to \mathbb{C}$ folyt fv., ekkor a g fv.-nek az L úton vett vonalintegrálját így értelmezzük.

$$\int_L g(z)\,dz = \int_\alpha^\beta \underbrace{g(\varphi(t))}_{\in \mathbb{C}} \cdot \underbrace{\dot{\varphi}(t)}_{\in \mathbb{C}}\,dt$$

(ez is ért. hető z-ben)



2) **Tétel: (Cauchy-alaptétel)**

Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $g : \Omega \to \mathbb{C}$ diffh. Ω $\forall$ pontjában. Ekkor a tartományban haladó szak. folyt. diffh. zárt L út esetén $\int_L g(z)\,dz = 0$.

Biz.: Fel fogjuk használni a Cauchy-Riemann-féle diff. egyenleteket. Ebben a biz.ban azt is feltesszük, hogy az egyenl.-ekben szereplő parc. deriváltak folytonosak Ω-n (nem szükséges a tételhez, de így kényelmes lesz a biz.).
A tétel visszavez. valós vonalint.-ra.

$$\int_L g(z)\,dz = \int_\alpha^\beta g(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\,dt = (*)$$

$\left(\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t) \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \psi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in \mathbb{R}^2\right)$

$g(z) = g_1(z) + i g_2(z) = \tilde{g}_1(x_1, x_2) + i\tilde{g}_2(x_1, x_2)$

$z = x_1 + i x_2$

$$(*) = \int_\alpha^\beta \Big[g_1\big(\varphi_1(t) + i\cdot\varphi_2(t)\big) + i\, g_2\big(\varphi_1(t) + i\,\varphi_2(t)\big)\Big]\cdot\Big[\dot\varphi_1(t) + i\,\dot\varphi_2(t)\Big]\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big[g_1\big(\underbrace{\varphi_1(t) + i\,\varphi_2(t)}_{\varphi(t)}\big)\cdot\dot\varphi_1(t) - g_2\big(\underbrace{\varphi_1(t) + i\cdot\varphi_2(t)}_{\varphi(t)}\big)\cdot\dot\varphi_2(t)\Big] + i\int_\alpha^\beta \Big[g_1(\varphi(t))\cdot\dot\varphi_2(t) +$$

$$+ g_2(\varphi(t))\cdot\dot\varphi_1(t)\Big]\,dt = \int_\alpha^\beta \Big[\tilde g_1(\varphi(t))\cdot\dot\varphi_1(t) - \tilde g_2(\varphi(t))\cdot\dot\varphi_2(t)\Big]\,dt +$$

$$+ i\int_\alpha^\beta \Big[\tilde g_1(\varphi(t))\,\dot\varphi_2(t) + \tilde g_2(\varphi(t))\cdot\dot\varphi_1(t)\Big]\,dt = 0$$

- Az első $\int$ esetében: $f = (f_1, f_2)$ $\mathbb{R}^2$-ből $\mathbb{R}^2$-be képező kör. fv.:

  $f_1 := \tilde g_1$, $f_2 := -\tilde g_2$. A vonalintegrál azért 0, mert folytonosak:

  $\partial_2 f_1 = \partial_1 f_2$, vis $\partial_2 f_1 = \partial_2 \tilde g_1$, $\partial_1 f_2 = -\partial_1 \tilde g_2$.

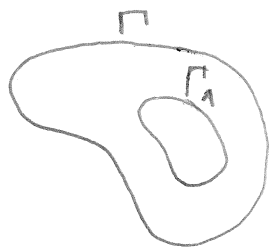
  $\Downarrow$ $\exists$ prim. fv. (C.-R.)

- A második $\int$ esetében: $f_1 := \tilde g_2$, $f_2 := \tilde g_1$ $\quad \partial_2 \tilde g_2 = \partial_1 \tilde g_1$.

  $\Downarrow$

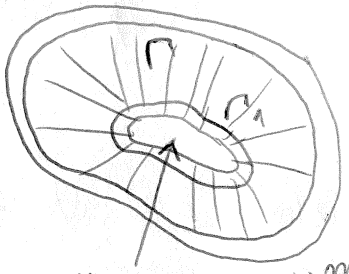
  $\partial_2 f_1 = \partial_1 f_2$

3) <u>A Cauchy-alaptétel közvetlen következményei:</u>



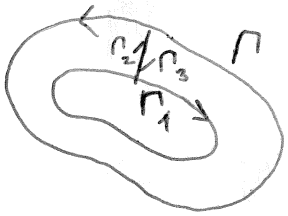
<u>Tétel</u> (Jordan) Legyen Γ egyszerű zárt szak. folyt. diffh. görbe $\mathbb{C}$-n. Ekkor a $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ két összefüggő nyílt komponensből áll, az egyik korlátos, ezt ~~nem~~ nev. a Γ belsejének, a másik nem kor., ezt nev. Γ külsejének.

– 1. <u>következmény</u>: Legyen Γ és Γ_1 egyszerű zárt szak. diffh. görbe, Γ_1 a Γ belsejében van, g diffh. egy olyan tart.-on, amely tartalmazza Γ-t, (Γ_1-et) és $\Gamma \setminus \Gamma_1$ belsejét.



itt nem kell diffhatónak lennie (lehet szingularitás)

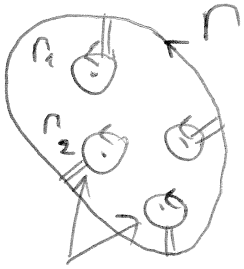
Ekkor $\int_{\Gamma} g(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} g(z)\,dz$ (ugyanabban az irányban vett integrál)



biz.: $\int_{\Gamma} f(z)\,dz + \cancel{\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz} + \cancel{\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz} - \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = 0$

határértékben kiesnek

– 2. <u>következmény</u>:



itt lehetnek szingularitások

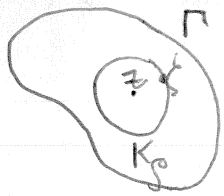
$$\int_{\Gamma} g(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \int_{\Gamma_k} g(z)\,dz$$

<u>Cauchy-féle integrálformula</u>

1) <u>Tétel</u>: Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ egyszeresen ö.f. tart., $\Gamma \subset \Omega$ egyszerű zárt szak. folyt. diffh. görbe. (Ekkor Γ belseje $\subset \Omega$). Ha $g: \Omega \to \mathbb{C}$ diffh., akkor tetsz. a Γ belsejében levő z pontra:

$$\boxed{g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta}$$

Biz.: Legyen $K_\rho := \{\zeta : |\zeta - z| = \rho\}$, ρ elég kicsi.



A Cauchy-alaptétel 1. köv.-e szerint: ehhez kell ← g diffh.-a

$$\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{K_\rho} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}$$. Másrészt:

$$\int_{K_\rho} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_0^{2\pi} \overbrace{\frac{1}{\rho\cos t + i\rho\sin t}\left(-\rho\sin t + i\rho\cos t\right)}^{i} dt = 2\pi i$$

$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ $\quad \varphi_1(t) = \rho\cos t \quad \dot\varphi_1(t) = -\rho\sin t \quad d\zeta = \overbrace{\frac{d\zeta}{dt}}^{\dot\varphi(t)} \cdot dt$

$\zeta - z := \varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t) \quad \varphi_2(t) = \rho\sin t \quad \dot\varphi_2(t) = \rho\cos t$

$$\Rightarrow g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{\overbrace{g(z)}^{\text{konst. } (\zeta\text{-tól nem függ})}}{\zeta - z}\, d\zeta \Rightarrow \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - g(z) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right|$$ Mivel g folyt. z-ben $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |g(\zeta) - g(z)| < \varepsilon$, ha $\overbrace{|\zeta - z|}^{\rho} < \delta \Rightarrow \rho < \delta$ esetén:

$$\cancel{g(z)} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \overset{|i|=1}{\leq} \frac{1}{2\pi} (K_\rho \text{ hossza}) \cdot \sup_{\zeta \in K_\rho} \left| \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cancel{2\pi}\, \cancel{\rho} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{\rho}} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - g(z) \right| < \varepsilon$$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$ ha $\rho \to 0$, márpedig akármilyen kis ρ-re igaz ez

2) Cauchy típusú integrál:

- **Def.** Legyen $\Gamma \subset \mathbb{C}$ egyszerű (nem feltétlenül zárt) szak. folyt. diffh. görbe, $g: \Gamma \to \mathbb{C}$ folyt. Ekkor:

$$G(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma,$$ ezt Cauchy-típ. $\int$-nak (z nincs rajta Γ-n) nevezzük. (Megj.: ez egy paraméteres int.)

- **Tétel:** G $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ halmazon akárhányszor diffh., mégpedig

$$G^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$$

- **Biz.:** $k=1$ eset. Az állítás szerint: $G'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$.

$$\frac{G(z+h) - G(z)}{h} = \frac{1}{h} \frac{1}{2\pi i} \left[\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z - h}\, d\zeta - \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{h}} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(\zeta) \cdot \frac{\cancel{h}}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\, d\zeta$$

Mivel Γ kom. és zárt halmaz $\mathbb{C}$-n $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \inf\{|\zeta - z| : \zeta \in \Gamma\} > 0, \quad z \notin \Gamma.$$

$h(\zeta) := |\zeta - z|$, $\zeta \in \Gamma$, h folyt. fv., ér. tart. kom. és zárt ($\Rightarrow$ sorozatkompakt). $\Rightarrow h$ felveszi az inf.-t.

$$\left| \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\, d\zeta - \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \right| = \left| \int_\Gamma \frac{h\, g(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2}\, d\zeta \right| =$$

$$= |h| \cdot \left| \int_\Gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)^2} \, d\xi \right| \leq \text{konst} \cdot |h| \to 0, \text{ ha } h \to 0.$$

(magasabb k-ra teljes indukcióval bizonyítunk)

- <u>Következmény:</u>
Ha g diffh. egy $\Omega \subset \mathbb{C}$ minden pontjában, akkor g akárhányszor diffh. Mis a C.-féle int. formula szerint: $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi$, g egy C.-típusú integrállal adható meg (Γ rögz.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ g akárhányszor diffh..

- <u>Def:</u> Ha g egy $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartomány $\forall$ pontjában diffh., akkor g-t holomorf (reguláris) fv-nek nevezzük.

<u>7. óra</u>

<u>A primitív fv. és a vonalint. kapcsolata</u>

1) <u>Tétel:</u> Tfh. g folyt. $\Omega \subset \mathbb{C}$ tart.-on és $\int_\Gamma g(z)dz$ csak a kezdő és vp.-tól függ $\Leftrightarrow$ (zárt görbére a vonalint. $=0$).
Legyen $a \in \Omega$ rögz., tekintsük a $\Phi(z) := \int_a^z g(\xi) d\xi$ fv-t.
Ekkor $\Phi'(z) = g(z)$ $\forall z \in \Omega$.

Biz: Analóg a valós analízis. esetével:

$$\frac{\Phi(z+h)-\Phi(z)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{z+h} g(\xi)\,d\xi - \int_a^{z} g(\xi)\,d\xi\right] = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} g(\xi)\,d\xi .$$

$$g(z) = g(z)\underbrace{\frac{1}{h}\int_z^{z+h} d\xi}_{1} \Rightarrow \left|\frac{\Phi(z+h)-\Phi(z)}{h} - g(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_z^{z+h}\left[g(\xi)-g(z)\right]d\xi\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\cancel{|h|}}\cancel{|h|}\cdot \sup_{\xi\in L(z,z+h)} |g(\xi)-g(z)| \to 0 \qquad (g \text{ folyt. } z\text{-ben})$$

2) Következmény: (Morera tétel) Tfh. egy $\Omega\subset\mathbb{C}$ tart.-on folyt. g fv-se az Ω-ban halaszt egysz. zárt Ω-n folyt. diffh. görbék g int $=0$ ($\Leftrightarrow$ az ~~int~~ int. csak a kezdő és végponttól függ) $\Rightarrow$ g holomorf Ω-n.

Biz.: Az előző tétel szerint $\Phi' = g$ Ω-n $\Rightarrow$ Φ holomorf $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Φ akárhányszor diffh. $\Rightarrow$ g is akárhányszor diffh.

Weierstrass tétele komplex fv-k esetén

1) Lemma: Legyen $\Gamma\subset\mathbb{C}$ (egyszerű szak. folyt. diffh. görbe) $f_k:\Gamma\to\mathbb{C}$ folyt., $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f$, a sor egyenl. konv. ($\Gamma$-n) $\Rightarrow$ ($\Rightarrow$ f is folyt.). Ekkor $\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\right)dz = \sum_{k=1}^{\infty}\int_\Gamma f_k(z)\,dz$.

(az $\int$ és a Σ felcserélhető).

Biz: Legyen $\varphi: [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ egyszerű szak. folyt. diffh., $R_\varphi = \Gamma$.

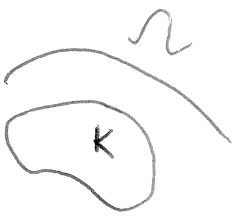
$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\dot\varphi(t)\,dt, \quad \int_\Gamma f_k(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f_k(\varphi(t))\dot\varphi(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\dot\varphi(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \left[\sum_{k=1}^\infty f_k(\varphi(t))\right]\cdot\dot\varphi(t)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \underbrace{\left[\sum_{k=1}^\infty f_k(\varphi(t))\cdot\underbrace{\dot\varphi(t)}_{\text{számmal be lehet szorzni a } \Sigma\text{-t}}\right]}_{\text{egyenlet. konvergens } [\alpha,\beta]\text{-n}}dt \overset{\text{az int. lineáris}}{=} \sum_{k=1}^\infty \left[\int_\alpha^\beta f_k(\varphi(t))\cdot\dot\varphi(t)\,dt\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \int_\Gamma f_k(z)\,dz$$

2) Weierstrass-tétel: Tfh. $f_k: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorf (azaz Ω $\forall$ pontján deriválható), továbbá $\sum_{k=1}^\infty f_k$ sor egyenl. konv., Ω $\forall$ rögz. sorozatkompakt ($\Leftrightarrow$ kom. és zárt) részhalmazán. Ekkor:



$f := \sum_{k=1}^\infty f_k$

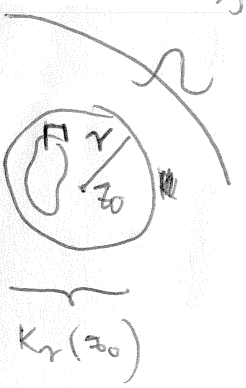
1. f is holomorf, ~~és~~ továbbá
2. $f' = \sum_{k=1}^\infty f_k'$, és
3. Az utóbbi sor is egyenl. konv. Ω $\forall$ sor. kompakt részhalmazán.

! (valós esetben ez csak akkor volt igaz, ha a deriváltak is konvergens volt)

ez most autom.-an teljesül (kép. sor)

Biz: A biz. hoz felhasz. Morera-tételét. Legyen $z_0 \in \Omega$ tetsz. rögz. pont, $\overline{K_r(z_0)} \subset \Omega$. Alk. Morera tételét a $K_r(z_0)$ körlemezen: belátjuk, hogy tetsz. egysz. záró szak. folyt. diffh. $\Gamma \subset K_r(z_0)$ görbe esetén $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \Rightarrow$

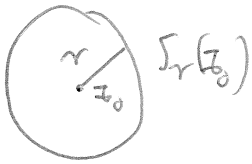
$\Rightarrow f$ holom. $K_r(z_0)$-n. Mivel $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f$ egyenl. konv. $\overline{K_r(z_0)}$-n $\Rightarrow f$ folyt. $\overline{K_r(z_0)}$-n. A lemma szerint:



$$\int_\Gamma \underbrace{f(z)}_{\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)} dz = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_\Gamma f_k(z)\, dz}_{0 \text{ (mivel } f_k \text{ hol.)}} = 0 \Rightarrow \text{(Morera-tétel)}$$

miatt) f hol. $K_r(z_0)$-n $\Rightarrow f$ hol. Ω-n

2. $\rightarrow$ A Cauchy-féle int. formula szerint: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$



$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = \qquad z \in K_r(z_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(z_0)} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r(z_0)} \frac{f_k(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(z)$$

Taylor - sorfejtés

1) Előkészítés:

Tfh. $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ (hatványsor), ennek konv. sugara $0 < R \leq \infty$. Mivel $z \mapsto c_k (z - z_0)^k$ ha. -k holomorfak (akárhol), a sor konvergens $K_R(z_0)$ kör belsejében, egyenletesen konv. $\forall$ R-nél kisebb sugarú körön (minden $K_r(z_0)$ tartományban fekvő kom. és zárt halmazon) $\Rightarrow$ (Weierstrass-tétel)

$\Rightarrow f$ holomorf $K_r(z_0)$-n, $f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot k \cdot (z-z_0)^{k-1}$, ill. -an

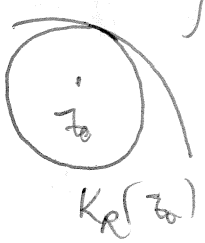
$$f^{(l)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, k(k-1)\cdots(k-l+1)\cdot (z-z_0)^{(k-l)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(l)}(z_0) = c_l \cdot l! \Rightarrow c_l = \frac{f^{(l)}(z_0)}{l!}, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

(valós esetben a Taylor-sor nem mindig állítja elő a fv.-t, de komplexnél igen)

mert f akárhányszor diffható

2) <u>Tétel</u>: Tfh. f holomorf egy $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartományon. Ekkor $\forall$ tetsz. rögz. $z_0 \in \Omega$ pont esetén:

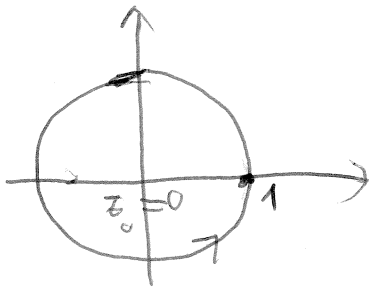


$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k, \quad z \in K_R(z_0) = \{z : |z-z_0| < R\}$$

ahol $K_R(z_0)$ maximális R sugarú, z_0 középpontú kör, amely $\subset \Omega$.

ezt tudjuk róla

Pl.: $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $|z| < 1$, egyébként a sor div.

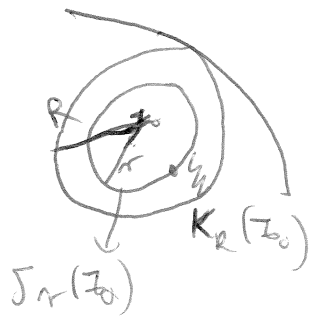


$\Downarrow$

$\forall$hol holomorf, de ez nem elég

egyenletes konvergencia is kell a sorfejtéshez

<u>Bizi</u>: Legyen $z \in K_R(z_0)$. Vál. olyan r számot, hogy: $|z-z_0| < r < R$. $S_r(z_0) := \{z : |z-z_0| = r\}$ a Cauchy integráltétel szerint $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$.



(Trükk): $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi - z_0}} =$

$\frac{1}{1-z}$ sorfejtése $\rightarrow$ $= (*)$

mert: $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{|\xi-z_0|} < 1$

$$(*) = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}$$

ha $\xi \in S_r(z_0)$, $z \in K_r(z_0)$

Rögzített z esetén a sor egyenl. konv. $\xi \in S_r(z_0)$ ξ-tól független $\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi =$

$\frac{|z-z_0|}{|\xi-z_0|} = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(z_0)} f(\xi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}\, d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(z_0)} \left[\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\, d\xi\right]}_{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}} (z-z_0)^k$$

Mivel tudjuk (l. Cauchy-tip. int. → 50. old.)

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{S_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}} \Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

3) <u>Következmény</u>

Tfh. f, g holomorf egy $\Omega \subset \mathbb{C}$ tart. on és

$\exists\ z_j \in \Omega$ $\lim_{j\to\infty} (z_j) = z_0 \in \Omega$, $f(z_j) = g(z_j) \Rightarrow f(z) = g(z)$

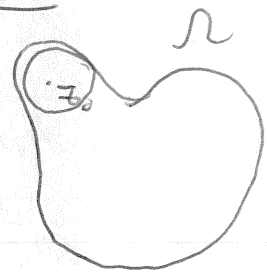
$\forall\ z \in \Omega$ $z_j \neq z_0$

<u>Spec. eset</u> $(g(z) = 0)$: Ha f kol. és $f(z_j) = 0$ $\forall j$, ~~vindex~~ $\lim(z_j) = z_0 \in \Omega \Rightarrow f(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$.

Megj. $f(z) = \sin z$ $z_j = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ $f(z_j) = \sin(k\pi) = 0$

(korlátos)

Biz.:



Legyen $K_R(z_0)$ az a max. R sugarú, z_0 középpontú kör, amelyre $K_R(z_0) \subset \Omega$.

- Először belátjuk, hogy $f(z) = g(z)$, $z \in K_R(z_0)$ ($z \neq z_0$).

Fejtsük Taylor-sorba f-t és g-t z_0 körül:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-z_0)^k, \quad z \in K_R(z_0)$$

$$z := z_j \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z_j - z_0)^k = \underset{c_0 = f(z_0)}{f(z_j)} = \underset{= g(z_0) = d_0}{g(z_j)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z_j - z_0)^k$$

ha $j \to \infty$. Mivel f és g folyt. z_0-ban $f(z_j) \to f(z_0) = c_0$ és $g(z_j) \to g(z_0) = d_0$ ha $z_j \to z_0$ $\Rightarrow c_0 = d_0$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z_j - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z_j - z_0)^k$$

(levontuk az első tagot, mert azok úgyis megegyeznek) $\Big| : (z_j - z_0) \neq 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z_j - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z_j - z_0)^{k-1}$$: a két oldal z_0-ban folyt.

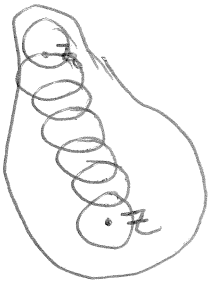
$\Downarrow$

$c_1 = d_1, \ldots$ hasonlóan $c_2 = d_2, c_3 = d_3, \ldots$

(a további lépéseknél is fontos, hogy $z_j \neq z_0$)

~~Megszünik~~ Azt kapjuk, hogy $c_k = d_k \ \forall k \Rightarrow f(z) = g(z) \ \forall z \in K_R(z_0)$. $z \in \Omega$ tetsz. rögz., z_0-t és z-t összekötjük egy körívvel $\Rightarrow f(z) = g(z)$

$\uparrow$ már tetszőleges z-re



← ezen a tartományon már tudjuk, hogy $f(z) = g(z)$

ezután fejtsük "ezek" ekörül a tag körül sora

elkez van olyan "z_j", ahol $f(z_j) = g(z_j)$

$\Leftarrow$ ezen a tart. is egyenlők

Holomorf fv-k transzcendens gyökei

1) **Def.:** Legyen f holomorf fv. egy $\Omega \subset \mathbb{C}$ tart. on. Azt mondjuk, hogy f-nek $z_0 \in \Omega$ pontban n-szeres gyöke van, ha $0 = f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Áll.: Egy f holom. fv.-nek n-szeres gyöke van $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(z) = g(z) \cdot (z - z_0)^n$, ahol g holomorf és $g(z_0) \neq 0$.

Biz.: a) Tfh. $0 = f(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0)$, fejtsük f-t

$\Rightarrow$ Taylor-sora z_0 körül:

$$f(z) = \underbrace{f(z_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{f'(z_0)}{1!}}_{=0}(z - z_0) + \dots + \underbrace{\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}}_{=0}(z - z_0)^{n-1} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}_{\neq 0}(z - z_0)^n$$

$$+ \dots = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots = \underbrace{\left[\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{n+1!} \cdot (z - z_0) + \dots\right]}_{:= g(z),\ \text{holomorf } z_0 \text{ egy körny.-ben.}}(z - z_0)^n$$

$\Leftarrow$ b) Tfh. $f(z) = (z - z_0)^n \cdot g(z)$, $g(z_0) \neq 0$, g holomorf z_0 körny.-ben.

$g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l (z - z_0)^l$, tudjuk, hogy $d_0 = g(z_0)$

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot g(z) = \overset{\neq 0}{d_0}(z - z_0)^n + d_1(z - z_0)^{n+1} + \dots$$

$\Downarrow$

$\Rightarrow f(z_0) = 0, \dots f^{(n-1)}(z_0) = 0$ DE $d_0 \neq 0$ mert $d_0 = g(z_0)$

Egész fv-k, Liouville tétele

1) **Def:** Ha $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf $\mathbb{C}$-n, akkor f-t egész fv-nek nevezzük.

2) **Liouville tétele:** Ha az f egész fv. korlátos $\Rightarrow f$ állandó!

Biz: Tejtsük f-t Taylor-sora $z_0=0$ körül is

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$ (azt kell belátni, hogy c_0-n kívül $\forall c_k=0$)

$$c_k=\left(\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r}\frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}\,d\xi \Rightarrow |c_k|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r}\frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}\,d\xi\right| \leq$$

$z=0$

$S_r=\{z:|z|=r\}$

0 középpontú, r sugarú kör

r-et mi választjuk meg olyan tartományon, ahol f holomorf

$\downarrow$

mivel f $\forall$ hol holom., ezért r tetsz. nagy lehet

$$\leq \frac{1}{2\pi}\,2\pi\cdot r\cdot\frac{\sup_{S_r} f}{r^{k+1}} \leq \left(\frac{M}{r^k}\right)=\frac{M}{r^k}\to 0, \text{ ha } r\to\infty$$

$\leq M$

(és $k\geq 1$)

$(z=0)$

$k\geq 1 \quad c_k=0$

$\Downarrow$

$f(z)=c_0=$ áll

3) **Az algebra alaptétele**

Legyen P egy legalább elsőfokú komplex eh.-ős polinom. Ekkor P-nek van gyöke $\mathbb{C}$-n ($\exists z_0\in\mathbb{C}: P(z_0)=0$)

Biz: Indirekt felt.: $P(z)\neq 0 \quad \forall z\in\mathbb{C}$. Ekkor $\frac{1}{P}$ holomorf fv. az egész $\mathbb{C}$-n. $\leftarrow$ Belátjuk, hogy $\frac{1}{P}$ korlátos.

Ebből kiv. fog, hogy $\frac{1}{p}$ = áll $\to p$ = áll $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 1$-re

$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, egyenlőek $a_n \neq 0$, ha $n \geq 1$

$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| = \frac{1}{|p(z)|} = \frac{1}{|a_n z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0|} =$$

$$= \frac{1}{|z^n (a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + \dots (a_0 \cdot z^{-n})|} =$$

$$= \frac{1}{|z|^n \cdot |a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n-1} + a_0 z^{-n}|}$$

$$|a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots a_1 \cdot z^{-n+1} + a_0 z^{-n}| \geq \frac{|a_n|}{2}, \text{ ha } |z| > \rho,$$

(Δ egyenlőtlenség miatt)

- tehát $|z| > \rho$ esetén $\left|\frac{1}{p(z)}\right| < \frac{1}{\rho^n \frac{|a_n|}{2}} \Rightarrow \frac{1}{p}$ korlátos
- $|z| \leq \rho$ esetén (zárt kör. halmaz) $\frac{1}{p}$ folytonos lévén, korlátos

Összegzve $\Rightarrow$ $\frac{1}{p}$ korlátos $\mathbb{C}$-n $\Rightarrow \frac{1}{p}$ = áll $\Rightarrow$ ellentmondás, mert ha p = áll, akkor nem egy legalább elsőfokú polinom

8. óra

0) Ism.:

A holomorf komplex fv.-ket Taylor-sorba lehet fejteni, a sorok elő-állítja őket. Komplex fv-eknél holomorf $\Rightarrow$ analitikus.

Exponenciális, sin, cos fv. komplexben

1) <u>Def.:</u>

- $e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(Cauchy-Hadamard-tétel érvényes komplexre is → konvergenciasugár)

- $\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \quad \forall z \in \mathbb{C}$

- $\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2) <u>Áll.:</u> Ezek az egész $\mathbb{C}$-n holomorfak.

3) <u>Tétel:</u> $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

<u>Biz.:</u> Felhasználjuk, hogy ha két ~~sor abs~~ (valós vagy komplex) számsor abszolút konvergens (az abszolút értékekből képezett sor konvergens, akkor az eredeti sorok is konvergensek) ⇒

⇒ a két sor összegének szorzata = azon sor összegével, amelyet úgy kapok, hogy minden tagot minden taggal szorzok, a „szorzat során" a tagok sorrendje felcserélhető (megj.: ha nem absz. konvergens, akkor nem cserélhető fel a tagok sorrendje, mert megváltoztat a szösszeg).

e^{z_1} és e^{z_2} sorának összeszorzásakor az ún. Cauchy-féle szorzási szabályt alkalmazzuk:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = B$$

$$\begin{array}{ccccc}
a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 & \dots \\
a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots \\
a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots
\end{array}$$

(az indexek összegét tartom állandónak, majd ezt összegzek)

Ha a két sor abszol. konv., akkor:

$$AB = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right).$$

Az exponenciális fv. hatványsora $\forall z$-re abszol. konvergens.

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z_2^l}{l!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z_1^k}{k!}\cdot\frac{z_2^{n-k}}{n-k!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}}_{(z_1+z_2)^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}$$

<u>Fontos következmények:</u> $z = (x+iy)$ $x, y \in \mathbb{R}$

- $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$,

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots = \underbrace{\left[1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right]}_{\cos y} + i\underbrace{\left[\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \dots\right]}_{\sin y}$$

$$= \cos y + i \sin y \Rightarrow e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

$$\Rightarrow |e^z| = |e^x(\cos y + i\sin y)| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$$

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots\right) + i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)$$

$$e^{-iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i\left(-\frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$$

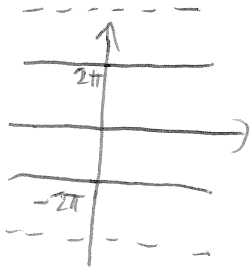
- Ebből adódnak a valóban ismert trigonometriai összefüggések komplex esetre,

pl. $(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(Ebből nem következik, hogy $|\cos z| \leq 1 \quad z \in \mathbb{C}$)

pl. $\cos(z_1 + z_2) = \dots \qquad \sin(z_1 + z_2) = \dots$

- $z \mapsto e^z$ fv. $2\pi i$ szerint periodikus.



$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\underbrace{\cos 2\pi}_{1} + i\underbrace{\sin 2\pi}_{0}) = e^z$$

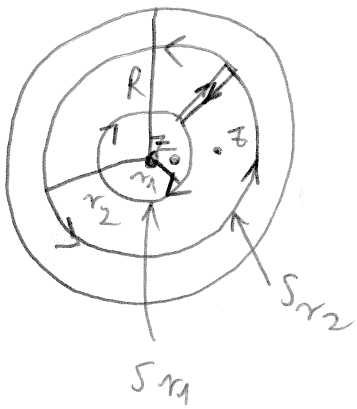
(hasonlóan cos, sin 2π szerint per. komplexben is)

Laurent-sorfejtés

1) **Def.:** Ha f fv. holomorf a z_0 pont egy környezetében a z_0 kivételével, akkor z_0-t izolált szinguláris pontnak nevezzük.

Kérdés: f fv. „sorbafejtése" egy z_0 izolált szinguláris pont körül.

Tfh. z_0 izolált szinguláris pont. f holomorf $(K_R(z_0)\setminus\{z_0\})$-ban, ahol $K_R(z_0)=\{z:\ 0<|z-z_0|<R\}$. Legyen $z\in(K_R(z_0)\setminus\{z_0\})$, válasszuk r_1, r_2-t olyan módon, hogy $0<r_1<|z-z_0|<r_2<R$.



Alkalmazzuk a Cauchy-féle integrálformulát:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_2}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

$S_{r_j}:=\{z:\ |z-z_0|=r_j\}$

$\zeta\in S_{r_2}$ esetén: $\dfrac{1}{\zeta-z}=\dfrac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\,\frac{1}{1-\underbrace{\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}_{|\ |<1}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=$$

$$=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}}$$

$\zeta\in S_1$ esetén $\dfrac{1}{\zeta-z}=\dfrac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=-\dfrac{1}{z-z_0}\cdot$

$$\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}_{|\ |<1}}=-\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n=\underbrace{-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}}=$$

$\uparrow$ ily indexszel $m+1=-n$, $m=-1-n$

$$= -\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_2}} f(\xi)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\, d\xi$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_1}} f(\xi)\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_2}} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\, d\xi +$$

a sorok egyenletesen konvergensek (rögz. z-re)

$$+ \sum_{n=-1}^{-\infty}(z-z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_2}} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\, d\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\, d\xi$$

$0 < r < R$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \text{ ahol } c_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\, d\xi$$

<u>Tétel:</u> Tfh. f holomorf $K_R(z_0)\setminus\{z_0\}$ tart.on akkor $\forall z \in K_R(z_0)\setminus\{z_0\}$ pontban érvényes a fenti (Laurent-) sorfejtés.

<u>Megj.:</u> Nem nehéz belátni, hogy a fv. sor egyértelmű:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z-z_0)^n \Rightarrow c_n = d_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\int_{S_r} (z-z_0)^n\, dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

A szinguláris pontok osztályozása

1) <u>Def.:</u> Tfh. f-nek z_0-ban izolált szingularitása van. Tudjuk, hogy akkor $f(z)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{\text{reguláris rész}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n}_{\text{főrész}}$ ← ez adja vissza abban a pontban a szingularitásokat

1. Ha $c_n=0$ $\forall n<0$ esetén akkor f-nek z_0-ban megszüntethető szingularitása van.

2. Ha $c_n \neq 0$ $n=-1,-2,\dots,-m$; $c_n=0$, ha $n<-m$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek z_0-ban m-edrendű pólusa van.

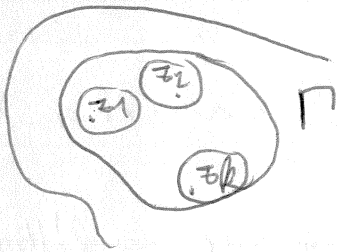
3. Ha végtelen sok negatív n esetén $c_n \neq 0$, akkor z_0-t lényeges szingulárisnak nevezzük.

Reziduum, reziduum-tétel

1) <u>Def:</u> Tfh. f-nek z_0-ban izolált szing. van. Ekkor f L.-sorában a c_{-1}-eket az f fv. z_0-beli reziduumának nevezzük.

$$\operatorname{Res}_{z_0} f := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(\zeta)\,d\zeta.$$

2.) <u>Reziduum-tétel</u>: Tfh. f holomorf az $\Omega \subset \mathbb{C}$ tart.-ban a $z_1, z_2, \dots z_k$ izolált szing. pontok kivételével.



Legyen Γ olyan egyszerű zárt szak. folyt. diffh. görbe, amely belsejében tartalmazza a $z_1, z_2, \dots z_k$ pontokat, másutt holom., akkor

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z_j} f$$

Biz.:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{Sr(z_j)} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} 2\pi i \operatorname{Res}_{z_j} f$$

A reziduum kiszámítása pólus esetén

1) Tfh. f-nek z_0-ban m-edrendű pólusa van ($m \geq 1$). Ekkor

f Laurent-sorfejtése:

$$f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + c_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

c_{-1} ?

$$\Rightarrow \underbrace{(z-z_0)^m \cdot f(z)}_{g(z)} = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m$$

g holomorf z_0-ban is. A Taylor-sorfejtésnél tanultak szerint:

$$c_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m \cdot f(z)\right)\right]_{z=z_0}$$

(megj.: általában ezt egzaktul nem tudjuk $z=z_0$-ban kiszámítani, csak határértéket tudunk venni szing. miatt → kérdés, hogy $\lim_{z\to z_0} c_{-1}$ $\exists$-e.)

2) Néhány észrevétel

- Áll. f fv-nek z_0-ban m-edrendű pólusa van akkor, ha $g(z) := (z-z_0)^m \cdot f(z)$ fv. holom. z_0-ban és $g(z_0) \neq 0$. $\Rightarrow$ láttuk

- Áll: Ha h holomorf z_0-ban és itt m-szeres gyöke van $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{h(z)}$ fv-nek m-edrendű pólusa van.

Biz.: $g(z) := (z-z_0)^m \cdot f(z) = \frac{(z-z_0)^m}{h(z)}$ holom., $g(z_0) \neq 0$

$h(z) = (z-z_0)^m \cdot h_1(z)$ h_1 holom., $h_1(z_0) \neq 0$,

$g(z) = (z-z_0)^m f(z) = \frac{(z-z_0)^m}{(z-z_0)^m h_1(z)} = \frac{1}{h_1(z)}$ h_1 holom., $h_1(z_0) \neq 0$

3) Egyszerű spec. esetek:

1. $f(z)$-nek elsőrendű pólusa van, $f(z) = \frac{1}{h(z)}$, ahol h holom. és h-nak z_0 egyszeres gyöke van.

$\operatorname{Res}_{z_0} f = ?$ $\quad \underline{\underline{\operatorname{Res}_{z_0} f}} = \left[f(z) \cdot (z-z_0) \right]_{z=z_0} = \left[\frac{z-z_0}{h(z)} \right]_{z=z_0} =$

$= \left[\frac{z-z_0}{h(z) - \underbrace{h(z_0)}_{0}} \right] = \left[\frac{1}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} \right]_{z=z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} = \underline{\underline{\frac{1}{h'(z_0)}}} \neq 0$ mert 1-szeres gyöke van

2. Tfh. $f = \varphi \cdot \psi$, ahol φ holom. z_0-ban, ψ-nek elsőrendű pólusa van.

φ holom. $\Rightarrow \varphi(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$

ψ-nek 1. rendű pólusa van $\Rightarrow \psi(z) = \frac{d_{-1}}{z-z_0} + d_0 + d_1(z-z_0) + \dots$

$$f(z) = \varphi(z)\psi(z) = \frac{c_0 \cdot d_{-1}}{z-z_0} + (c_1 d_{-1} + c_0 d_0) + (c_2 d_{-1} + c_1 d_0 + c_0 d_1)\cdot(z-z_0) + \dots$$

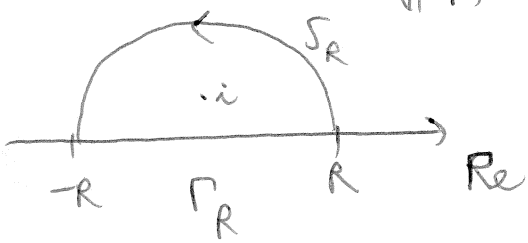
$$\operatorname{Res}_{z_0} f = c_0 \cdot d_{-1} = \varphi(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} \psi$$

A reziduum tétel alkalmazása improprius integrálok kiszámítására

pl. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = ?$ ($\to$ baj: nem tudom a prim. fv.-t)

Észrevétel: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{1+x^2}\,dx =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx = \cancel{\left(\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz \quad \Gamma := \text{felső tengely}\right)} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx =$$



$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz + \int_{S_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz \underset{\text{Res. tétel}}{=}$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}_i \left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right) \underset{\substack{\text{spec. eset 2,}\\ e^{iz}\text{ holomorf}}}{=} 2\pi i\, e^{i^2} \cdot \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} =$$

$$= \cancel{2}\pi \cancel{i}\, e^{-1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\cancel{i}} = \frac{\pi}{e}$$

Áll.: $\displaystyle\lim_{R\to 0} \int_{S_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$

$$\left|\int_{S_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| \le \pi \cdot R \sup_{z\in S_R} \left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| = \pi R \sup \frac{e^{\operatorname{Re}(iz)}}{|1+z^2|} \le \pi R \frac{1}{|z|^2-1} \le \pi R \cdot \frac{1}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Komplex fv-ek inverze

1) <u>Tétel</u> (biz. nélkül): Tfh. f holomorf $z_0 \in \mathbb{C}$ pont egy környezetében. Ha $f'(z_0) = 0$, akkor z_0 semmilyen kis körny.-ben sem injektív f (nincs lokális inverz).

Ha $f'(z_0) \neq 0$, akkor f-nek $\exists$ lokális inverze, az inverz holomorf $w_0 = f(z_0)$ egy körny.-ben.

<u>Megj.</u>: Abból, hogy $f'(z) \neq 0$ $\forall z$ nem következik, hogy f injektív (csak lok.-an injektív).

pl. $f(z) = e^z$, $f'(z) = e^z \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, de f $2\pi i$ szerint periodikus: $e^{z+2\pi i} = e^z$

$f(z) = e^z$ lokális inverze: $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$; $e^z = w$; $w = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\cancel{|w|} = |w| = r$, $\varphi = \arg w$

$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Leftrightarrow$

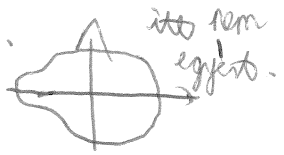
$\Leftrightarrow e^x = r = |w|$, $y = \varphi = \arg w \Leftrightarrow x = \ln r = \ln|w|$, $y = \arg w$

$e^z = w \Leftrightarrow z = \ln|w| + i\arg w$

<u>Def:</u> $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esetén legyen $\log w := \ln|w| + i\arg w$

Ez a fv. egyértelmű módon értelmezhető $\forall$ olyan tart.-on, ahol az arg egyértelműen def.ható.

pl.



9. óra

Lebesgue-integrál

1) Motiváció

→ bajok a Riemann-integrállal

- végest tud kezelni
  (véges sok pontban változtatva az int. nem változik, de végtelen sokra már nem igaz (pl. Dirichlet))
- lim és $\int$ csak erős felt. mellett cserélhető fel

$$(f_i) \Rightarrow f \not\Leftarrow \int f_j \to \int f$$

pl. egyenletes konv. esetben igen

Henri Lebesgue, 1902 (mérték → int.)
Riesz Frigyes felépítése (int. → mérték)

2) Definíció:

$I \subset \mathbb{R}^n$ intervallum, ha (egydim. intervallumok direkt szorzata)

$$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n \text{, ahol } I_j = [a_j, b_j] \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

(téglalap)

def: $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallum, ennek Lebesgue-mértéke

$$\lambda(I) = \lambda(I_1) \cdot \lambda(I_2) \cdot \ldots \lambda(I_n) \text{, ahol } \lambda(I_j) = b_j - a_j$$

def: Nullmértékű halmaz

($\varepsilon > 0$  ← $\forall \varepsilon$-ha tudok ∞ olyan sok „téglát" találni, melyek össz Leb.-mértéke (térfogata) $< \varepsilon$)

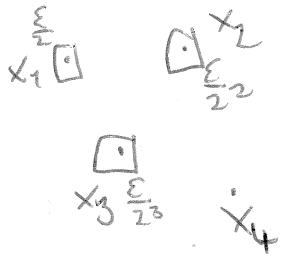
$A \subset \mathbb{R}^n$ nullmértékű halmaz, ha $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_1, I_2, \dots$ intervallumok (véges sok vagy megszáml. végtelen), hogy $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset A$

és $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) < \varepsilon$ (összterületük $< \varepsilon$).

(lefedik az intervallumok)

- Példa:

1, tetsz. véges vagy megszáml. végtelen halmaz nullmértékű



$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x_j\}$$

x_j-t lefedjük $\frac{\varepsilon}{2^j}$ méretű intervallummal $= I_j$

Ekkor $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon$.

2.) $\mathbb{R}^2$-ben $\forall$ szakasz nullmértékű

$\to$ ha $\varepsilon \to 0$

3) $\mathbb{R}^2$-ben $\forall$ egyenes nullmértékű

$\to$ összterületük $= \varepsilon$

4) $\mathbb{R}^3$-ben $\forall$ sík

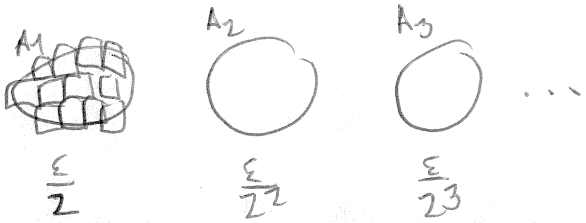
- megj.: nullmértékű ~ kicsi (mérték szempontjából)
- észrevétel: ha $A \subset B$, $\lambda(B) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$

jelölés $\to$ nullmértékű

3) Áll: ~~(Megszámlálható)~~

$A_1, A_2, \dots$ nullmértékű halmazok $\mathbb{R}^n$-ben $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ is nullmértékű

$\varepsilon > 0$



$\lambda(A_j) = 0 \Rightarrow \exists (I_{j,k})_{k=1}^{\infty} \supset A_j$ intervallumok, hogy

j fix

$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_{j,k}) < \frac{\varepsilon}{2^j}$ (mert megszámlálhatóan végtelen sok ~~elemű~~ halmaz uniója megszámlálhatóan ∞ sok ugyanígy ∞ sok elemű is)

tek. $(I_{j,k})_{j,k=1}^{\infty}$ ito, ezek megsz. végtelen sokan vannak

$$\begin{array}{cccc} I_{1,1} & I_{1,2} & I_{1,3} & \\ I_{2,1} & I_{2,2} & I_{2,3} & \dots \\ I_{3,1} & I_{3,2} & I_{3,3} & \\ & \vdots & & \end{array}$$

és $\sum_{j,k} \lambda(I_{j,k}) = \sum_j \sum_k \lambda(I_{j,k}) < \sum \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon$ $\square$

biz. vége

4) Def:

Mondjuk, hogy egy tulajdonság (pl. konv.) majdnem mindenütt (m.m. $x \in \mathbb{R}^n$ esetén) teljesül, ha $\exists A \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda(A) = 0$ és a tulajdonság teljesül $\mathbb{R}^n \setminus A$-n. (Csak egy null m. halmazon nem ~~telj~~.)

majdnem mindenütt

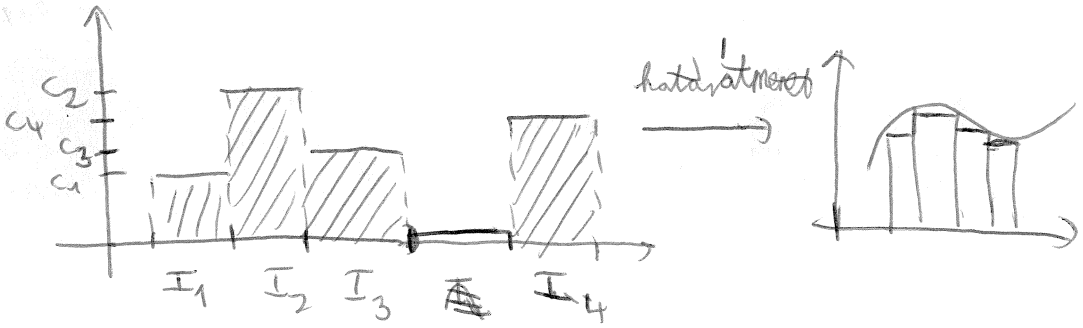
pl. $f_j \to f$ m.m.

$f_j(x) \to f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, ahol $\lambda(A) = 0$

(néhány x-re nem telj., de ezek összterülete 0)

Lépcsős függvények integrálja (C_0)

1) Motiváció:



2) Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lépcsős függvény, ha $\exists I_1, I_2, \dots I_k$ intervallumok, $\exists c_1, c_2, \dots c_k \in \mathbb{R}$, hogy $f|_{I_j} = c_j \quad j = 1, \dots, k$,

az I_j-n megszorítva

továbbá $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{k} I_j} = 0$.

Megj.: I_j-k nem feltétel egyértelműek.

3) Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lépcsős fv., ekkor f integrálja:

$$\int f := \sum_{j=1}^{k} c_j \, \lambda(I_j)$$

téglalapok
(térfogatösszege)

megj.: a def. korrekt, felbontásra nem függ (belátható)

megj.: linearitás igaz

f, g lépcsős, $\int(f+g) = \int f + \int g$, $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$

$\int cf = c \cdot \int f$

$\Rightarrow$ (Ⓕ) 2 lemmára építjük fel az 'alt integrált

~~Állítás: $\int$: (C_1)~~ $\int$-ek visszavezetése lépcsős-ekre (C_1)

1) Lemma (A):

- (f_j) lépcsős-ek, $f_j \searrow$ (monoton csökkenő módon) 0-hoz tart m.m. (majdnem mindenütt).

$\Rightarrow \int f_j \to 0$

- Biz: nem biz.

2) Lemma (B):

- (f_j) lépcsős-ek, (f_j) mon. növő, $(\int f_j)$ felülről korlátos $(\leq C)$ (alulról is, mert $\int f_1$-nél ~~[illegible]~~ $\leq$).

$\Rightarrow$ m.m. $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\exists$ és véges $\lim_{j\to\infty} f_j(x)$

- biz: $(f_j(x))$ mon. növő m.m. $x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \exists \lim_{j\to\infty} f_j(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

~~[illegible]~~

kell: $M = \{x \in \mathbb{R}^n \ \lim f_j(x) = +\infty\}$ nullmértékű.

$\to$ $\varepsilon > 0$ adott, $M \subset M_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \ \exists j \ f_j(x) > \frac{C}{\varepsilon}\} =$

$$= \bigcup_{j=1}^{\infty} \Big[\underbrace{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) > \frac{C}{\varepsilon}}_{\text{1 rögzített } j\text{-re az összes } x} \Big] = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_{\varepsilon,j}$$

- $M_{\varepsilon,j} \subset M_{\varepsilon,j+1}$ (monoton bővülő halmaz) ← mivel f_j-k mon. növők, ezért annak a tartománynak a mérete, ahol $f_j > \frac{C}{\varepsilon}$ nő, ha j nő
- $M_{\varepsilon,j}$ véges sok interv. uniója.
- $\lambda(M_{\varepsilon,j}) \leq \varepsilon$, mert (nullmértékű) és az $\int$ felülről korlátos; különben: $\int_{M_{\varepsilon,j}} f_j > \frac{C}{\varepsilon} \cdot \lambda(M_{\varepsilon,j}) > C$ ↯ (adott ε-ra adott áll.)

$$\Rightarrow \lambda\Big(\underbrace{\bigcup M_{\varepsilon,j}}_{M_\varepsilon}\Big) \leq \varepsilon \Rightarrow \underline{\underline{M \text{ nullmértékű}}}$$

↑ mivel $M_{\varepsilon,j}$ nulln., ezért megsz. vég. sok ∪-ja is

3) <u>definíció:</u>

C_1 jelölje azon $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fv-ek osztályát, amelyekre $\exists (f_j)$ lépcsőfv., $f_j \uparrow f$ (mon. növő módon tart.), $(\int f_j)$ felülről korlátos.

- <u>Megj:</u> $f \in C_1$ esetén természetes az int.-t a köv. módon értel mezni: $\int f = \lim_{j\to\infty} \int f_j$
- kérdések: (1) $f_j \uparrow f$, $g_j \uparrow f \overset{?}{\Rightarrow} \lim \int f_j = \lim \int g_j$ (köv.-e ebből)

  (2) C_0-ban ez a def $\overset{?}{=}$ régi def.

(1) válasz ~~lét. tétel~~

4) <u>Tétel:</u> (f_j), (g_j) lépcsőfv-ek, $f_j \nearrow f$, $g_j \nearrow g$, $f \leqq g$, $\left.\begin{matrix}(\int f_j)\\(\int g_j)\end{matrix}\right\}$ kiülnek korlátosak

$$\Rightarrow \lim \int f_j \leqq \lim \int g_j \quad (\text{mert } \int f \leqq \int g, \text{ ha } f \leqq g)$$

<u>Bir:</u> Tek. $(f_j - g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatot. Ez mon. csökkenő, és (lépcsőfv-ek) (mert $g_j \nearrow$) (j fix)

$$\lim_{k\to\infty}(f_j - g_k) = f_j - g \leqq f - g \leqq 0$$

z különbség is

Vegyük $(f_j - g_k)^+ = \begin{cases} f_j - g_k, & \text{ha } f_j - g_k \geqq 0 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$

$(f_j - g_k)^+ \to 0$ (m.m.).

$$\overset{\text{Lemma A-ból}}{\Longrightarrow} \int (f_j - g_k)^+ \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$\underbrace{\int (f_j - g_k)}_{\int f_j - \int g_k} \leq \int (f_j - g_k)^+ \to 0$$

$$\overset{k\to\infty}{\Longrightarrow} \int f_j - \underbrace{\lim \int g_k}_{\exists, \text{ mert } g_k \text{ mon. növő és kiülő. kor. (Lemma B)}} \leq 0 \quad \int f_j \leqq \lim \int g_k \to$$

$$\overset{j\to\infty}{\Longrightarrow} \lim \int f_j \leqq \lim \int g_k \qquad \square$$

• Kör.: $\boxed{\int f = \lim \int f_j}$ korrekt def., ugyanis

$f_j \nearrow f$ $(\int f_j)$ ~~felülről~~
$g_j \nearrow g$ $(\int g_j)$ ~~korlátos~~ } felülről korlátos $\xRightarrow{\text{előző tétel}}$ $f = g$

(ilyenkor f egyszerre $\geq$ és $\leq$ g-nél)

$\Rightarrow \lim \int f_j \leq \lim \int g_j$

$\Rightarrow \quad \geq$

$\Downarrow$

$\lim \int f_j = \lim \int g_j$

• Kör$_2$: Lépcsős-ekre régi def = új def, mert $f_j = f$ választható. (konst. sorozat)

5) Az integrál tulajdonságai C_1-ben

itt nincs kivonás!

– Áll.: $f, g \in C_1$, $\lambda \geq 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow$ (i) $f+g \in C_1$ és $\int(f+g) = \int f + \int g$

(ii) $\lambda f \in C_1$ és $\int \lambda f = \lambda \int f$

(iii) $f^+ \in C_1$

bizi: (i) $\left.\begin{array}{l} f \in C_1 \\ g \in C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists f_j \nearrow f \\ \exists g_j \nearrow g \end{array}$ lépcsős-ekkel $\begin{array}{l} \int f_j \to \int f \\ \int g_j \to \int g \end{array}$

$\Rightarrow f_j + g_j \nearrow f+g$ lépcsős.

és $\underline{\underline{\int (f_j+g_j)}} = \int f_j + \int g_j \to \underline{\underline{\int f + \int g}}$

(ii) $f \in C_1 \ni \exists f_j \uparrow f$ lépcsős fv. $\Rightarrow \lambda f_j \uparrow \lambda f$, ugyanakkor
$\lambda \in \mathbb{N}$

$\int \lambda f_j = \lambda \int f_j \to \lambda \int f$

(iii) $f_j \uparrow f \Rightarrow f_j^+ \uparrow f^+$

$\int f_j \leq \int f_j^+ \Rightarrow$ emiatt $\lim \int f_j^+ \in C_1$

- <u>Áll:</u> $f, g \in C_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \max\{f,g\} \overset{\text{jel.}}{=} f \vee g \\ \min\{f,g\} \overset{\text{jel.}}{=} f \wedge g \end{array}\right\} \in C_1$

<u>Biz:</u> nem biz.

<u>Integrálás a C_2 osztályban</u>

1) <u>definíció</u> $f \in C_2 \Leftrightarrow \exists f_1, f_2 \in C_1 : f = f_1 - f_2$

2) <u>definíció</u> $f \in C_2$ esetén $\int f := \int f_1 - \int f_2$

Kérdés: korrekt-e? (a def.)

3) <u>Áll:</u> $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C_1$

$\Rightarrow \int f_1 - \int f_2 = \int g_1 - \int g_2 \Leftarrow \int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2$ átrendezve OK

<u>Biz:</u> $\underset{\in C_1}{f_1} + \underset{\in C_1}{g_2} = \underset{\in C_1}{g_1} + \underset{\in C_1}{f_2} \Rightarrow \int (f_1 + g_2) = \int (g_1 + f_2)$

– 8 –

4) Kérdés: $C_2 \supsetneq C_1$ igaz? $\xrightarrow{V:}$ Igaz. Ezt ugyan fv is, amiknek monoton növekedő mögött $\int$-jét nem tudjuk $\int$ lépcsős fv-ekre visszavezetni. $\to C_1$-ben ~~tegyi~~ ilyenek vannak csak

5) ~~Áll~~: (tulajdonságok)

$f, g \in C_2$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (i) $f+g \in C_2$ és $\int(f+g) = \int f + \int g$

(ii) $\lambda f \in C_2$ és $\int \lambda f = \lambda \int f$

(iii) ha még $f \leq g$ is teljesül, akkor $\int f \leq \int g$

(iv) f-et egy nullmértékű halmazon megváltoztatva továbbra is C_2-beli marad és az $\int$ ugyanaz

(pl. szinteket $\to \int = 0$)

konstansra 0-ra vissza lehet változtatni

(v) $f^+ \in C_2$, $f^- \in C_2$, ahol $f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{ha } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$

$f = f^+ - f^-$ (általában igaz)

$|f| = f^+ + f^-$

(vi) $|f| \in C_2$ és $|\int f| \leq \int |f|$

(vii) $\exists (f_j)$ lépcsős fv. sorozat, $f_j \to f$ m.m. és

$\int f_j \to \int f$

bizi (i) $f, g \in C_2 \Rightarrow f = f_1 - f_2 \quad f_1, f_2, g_1, g_2 \in C_1$

$g = g_1 - g_2$

$$\Rightarrow f + g = \underbrace{(f_1 + g_1)}_{\in C_1} - \underbrace{(f_2 + g_2)}_{\in C_1} \in C_2$$

és $\int(f+g) = \int(f_1+g_1) - \int(f_2+g_2) \underset{C_1\text{-ben lineáris}}{=} \int(f_1 - f_2) + \int(g_1 - g_2) =$

$= \int f + \int g$

(ii) $f = \underbrace{f_1}_{\in C_1} - \underbrace{f_2}_{\in C_1}$

$\lambda f = \underbrace{\lambda f_1}_{} - \underbrace{\lambda f_2}_{}$

csak akkor vannak C_1-ben, ha $\lambda \geq 0$

$\lambda f = \underbrace{(-\lambda)}_{\geq 0} \underbrace{f_2}_{\in C_1} = \underbrace{(-\lambda)}_{\geq 0 \text{ ha } \lambda < 0} \underbrace{f_1}_{\in C_1}$

$\int \lambda f = \int(\lambda f_1 - \lambda f_2) = \lambda \int f_1 - \lambda \int f_2 =$ ($= \int \lambda f_1 - \int \lambda f_2$, C_1-ben lin.)

$= \lambda(\int f_1 - \int f_2) = \lambda \int f$

hasonlóan: ...

$(-\lambda)\underbrace{(\int f_2 - \int f_1)}_{-\int f} = \lambda \int f$ ✓

(iii) $f \leq g$

$\underbrace{g - f}_{h} \geq 0$ kell $\underbrace{\int h \geq 0}_{\int g - \int f}$ → (C_2-nél a különbség is C_2-ben van, C_1-nél nincs C_1-ben! C_2-ben van)

$h = h_1 - h_2$, $\underbrace{h_1}_{\in C_1} \geq \underbrace{h_2}_{\in C_1}$ – ez $\Rightarrow \int h_1 \geq \int h_2 \Rightarrow \int(h_1 - h_2) \geq 0$

(iv) C_1-ben is igaz

C_2 C_1-beliek különbsége $\Rightarrow$ itt sem ütt. az $\int$

(v) $f = f_1 - f_2$

$$\underset{\substack{\cap \\ C_2}}{f^+} = \underset{\substack{\cap \\ C_1}}{\max\{f_1, f_2\}} - \underset{\substack{\cap \\ C_1}}{f_2} \begin{cases} = f_1 - f_2 = f, & \text{ha } f_1 \geqq f_2 \overset{\text{ha}}{\Leftarrow} f \geqq 0 \\ = f_2 - f_2 = 0, & \text{ha } f_2 \geqq f_1 \overset{\text{ha}}{\Leftarrow} f \leqq 0 \end{cases}$$

(korábbi ütt., hogy a max. is $\in C_1$)

$$\underset{\substack{\cap \\ C_2}}{f^-} = \underset{\substack{\cap \\ C_1}}{\max\{f_1, f_2\}} - \underset{\substack{\cap \\ C_1}}{f_1} \quad \Leftarrow C_2$$

(vi) $$\underset{\substack{\cap \\ C_2}}{|f|} = \underset{\substack{\cap \\ C_1}}{f^+} + \underset{\substack{\cap \\ C_2}}{f^-}$$ előző

$C_2 \Leftarrow C_1$

(i)

(vii) $f = \underset{\substack{\cap \\ C_1}}{f_1} - \underset{\substack{\cap \\ C_1}}{f_2} \Rightarrow \exists f_j \nearrow f_1, \ \int f_j \to \int f_1$

$\exists \underline{g_j} \nearrow f_2, \ \int g_j \to \int f_2$

lépcsőfv.-ek

$\Rightarrow \overbrace{f_j - g_j}^{\text{ennek a sorozatnak van-e}} \to f_1 - f_2 = f$ m.m.

$$\underbrace{\int f_j - \int g_j}_{\int (f_j - g_j)} \to \underbrace{\int f_1 - \int f_2}_{\int (f_1 - f_2) = \int f}$$

6) <u>Áll.:</u> $f, g \in C_2$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \max\{f,g\} \\ \min\{f,g\} \end{array}\right\} \in C_2$$

<u>Biz.:</u> $\max\{f,g\} = (f-g)^+ + g$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ C_2 & \Leftarrow & C_2 & & C_2 \end{array}$$

ezeket a kifejezéseket már láttuk

$$\min\{f,g\} = f - (f-g)^+$$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ C_2 & \Leftarrow & C_2 & & C_2 \end{array}$$

7) <u>Megj.:</u> Belátható, hogy ha f Riemann-integrálható $\Leftrightarrow f \in C_1$, $-f \in C_1$

8) <u>Tétel: (Beppo Levi)</u>

1. $(f_j) \subset C_2$, $(f_j) \uparrow$, $\exists \lim_{j\to\infty} \int f_j$ és véges (C_2-t „integrálható fv-ek nek" nevezik)

elsőre, csak más megfogalmazás

$\Rightarrow$ m.m. $x \in \mathbb{R}^n$ $\exists \lim f_j(x)$ és véges $= f \in C_2$

és $\int f = \lim \int f_j$ (hasonló áll. volt lépcsősfv-ekre) (Lemma B)

2. $g_j \geqq 0$ C_2-beliek, $\sum_{j=1}^{\infty} \int g_j$ konvergens $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ m.m. $x \in \mathbb{R}^n$ $\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ konv. $= g(x) \in C_2$

$$\int g = \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j$$

bizi. előtt $1 \Leftrightarrow 2$

$1 \Rightarrow 2$: $f_k = \sum_{j=1}^{k} g_j \Rightarrow f_k \nearrow$

✓

(részletösszegek legyenek $f_k - k$)

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{k} \int g_j}_{\int f_k} \text{ konv.} \Rightarrow \int f_k \text{ is konvergens}$$

$2 \Rightarrow 1$ $\quad f_j = \underbrace{\sum_{k=2}^{j} (f_k - f_{k-1})}_{:= g_k \geq 0} + f_1$ (átt. kon igaz)

$\Rightarrow f_k \geq f_{k-1}$

g_k teljesíti a 2. feltétel $\Rightarrow$ ✓

10. óra

1) Beppo-Levi-tétele

- Sorozatokra: Ha $f_j \in C_2$ és (f_j) mon. nő és $\lim \int f_j$ véges, akkor $f(x) = \lim (f_j(x))$ $\exists$ és véges majdnem minden (m.m.) x-re és $f \in C_2$, és $\int f = \lim_{j \to \infty} \int f_j$ (az $\int$ és a lim felcserélhető).

- Sorokra (az áll. a fentivel ekvivalens) Ha $g_j \in C_2$, $g_j \geq 0$ és $\sum_{j=1}^{\infty} \int g_j < \infty \Rightarrow$ m.m. x-re $f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ konvergens, $f \in C_2$ és $\int f = \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j$.

(Az a processus, ami kiveszteti C_0, C_1-ből, C_2-ből nem vesz ki $\Rightarrow$ van lim)

- Biz A sorokra van. ~~tétel~~ biz.

a) $g_j \in C_1$ esetet tek. először. Mivel $g_j \in C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow g_j = \lim_{k\to\infty} h_{j,k}$, ahol h_{jk} lépcsős fv. $(h_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$

mon. nő. Mivel $g_j \geq 0$, azért ~~lehetős~~, hogy

$h_{j,k} \geq 0$ (h_{jk} helyett vehetjük h_{jk}^+ lépcsős fv-ket).

Jel.: $H_k := \sum_{j=1}^{k} h_{jk}$. H_k lépcsős fv (lépcsős fv-ek összege is lépcsős) $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mon. növő: $H_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} \underbrace{h_{j,k+1}}_{\geq 0} \geq$

$$\geq \sum_{j=1}^{k} h_{j,k+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mivel } h_{jk} \text{ mon. nő}}}{\geq} \sum_{j=1}^{k} h_{jk} = H_k .$$

~~$(H_k = \sum_{j=1}^{k} h_{j,k})$~~ $h_{jk} \leq g_j$, mert $(h_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$ mon. növő leg tart g_j-hez. $\Rightarrow H_k = \sum_{j=1}^{k} h_{j,k} \leq \sum_{j=1}^{k} g_j = G_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int H_k \leq \int G_k = \int \sum_{j=1}^{k} g_j = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\int g_j}_{\geq 0} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j < +\infty \Rightarrow H_k \text{ korlátos.}$$

A $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ~~$(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$~~ lépcsős fv. sorozatra alk. hatjuk a B lemmát.
(majdnem mindenütt)

$\Rightarrow \exists H := \lim_{k\to\infty} H_k$ m.m., $H \in C_1$, $\int H = \lim_{k\to\infty} \int H_k$

Legyen $m > k$ rögzít, $H_m = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{h_{j,m}}_{\geq 0} \geq \sum_{j=1}^{k} h_{j,m}$, $m \to \infty$-re

$$H \geq \sum_{j=1}^{k} g_j = G_k$$

~~$(H_1 \geq \sum_{j=1}$~~ A fentiek szerint: (rendben)

$$H_k \leq G_k \leq H, \ (H_k) \to H \text{ m.m.} \Rightarrow (G_k) \to H \text{ m.m.}$$

azaz $\sum_{j=1}^{k} g_j \to H$ m.m., $\sum_{j=1}^{\infty} g_j = H \in C_1$.

$f := H$, $\sum_{j=1}^{\infty} g_j = f \in C_1$ m.m.

$$H_k \leq G_k \leq H \Rightarrow \underbrace{\int H_k}_{\to \int H} \leq \int G_k \leq \int H \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int G_k = \int H$$

$$\lim_{k\to\infty} \int \sum_{j=1}^{k} g_j = \int f$$

$$\| $$

$$\sum_{j=1}^{k} \int g_j \to \int f, \text{ azaz } \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j = \int f$$

b) $g_j \in C_2$, azaz $g_{j1} - g_{j2}$, ahol $g_{j1}, g_{j2} \in C_1$. A $g_{j1,2} \geq 0$ fv-k megválaszthatók úgy, hogy $\int g_{j1,2} \leq \frac{1}{2^j}$ → a ~~korábbi~~ biz. visszavezethető az a) részre.

<u>Következmények</u>:

1) Tfh (f_j) mon. nő, $f_j \in C_2$, $f = \lim (f_j) \in C_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int f = \lim_{j\to\infty} \int f_j$ mis. $f_j \leq f \Rightarrow \int f_j \leq \int f \Rightarrow \int f_j$ felülről korlátos.

2) Tfh $g_j \geq 0$, $g_j \in C_2$ és $\sum_{j=1}^{\infty} g_j = f \in C_2 \Rightarrow \int f = \lim \int g_j$

g_j már lehet mon. csökkenő is! → Leb.-tétel

3) Tfh. $g_j \in C_2$, és $\sum_{j=1}^{\infty} \int |g_j| < \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} g_j = f \in C_2$ és $\int f = \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j$. A bizi. alapgondolata: $-|g_j| \le -g_j^- \le g_j \le g_j^+ \le |g_j|$.

A B.-L. tételt alkalmazzuk a $(\underbrace{g_j^+}_{\ge 0})$ tagú és a $(\underbrace{g_j^-}_{\ge 0})$ tagú sorokra.

4) Ha $f \in C_2$, $f \ge 0$, $\int f = 0 \Rightarrow f = 0$ m.m.. Most alkalmazzuk a B.-L.-tételt a kör. g_j fv-ekből alkotott sorra: $g_j = f$ $\forall j$. $g_j \ge 0$, $\int g_j = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{g_j(x)}_{f(x)} < \infty \quad \text{m.m. } x\text{-re}$$

$(f(x) = 0$ m.m. x-re$)$.

$\infty \cdot f(x) \to$ ez csak úgy lehet $< \infty$ (ha $f(x) \ge 0$), ha $f(x) = 0$

2) Lebesgue-tétel

- Megj.: Tudjuk, hogy $f_j \in C_2$ és $\lim(f_j) = f$ m.m. $\Rightarrow$ $\Rightarrow f \in C_2$.

- Pl. 1) $f_j(t) := (j+1)\, t^j$, $0 \le t \le 1$ esetén $\lim_{j\to\infty} f_j(t) = 0$, (kivéve $t=1$: $\lim_{j=\infty} f_j(1) = +\infty$). $\lim_{j\to\infty}(f_j(t)) = 0$ m.m. $t \in [0,1]$. De

$$\int_0^1 f_j(t)\, dt = \int_0^1 (j+1)\, t^j\, dt = \left[t^{j+1}\right]_0^1 = 1 \not\to 0$$

– pp –

$\left(\lim \int \neq \int \lim \; ! \right)$

2.) $f_j(t) = (j+1)^2 \cdot t^j$, $0 \le t \le 1$, $0 \le t < 1$ esetén ~~lim t~~ $\lim f_j(t) = 0$

$\lim_{j \to \infty} \int_0^1 f_j(t) = +\infty$.

Nem elég a pontonkénti konvergencia!

– <u>Lebesgue-tétel</u>

Tfh: $f_j \in C_2$, $\lim (f_j) = f$ m.m. és $\exists\, g \in C_2$: $|f_j| \le g$ m.m. $\Rightarrow f \in C_2$, és $\int f = \lim_{j \to \infty} \int f_j$

(van egy integrálható majoráns fv.-ünk, de nem kell mon. növekedés).

• <u>Biz:</u> ~~Alk.~~ a Beppo-Levi-~~tétel~~. Jel.: $h_j(x) := \sup\{f_j(x), f_{j+1}(x), \dots\}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Mivel $|f_j(x)| \le g(x)$ m.m. x-re $\Rightarrow$ $\Rightarrow h_j(x) \le g(x)$. Egyúttal (h_j) mon. csökkenő, $-g(x) \le h_j(x)$.

$h_j \in C_2$, mis $h_1(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x), \dots\}$, $h_{1k}(x) =$

$= \sup\{f_1(x), f_2(x), \dots f_k(x)\}$, $h_{1k} \in C_2$, hasz. adódik

$h_{jk}(x) = \sup\{f_j(x), f_{j+1}(x), \dots f_k(x)\}$, $h_{jk} \in C_2$, nem nehéz belátni, hogy $\lim_{k \to \infty} h_{jk} = h_j$, $(h_{jk})_{k \in \mathbb{N}}$ mon. növő sorozat. $\int h_{jk} \le \int g < \infty \Rightarrow$ Beppo-L. alapján $h_j \in C_2$.

Itt. a B.-L. ~~tételt~~ a (h_j) mon. csökkenő sorozatra)

$\int h_j \geq -\int g > -\infty \Rightarrow$ ~~$\lim h_j$~~ Mivel $\lim(h_j) = f$ m.m. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim(h_j) = f \Rightarrow f \in C_2$ és $\int f = \lim_{j\to\infty} \int h_j$.

Ellenőrzés: $h_j \geq f_j$

jelöljük $\varphi_j(x) = \inf\{f_j(x), f_{j+1}(x), \dots\}$, $\varphi_j \geq -g$, $\varphi_j \in C_2$,

~~$\int \varphi_j \geq -\int g > -\infty$~~, (φ_j) mon. növő.

$\varphi_j \leq g \Rightarrow \int \varphi_j \leq \int g < +\infty$. B.-L.-t alkalmazzuk

(φ_j)-re, $\lim \varphi_j = f \in C_2$, $\lim \int \varphi_j = \int f$.

$\varphi_j \leq f_j \leq h_j \Rightarrow \underbrace{\int \varphi_j}_{\to \int f} \leq \int f_j \leq \underbrace{\int h_j}_{\to \int f} \Rightarrow \lim_{j\to\infty} \int f_j = \int f$

(vagyis sup. és inf -okat véve visszavezettük a B.-L.-re,

$\downarrow$ mon. csökken $\quad \downarrow$ mon. nő

és mivel $\forall z \to \int f$ ~~$\Rightarrow$~~ $\Rightarrow \lim_{j\to\infty} \int f_j = \int f$)

(Vizsgaidőpontok:

máj. 28.–jún. 3
jún. 21.
jún. 28.–júl. 1.

} ezek nem jók)

Következmény: Tfh. $f_j \in C_2$, $\lim(f_j) = f$ m.m. és

$\exists g \in C_2 : |f| \leq g \Rightarrow f \in C_2$ (f integrálható)

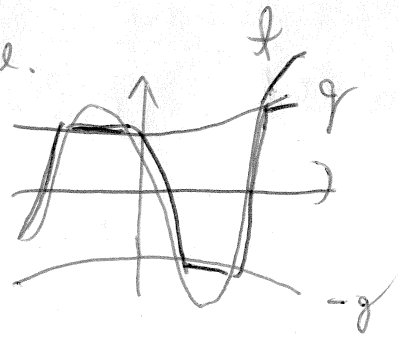
(majorálható)

itt nem j van! (Leb.-ben igen)

(nem állítjuk, hogy $\lim \int f_j = \int f$, csak azt, hogy f integrálható).

Biz: Legyen $g_j(x) = \begin{cases} f_j(x), & \text{ha } |f_j(x)| \leq g(x) \\ g(x), & \text{ha } f_j(x) > g(x) \\ -g(x), & \text{ha } f_j(x) < -g(x) \end{cases}$

pl.



A g_j fv. sorozatra lehet alk. a Lebesgue-tételt, mis $g_j \in C_2$, belátható

$|g_j| \leq g$. Mivel $|f| \leq g \Rightarrow \lim g_j = f$.

Ezért a Leb.-tétel alapján $f \in C_2$ ($\int f = \lim \int g_j$ DE $\int f \neq \lim \int f_j$)

Mérhető fv.-k

1) **Def:** Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fv.-t (Lebesgue szerint) mérhetőnek nevezünk, ha lépcsős fv-k m.m. konv. sorozatának a limesze.

Áll: Ha $f \in C_2$ (integrálható) $\Rightarrow f$ mérhető, $f = g - h$

$g, h \in C_1$, g, h lépcsős fv-k (mon. növekedő) sorozatának h.e. m.m.

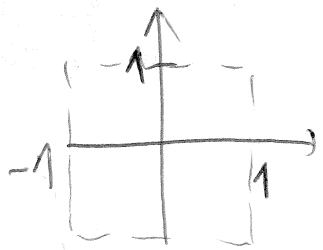
(integrálható majoráns van)

Áll.: Ha f mérhető és $\exists\, g \in L_2$: $|f| \le g \Rightarrow f$ integrálható

Következik az előbbi ~~tétel~~ (91. old.), (f_j) lépcsős fv. $(\in L_2)$ sorozat.

Megj.: Pl. olyan f fv., ami mérhető, de nem integrálható ($\mathbb{R}^n$-n),
$f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}^n$.

$$f_j(x) := \begin{cases} 1, & |x_k| \le j \quad k = 1, \dots, n \\ 0, & \text{máshol} \end{cases} \qquad f_j \text{ lépcsős fv.},$$



$\lim\limits_{j \to \infty} f_j(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, (f_j) mon. növő,

$\int f_j \to +\infty$, ha $f \in L_2$ ~~(ben)~~ lenne, akkor B.-L.-tétel szerint $\int f = \lim\limits_{j \to \infty} \int f_j \to \infty$

2) A mérhető fv-k tulajdonságai:

- **Tétel:** Ha f, g mérhető $\Rightarrow f+g,\ f-g,\ f \cdot g,\ f/g$ is mérhető, az utóbbinál feltéve, hogy $g(x) \ne 0$ m.m. x-re.

Bizi: • $f = \lim (f_j)$, $g = \lim (g_j)$ f_j, g_j lépcsős fv $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f + g = \lim \underbrace{(f_j + g_j)}_{\text{lépcsős}}$$

• $$h_j(x) = \underbrace{\begin{cases} \dfrac{1}{g_j(x)}, & g_j(x) \ne 0 \\ 0, & g_j(x) = 0 \end{cases}}_{\text{ez is lépcsős}} \Rightarrow \frac{1}{g(x)} = \lim h_j(x) \quad \text{m.m. } x\text{-re}$$

- <u>Tétel</u>: Tfh. (f_j) sorozat, f_j mérhető, $\lim(f_j) = f$ m.m. $\Rightarrow f$ is mérhető.

<u>Biz.</u>: Legyen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $g(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\int g < \infty$. $h_j(x) := \begin{cases} \frac{f_j(x)\, g(x)}{|f_j(x)| + g(x)} & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ h_j mérhető,

$|h_j| \leq g \in C_2 \Rightarrow h_j \in C_2$ (van integrálható majoráns $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Lebesgue-tétel). $\lim h_j(x) = \frac{f(x)\, g(x)}{|f(x)| + g(x)}$ m.m. x-re.

Alkalmazzuk a Lebesgue-tételt a (h_j) sorozatra $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim h_j \in C_2$, azaz $h := \frac{f \cdot g}{|f| + g} \in C_2 \Rightarrow h$ mérhető

$\Rightarrow f = \frac{gh}{g - |h|}$ mérhető. $\quad g - |h| > 0$ $(|h| < g)$

$|f|h + gh = g \cdot f$

$g \cdot h = f(g - |h|)$

$\frac{gh}{g - |h|} = f$

- <u>Tétel</u>: (bizonyítás nélkül) Tfh. $f_1, f_2, \dots f_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mérhető fv-k, $g \in \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ folyt. $\Rightarrow g \circ (f_1, f_2, \dots f_r)$ is mérhető.

(ez is kell!)

Mérhető halmazok, mértéke

1) <u>Def</u>: Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$, A halmaz karakter. fv-e:

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$

2) <u>Def:</u> Egy $A \in \mathbb{R}^n$ halmazt (Lebesgue-szerint) mérhetőnek nev., ha χ_A mérhető fv..

Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz (Lebesgue) mértékét így értelmezzük: $\lambda(A) := \begin{cases} \int \chi_A, & \text{ha } \chi_A \text{ integrálható} \\ +\infty, & \text{ha } \chi_A \text{ nem integrálható} \end{cases}$

$+\infty \geq \lambda(A) \geq 0$

3) <u>Tétel:</u> 2 mérhető halmaz különbsége, véges vagy megszámlálhatan végtelen sok mérhető halmaz uniója, ill. metszete is mérhető.

<u>Biz:</u> a) $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$ mérhető fv. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \chi_{A \setminus B}$ mérhető fv. $\Rightarrow A \setminus B$ h. mérhető.

b) $\chi_{\bigcup_{j=1}^{k} A_j} = \bigvee_{j=1}^{k} \chi_{A_j} = \sup\{\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_k}\}$.

$$\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} = \lim_{k \to \infty} \bigvee_{j=1}^{k} \chi_{A_j}$$

4) <u>Áll.:</u> Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz nullmértékű (eredeti ért. ben) (vagyis $\chi_A = 0$ m.m.) $\Leftrightarrow$ Lebesgue-mértéke 0 $(\lambda(A) = 0)$.

<u>Biz:</u> $\Rightarrow$ ha A nullmértékű, akkor $\lambda(A) = \int \chi_A = 0$, mivel $\chi_A = 0$ m.m.

$\Leftarrow$ ha $\lambda(A) = 0 \Rightarrow \int \chi_A = 0$, és mivel $\chi_A \geq 0 \Rightarrow \chi_A = 0$ m.m.

11. óra

Mérhető halmaz (ism.)

$$\lambda(A) := \begin{cases} \int \chi_A, & \text{ha } \chi_A \text{ int.} \\ +\infty \end{cases}$$

5) **Tétel:** Tfh. $A = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$, A_j halmazok páronként disjunktak ($A_j \cap A_k = \emptyset$, ha $j \neq k$), A_j mérhető.

Ekkor $\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(A_j)$ („a mértéke additív halmazfv.")

Biz:

lehet mindkét oldal véges vagy mindkettő ∞

$$\chi_{\bigcup_{j=1}^{k} A_j} = \sum_{j=1}^{k} \chi_{A_j} \Rightarrow \int \chi_{\bigcup_{j=1}^{k} A_j} = \int \sum_{j=1}^{k} \chi_{A_j} = \sum_{j=1}^{k} \int \chi_{A_j}$$

6) **Tétel:** Tfh. A_j mérhető, $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, A_j halmazok páronként disjunktak. Ekkor $\lambda(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)$. A mértéke σ-additív halmazfv.

Biz: $\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}$, integrálunk ~~(intbat)~~, alk. a Beppo-Levy-tételt.

(itt is lehet mindkét oldal véges, vagy mindkettő ∞ → esetszétválasztás kell)

Integrálás mérhető halmazokban

1) Def: Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ ~~tetsz.~~ mérhető halmaz, $f: A \to \mathbb{R}$ fv.

Értelmezzük ezen f segítségével az $\tilde{f}$ fv-t:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$

Ha $\tilde{f}$ integrálható, akkor f fv. int-ját így értelmezzük:

$\int_A f := \int \tilde{f} = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}$. f-t akkor nev. mérh.-nek, ha

$\tilde{f}$ mérhető. (megj.: $\tilde{f}$ már el tudjuk dönteni, hogy mérhető-e)

Megj.: 1, Ha $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ int. ($\mathbb{R}^n$-n) és $A \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz, akkor $h := g|_A$ ($h(x) = g(x)$, ha $x \in A$) int. A-n. Mis: legyen $\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x), & x \in A \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$

$\tilde{h} = g \cdot \chi_A$, ez mérhető, továbbá $\exists$ integrálható majoráns:

$|\tilde{h}| = |g \chi_A| \underset{\substack{\uparrow \\ \chi_A \leq 1}}{\leq} |g|$, $|g|$ int., mert g is int.

2.) Ha $A \subset \mathbb{R}^n$ mérhető h., $f: A \to \mathbb{R}$ int., $B \subset A$ mérh. $\Rightarrow$

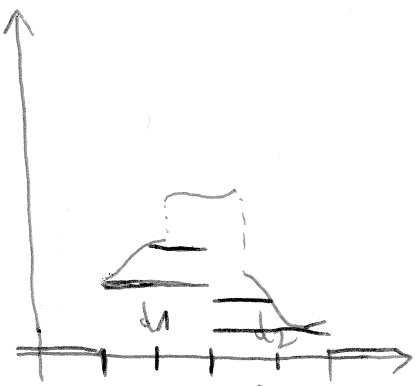
$\Rightarrow f|_B$ is int.

A Lebesgue és Riemann int. kapcsolata (egyváltozós esetben)

1) **Tétel:**

Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos fv. Ha f majdnem mindenütt folytonos (f folyt. az $[a,b]$ pontjaiban egy Leb. szerint nullmértékű halmaz kivételével). Ekkor f Lebesgue és Riemann szerint egyaránt integrálható és a két esetben az int. megegyezik.

Biz.:



pl. →

$d_1=\frac{a+c_1}{2}$ $\qquad$ $d_2=\frac{c_1+b}{2}$

Legyen $\varphi_1(x):=\begin{cases}\inf\{f(x): x\in[a,c_1]\}, & x\in[a,c_1]\\ \inf\{f(x): x\in(c_1,b]\}, & x\in(c_1,b]\end{cases}$

$\varphi_2(x):=\begin{cases}\inf\{f(x): x\in[a,d_1]\}, & x\in[a,d_1]\\ \inf\{f(x): x\in(d_1,c_1]\}, & x\in(d_1,c_1]\\ \dots\end{cases}$

és $\varphi_j(x)=0$, ha $x\notin[a,b]$ $\forall j$-re

Ekkor $\varphi_1,\varphi_2,\dots$ lépcsős fv-k sorozata, a sorozat monoton növő.

Ha $x\in[a,b]$-ben f folyt., akkor $\varphi_j(x)\to f(x)$ $(j\to\infty)$

Tehát $(\varphi_j)\to f$ m. mindenütt. ($\Rightarrow f$ mérhető)

Másrészt: $\int \varphi_j \le M(b-a)$ (korlátos az int.)

$\Big\downarrow$ 8 lemma $\quad (|f(x)|\le M)$ $\quad (M:\max(f(x)))$

$\Rightarrow f\in\mathcal{L}_1 \Rightarrow f$ Leb. int.

Továbbá $\int \varphi_j$ az f fv-nek az $[a,b]$ egy ~~(eg)~~ felosztásahoz ~~tartozó~~ ill. alsó összege. Hasonló módon értelmezhetők a ψ_j fv-k inf. helyett sup-al. Ezek egyrészt az f fv. felső összegei, másrészt a ψ_j fv-k lépcsős fv-k monoton csökkenő sorozata, amely m.m. tart f-hez.

$\int \psi_j \geq -M(b-a) \Rightarrow$ (B-lemma mon. csökkenő lépcsős fv. ~~(k)~~ sorozata) $\Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} \int \psi_j = \int f$. (felsőösszeg)

az előbbiek szerint: $\lim\limits_{j\to\infty} \int \varphi_j = \int f$

$\Rightarrow f$ R. int-ható és f R. integrálja $= f$ Leb. int. ja

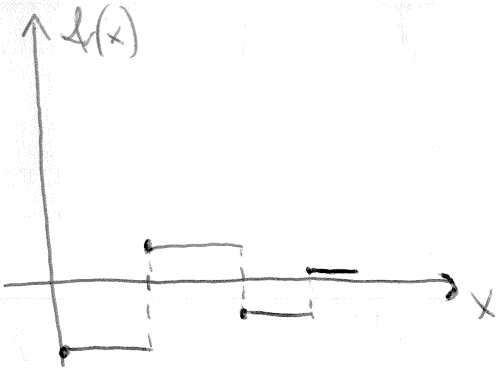
2) <u>Tétel</u> (bizonyítás nélkül) Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ kor. fv. Ha f Riemann-integrálható $\Rightarrow f$ m.m. folyt.

<u>Köv.</u> Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ kor. és R. int-ható. $\overset{f \text{ folyt. m.m.}}{\Rightarrow}$ Leb. int-ható. és a 2 féle int. egyenlő.

(a Leb.-int. ~~az~~ többszörösen ~~általánosabb~~, mint a Rieman-int.)

<u>Megj.</u> Abból, h. f R.-féle improprius int. létezik, <u>nem köv.</u>, hogy f Leb.-int-ható, mis a Leb. int. esetben f int-ható $\Rightarrow |f|$ is int-ható. Ez nem érvényes a R. féle impr. int.-ra.

pl. $f(x) := (-1)^j \cdot \frac{1}{j}$, ha $j-1 \leq x < j$ $\quad j=1,2,\dots$



f impr. int. ja konvergens

$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cdot \frac{1}{j}$ konv., de

$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ div.

<u>Példa</u> olyan fv.-re, mely Lebesgue szerint int.h., de R. szerint nem int.h.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rac.}, x \in [0,1] \\ 0, & x \text{ irrac.}, x \in [0,1] \end{cases}$$

<u>Fubini tétele (biz. nélkül, egyszerűség kedvéért kétváltozós esetben)</u>

1) Tfh. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ int.h., akkor m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén $y \mapsto f(x,y)$ is int.h., továbbá $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$ szintén int.h., és

nem mindig, pl. $\int f\,dx$ divergálhat

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right] dx \quad \left(= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right] dy \right).$$

2) <u>Megj.:</u> Nemnegatív f esetén az áll. „megfordítható" (ha az 1D-s $\int$-ok véglesek, akkor a 2D-s is).

Általánosabb integrál fogalmak

1) Lebesgue - Stieljes-integrál egyváltozóban

Legyen $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő. ~~(Ez meghatározza)~~ Ennek segítségével értelmezzük az int.-ok mértékét:

$$\mu[a,b] = F(b+0) - F(a-0)$$

$$\mu(a,b) := F(b-0) - F(a+0), \quad \mu[a,b) := F(b-0) - F(a+0) \ldots$$

(a mérték σ-additív).

1 pont mértéke nem feltétlenül 0

2) (absztrakt halmaz: elemi események

$\downarrow$

—"— fv.: val. változó)

$L^2(M)$ függvénytér

1) <u>Def.:</u> Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ (Leb.) mér. h., tekintsük az összes olyan $f: M \to \mathbb{R}$ t.,ami mérhető és $|f|^2$ int.h. M-n. Jelölje ezt a fv. halmazt $L^2(M)$.

2) <u>Áll.</u> $L^2(M)$ vektortér a fv-k közötti szokásos összeadással és valós számmal való szorzással.

<u>Biz.:</u> Csak kell az első sorban belátni, hogy az 2 művelet nem vezet ki az $L^2(M)$ halmazból.

a) Ha $f, g \in L^2(M) \Rightarrow f$ és g mérhető $\Rightarrow f+g$ is mérhető

$$0 \le |f+g|^2 \le (|f|+|g|)^2 \le 2[|f|^2+|g|^2]$$

ez inth.

$\Downarrow$

$|f+g|$ is mérhető,

$|f+g|^2$ — " — .

(van inth. majoránsa $|f+g|^2$-nek és mérhető $\Rightarrow$ inthető)

b) Ha $f \in L^2(M)$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda \cdot f$ mérh., $|\lambda f|^2 = |\lambda|^2 |f|^2$ inth.

c) $L^2(M)$-beli műveletekre vonatkozó szabályok köv. ~~abból~~ az ~~hogy~~ $\mathbb{R}$-ben érvényes szabályokból.

3) <u>Áll:</u> Tfh. $f, g \in L^2(M)$, akkor $(f \cdot g)$ inthető.

<u>Biz:</u> Egyszerű $f \cdot g$ mérhető, $|f \cdot g| = |f| \cdot |g| \le \frac{1}{2}[|f|^2 + |g|^2]$, ez inth.

4) <u>Def:</u> Értelmezzük az $f, g \in L^2$ fv-k „skalárszorzatát":

$$\langle f, g \rangle := \int_M f \cdot g$$

<u>Áll:</u> A fenti skalárszorzattal $L^2(M)$ eukl. tér.

<u>Biz.:</u> 1) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

2) $\langle \lambda f, g \rangle = \int_M (\lambda f) g = \lambda \int_M f \cdot g = \lambda \langle f, g \rangle$

3) $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$

4) $\langle f, f \rangle = \int_M f^2 \ge 0$, $f = 0$ esetén $\langle f, f \rangle = 0$

Fordítva, ha $0 = \langle f, f \rangle = \int_M \underbrace{f^2}_{\geq 0} \Rightarrow f^2 = 0$ m.m., $f = 0$ m.m.

<u>Pontosítás:</u> $L^2(M)$ tér 0-eleme: m.m. 0 fv., egy fv. osztály, amelybe azok a fv.-k tartoznak, amelyek m.m. 0-val egyenlők.

5) <u>Tétel:</u> <u>(biz. nélkül) Riesz-Fischer-tétel:</u>

$L^2(M)$ teljes eukl. tér, azaz Hilbert-tér.

<u>Megj.:</u> 1.) $L^2(M)$-beli fv.-k normája: $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left\{ \int_M f^2 \right\}^{1/2}$

2.) Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség $L^2(M)$-ben:

$$\left| \int_M f \cdot g \right| = |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\| = \left\{ \int_M |f|^2 \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_M |g|^2 \right\}^{1/2}$$

$L^2(M)$-ben Lebesgue-int. van, mert Riemann-al nem lenne teljes!

$L^p(M)$ tér

1) <u>Def:</u> Legyen $1 \leq p < \infty$, $M \subset \mathbb{R}^n$ mér. halmaz. Tek. az összes $f: M \to \mathbb{R}$ mér. fv.-t, amelyre $|f|^p$ integrálható. Jelöljük ezt a fv.-halmazt $L^p(M)$-el.

2) <u>Áll:</u> $L^p(M)$ vektortér a szokásos műveletekkel.

Biz: a) $f, g \in L^p(M) \Rightarrow f, g$ méh. $\Rightarrow f+g$ is méh..

Továbbá $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq 2^{p-1} \cdot (\underbrace{|f|^p}_{\text{inth.}} + \underbrace{|g|^p}_{\text{inth.}})$.

$\rightarrow$ van inthető majoráns, méhető $\rightarrow$ inthető $f+g$

b) $f \in L^p(M), \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f \in L^p(M)$

3) Def: Értelmezzük egy $f \in L^p(M)$ fv. normáját:

$$\|f\| = \left\{ \int_M |f|^p \right\}^{1/p}.$$

Tétel: $L^p(M)$ a fenti „normával" normált tér.

Biz: 1) $\underbrace{\|f\|_{L^p(M)}}_{L^p(M)\text{-beli norma}} \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow f = 0$ m.m. ($L^p(M)$ elemei fv. osztályok)

2) $$\|\lambda \cdot f\|_{L^p(M)} = \left\{ \int_M |\lambda f|^p \right\}^{1/p} = \left\{ \int_M |\lambda|^p \cdot |f|^p \right\}^{1/p} = \left\{ |\lambda|^p \int_M |f|^p \right\}^{1/p} =$$

$$= |\lambda| \cdot \left\{ \int_M |f|^p \right\}^{1/p} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L^p(M)}$$

3) $\|f+g\|_{L^p(M)} \leq \|f\|_{L^p(M)} + \|g\|_{L^p(M)}$ „Minkowski-egyenlőtlenség", ezt külön biz.

4) a) Young-egyenlőtlenség legyen $1 < p < \infty$ ($p=1$ esetén triviális).

Legyen q: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(1 < q < \infty)$. Ha $a, b \geq 0$, akkor $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

($b=0$ triv)

Biz: A bizonyítandó egyenlőtlenséget leosztva b^q-val:

$$a b^{1-q} \le \frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q} \quad , c := a b^{1-q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^p = a^p \cdot b^{(1-q)p} = a^p \cdot b^{-q} \quad , \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q} \Rightarrow$$

$$c \le \frac{c^p}{p} + \frac{1}{q} \text{, ez azért igaz } c \ge 0 \qquad \Rightarrow q = p \cdot (q-1)$$

esetén, mert $g(c) := \frac{c^p}{p} - c + \frac{1}{q}$ $\quad g(c) \ge 0$

$$g'(c) = c^{p-1} - 1 \begin{cases} <0 & 0 \le c < 1 \\ =0 & c = 1 \\ >0 & 1 < c \end{cases} \text{ és } g(1) = 0 \Rightarrow \text{ mivel } g'(1) = 0$$

lok. min $\Rightarrow g(c) \ge g(1) = 0$

b) Hölder-egyenlőtlenség

Tfh. $f \in L^p(M)$, $g \in L^q(M)$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ekkor $f \cdot g$ int.h., és $\left| \int_M f \cdot g \right| \le \int_M |f| \cdot |g| \le \|f\|_{L^p(M)} \cdot \|g\|_{L^q(M)}$

($p = q = 2 \to$ Cauchy-Schw.)

$$a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(M)}} \qquad (\|f\| \ne 0, \|g\| \ne 0 \to \text{egyébként ha valamelyik } 0 \to \text{triv})$$

$$b := \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(M)}}$$

Young-egy. miatt

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|} \le \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q} \text{, int. } M\text{-en.}$$

$$\frac{1}{\|f\|\|g\|}\cdot\int_M |f(x)|\cdot|g(x)|\,dx \le \frac{1}{p\|f\|^p}\cdot\underbrace{\int_M |f|^p\,dx}_{\|f\|^p_{L^p}} + \frac{1}{q\|g\|^q}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\int_M |g(x)|^q\,dx}_{\|g\|^q_{L^q}} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

c) <u>Minkowski-egyenlőtlenség bizonyítása</u>

$$\|f+g\|^p = \int_M |f+g|^p \overset{\text{Hölder}}{\le} \int_M |f+g|^{p-1}|f+g| \le \int_M \underbrace{|f+g|}_{L^q\text{ norma}}\cdot\underbrace{|f|}_{L^p\text{ norma}} +$$

$f, g \in L^p(M)$

$$+\int_M |f+g|^{p-1}|g| \le \|f\|_{L^p(M)}\cdot\||f+g|^{p-1}\|_{L^q(M)} + \|g\|_{L^p(M)}\cdot\||f+g|^{p-1}\|_{L^q(M)} =$$

$$= \|f\|_{L^p(M)}\cdot\|f+g\|^{p/q}_{L^p(M)} + \|g\|_{L^p(M)}\cdot\|f+g\|^{p/q}_{L^p(M)} \quad /:\|f+g\|^{p/q}_{L^p(M)}$$

$$p - p/q = p\left(1-\frac{1}{q}\right) = p\cdot\frac{1}{p} = 1$$

$$\boxed{\|f+g\|_{L^p(M)} \le \|f\|_{L^p(M)} + \|g\|_{L^p(M)}}$$

mert:

$$\||f+g|^{p-1}\|_{L^q} = \Big(\underbrace{\int |f+g|^{\overbrace{q(p-1)}^{p}}}_{\|f+g\|^p_{L^p}}\Big)^{\frac{1}{q}}$$

megjj.:

(L^p is teljes tér!)

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$\frac{1}{q} = 1-\frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$$

$$\Downarrow$$

$$p = q\cdot(p-1)$$

Analízis II.

~~3. félév~~

Binomiális sor. Taylor-formula többváltozós függvényekre.

Normált téren értelmezett valós függvények lokális szélsőértékének szükséges, ill. elegendő feltételei. ~~Alkalmazás a variációszámításban.~~

Az implicit függvény tétel ~~([illegible])~~, az inverz függvény tétel, feltételes szélsőérték.

~~Az elsőrendű explicit differenciálegyenlet rendszer fogalma, kezdeti érték feladat. A megoldás létezése, egyértelműsége.~~

A vonalintegrál különböző tipusai, alaptulajdonságok. A vonalintegrál úttól való függetlenségének és a primitiv függvénynek a kapcsolata. Az úttól való függetlenség egyszeresen összefüggő tartományok esetén.

A komplex függvények differenciálhatóságának geometriai jelentése, a differenciálhatóság szükséges feltételei. Cauchy-alaptétel. Cauchy-féle integrálformula, Cauchy-tipusú integrál. Morera tétele. Weierstrass tétele. Taylor-sor. A Liouville-tétel, az algebra alaptétele. Laurent-sor, izolált szinguláris pontok. A reziduum-tétel, a reziduum kiszámitása, alkalmazás improprius integrálok kiszámitására. Inverz függvény, logaritmus függvény. ~~A konform leképezések alaptétele, fizikai alkalmazás.~~

Lebesgue szerint nullmértékű halmaz. A lépcsős függvények interáljáról szóló két lemma. Interálás a C_1 és C_2 függvényosztályban. Beppo Levi és Lebesgue tétele. ~~Fatou-lemma.~~ A mérhető függények fogalma, tulajdonságai. A Lebesgue-integrál és a Riemann-integrál kapcsolata. Fubini tétele. Paraméteres integrálok. Az absztrakt halmazokon vett integrál bevezetésének alapgondolata. Az $L^2(A)$ függvénytér, Riesz-Fischer-tétel. A $L^p(A)$ függvénytér, a Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség. A $L^\infty(A)$ függvénytér, a l^p tér.