→ 1. tétel:

Vektortér (lineáris tér), jel: $(V, +, \cdot)$; ezt vektortérnek nevezik, ha az alábbiak teljesülnek:

- összeadásra Ábel-csoport:
  1.) $v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 \in V$
  2.) $\exists\, 0 \in V$, hogy $v + 0 = v$ $\forall v \in V$-re
  3.) $\forall v \in V$-hez $\exists -v$: $v + (-v) = 0$
  4.) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$; $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$-re
- számmal való szorzásra:
  1.) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v \in V$ $\forall$
  2.) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu) v \in V$
  3.) $1v = v$; $0 \cdot v = 0$

mindez akkor is igaz, ha „számok" helyett komplex számokat vagy számtestet használunk!

Normált tér:

DEF.: $(X, \|.\|)$ normált térnek nevezzük, ha X egy vektortér, $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ pedig olyan függvény, melyre a következők teljesülnek:

1.) $\forall x \in X$, $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2.) $\forall x \in X$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

~~3.) $\forall x \in X$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\|\lambda x\|$~~

3.) $\forall x, y \in X$ esetén $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (háromszög-egyenlőtlenség)

pl. 1.) $(X, \|.\|) = (\mathbb{R}^n,$ euklideszi norma$)$

$$\|x_1, \dots, x_n\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

pl. 2.) $(\mathbb{R}^n, \|.\|_{max})$, $\|(x_1, \dots, x_n)\|_{max} = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

pl. 3.) $\|x + y\|_{max} = \max\{|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|\} \leq \max\{|x_1| + |y_1|, \dots, |x_n| + |y_n|\} =$

$$= |x_k| + |y_k| \leq \max_j |x_j| + \max_j |y_j| \underset{DEF.}{=} \|x\|_{max} + \|y\|_{max}$$

pl. 4.) $C_0[0,1] = (\underbrace{\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ folytonos}}_{X}, \underbrace{\|f\| = \max_{[0,1]} |f(x)|}_{\|.\| \text{ megadása}})$

ez a vektortér, melynek ez az alaphalmaza

$[f+g](x) := f(x) + g(x)$

$[\lambda f](x) := \lambda f(x)$

1.) $\lambda(f+g) \overset{?}{=} \lambda f + \lambda g$ → akkor, hogy igaz legyen, azt kell belátni, hogy $\forall x \in [0,1]$-re

$\lambda(f+g)(x) = (\lambda f + \lambda g)(x)$

$\lambda(f+g)(x) \overset{DEF}{=} \lambda((f+g)(x)) \overset{DEF.}{=} \lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) \overset{DEF.}{=} (\lambda f + \lambda g)(x)$

* igazoljuk, hogy $\|.\|$ ∃

1.) $\|f\| \geq 0$, igaz, mert $\forall x$-re $|f(x)| \geq 0$

ha $\|f\| = 0$, akkor $\forall x$-re $|f(x)| = 0 \Rightarrow \forall x$-re $f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$

2.) $\|\lambda f\| \overset{DEF.}{=} \max\limits_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |\lambda|\cdot|f(x)| = |\lambda|\cdot\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = |\lambda|\cdot\|f\|$

3.) $\|f+g\| \overset{DEF.}{=} \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| \leq \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| + \max\limits_{x\in[0,1]} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$

Metrikus tér: (távolság fogalmának általánosítása), jel: (X, ρ)

X ↑ halmaz, ρ ↑ távolságfüggvény, metrika

DEF.: A fent párost metrikus térnek nevezzük, ha

$\rho: (X \times X) \to \mathbb{R}$:
1.) $\rho(a,b) \geq 0 \quad \forall a,b \in X, \quad \rho(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2.) $\rho(a,b) = \rho(b,a), \quad \forall a,b \in X$
3.) $\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(b,c) \quad \forall a,b,c \in X$

pl. 1.: néhány város, ρ: eljutási idő egyikből a másikba (repülővel)

pl. 2.: négyféle jelből álló, 100 hosszú karaktersorozatok, ρ: azon pozíciónk, ahol különböző karakter van

pl. 3.: $(X, \|.\|)$, ahol $\rho(x,y) = \|x-y\|$ → ellenőrizzük:

$\rho(x,y) = \|x-y\| \geq 0$, $\rho(x,y) = 0 = \|x-y\| \Rightarrow x - y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = y$

pl. 4.: $\rho(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\cdot\|x-y\| = \|x-y\| = \rho(x,y)$

pl. 5.: $\rho(a,c) + \rho(c,b) = \|a-c\| + \|c-b\| \geq \|a-c+c-b\| = \|a-b\| = \rho(a,b)$

* a normált tér spec. esete a metrikus térnek

~> 2. tétel: ~~topológiai~~ topológiai alapfogalmak

DEF.: ~~Vagyis~~ ~~A~~ következő halmazt: ~~olyan~~ $\{x \in X : \rho(x,a) < r\} = B_r(a)$ az a középpontú, r sugarú gömbnek/környezetének nevezzük (adott (X,ρ) metrikus térben); környezet: $r > 0$.

\# pont és halmaz viszonya:

DEF.: Azt mondjuk, hogy x belső pontja M-nek, ha x-nek van olyan környezete, amely M-ben van. ($\exists r > 0 \;\; B_r(x) \subset M$), jel: $\text{int}\, M$

Azt mondjuk, hogy x külső pontja M-nek, ha $\exists$ olyan környezete, ami diszjunkt M-től, azaz teljesen M^c-ben van. jel: $\text{ext}\, M$

Azt mondjuk, hogy x határpontja M-nek, ha x $\forall$ környezete tartalmaz M-beli és M^c-beli pontot is. jel: ∂M

$\text{ext}\, M \overset{\text{DEF.}}{=} \text{int}\, M^c$

további jelölések: $\text{int}\, M \cup \partial M = \bar{M}$ „M lezártja"

ÁLL.: $\forall (X,\rho)$ metrikus tér és $M \subset X$ esetén: $X = \text{int}\, M \,\dot{\cup}\, \text{ext}\, M \,\dot{\cup}\, \partial M$

BIZ.: Mivel $\text{int}\, M$, $\text{ext}\, M$, $\partial M \subset X$, ezért azt kell igazolni, hogy minden $x \in X$ valamelyikben benne van.

Tekintsünk egy x-et: ha $x \in \text{int}\, M$, akkor OK;

ha nincs benne, akkor nincs M-ben lévő környezete, akkor megnézzük, van-e M^c-beli környezete;

ha van, akkor OK: $x \in \text{ext}\, M$;

ha ebben sincs benne, akkor a környezete olyan, hogy M-beli és M^c-beli pontot is tartalmaz, vagyis $x \in \partial M$. Nyilvánvaló, hogy a fenti halmazok diszjunktak.

pl. 1.) $X = \mathbb{R}$, $\rho(a,b) = |b - a|$, $M = (0,1]$

$\text{int}\, M = (0,1)$, $\partial M = \{0,1\}$, $\text{ext}\, M = \mathbb{R} \setminus [0,1]$, $\bar{M} = [0,1]$

pl. 2.) $X = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{Z}$

$\text{int}\, M = \emptyset$, $\partial M = \mathbb{Z}$, $\text{ext}\, M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\bar{M} = \mathbb{Z}$

\# topológiai fogalmak metrikus térben, (X,ρ)

DEF. Azt mondjuk, hogy az $M \subset X$ halmaz nyílt, ha $\forall$ pontja belsőpont (azaz ha $x \in M$, akkor $x \in \text{int}\, M$)

következmény: mivel $\text{int}\, M \subset M$, és a fenti azt jelenti, hogy $M \subset \text{int}\, M$, akkor $M = \text{int}\, M$

DEF.: ~~Az~~ Az $M \subset X$ halmazt zártnak nevezzük, ha tartalmazza határpontjait.

következmény: mivel $\text{int}\, M \subset M$, ezért a fenti reláció azt jelenti, hogy ~~int M ∪ ∂M~~ $\text{int}\, M \dot\cup \partial M = \bar M \subset M$, másrészt az $\bar M$ bővebb kell, hogy legyen. $\text{ext}\, M \subset M^c$ miatt az M lezártja biztos, hogy bővebb, mint M, vagyis M zárt $\Leftrightarrow M = \bar M$.

ÁLL.: M nyílt $\Leftrightarrow M^c$ zárt és M zárt $\Leftrightarrow M^c$ nyílt

BIZ.: M nyílt $\Leftrightarrow M = \text{int}\, M$; tekintsük $X = \underbrace{\text{int}\, M}_{M} \dot\cup \underbrace{\partial M \dot\cup \text{ext}\, M}_{M^c}$ alakot, ahol

az $\text{ext}\, M = \text{int}\, M^c$ és $\partial M = \partial M^c$, vagyis az $M^c = \partial M^c \dot\cup \text{int}\, M^c = \overline{M^c}$, azaz M^c zárt.

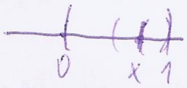
visszafelé ugyanez: ha M zárt $\Rightarrow M = \text{int}\, M \dot\cup \partial M$, azaz $M^c = \text{ext}\, M = \text{int}\, M^c$,

tehát $M^c = \text{int}\, M^c \Rightarrow M^c$ nyílt

pl. 1.: $(X,\varrho) = (\mathbb{R}; \varrho(a,b) = |b-a|)$; $(0,1)$ nyílt-e?

azt kell megvizsgálni, hogy $(0,1)$ minden pontja belső pont-e.

$x \in (0,1)$, legyen $r = \min\{\varrho(x,0), \varrho(x,1)\}$,



ekkor $B(x,r) = (x-r, x+r) \subset (0,1)$. Ez $\forall$ x-re igaz $\Rightarrow (0,1)$ nyílt.

pl. 2.: $(X,\varrho) = (\mathbb{R}, \varrho(a,b) = |b-a|)$, $[0,\infty)$ zárt-e?

(zárt $\Leftrightarrow$ tartalmazza a határpontjait)

Ez csakis a 0, ennek $\forall$ környezete tartalmaz a poz. és neg. számokat is, azaz határpont. Lehet-e neg. szám határpont? Nem, mert van olyan környezete, amely csak neg. számokat tartalmaz. Ugyanígy minden pozitív számnak van olyan környezete, amely csak pozitív számokat tartalmaz. Továbbá $0 \subset [0,\infty) \Rightarrow [0,\infty)$ zárt.

pl. 3.: $(X,\varrho) = ([0,1), \varrho(a,b) = |b-a|)$; $[\frac{1}{2}; 1)$ nyílt? zárt? egyik sem?

zárt, határpontja $\frac{1}{2}$ → ennél kisebb/nagyobb szám határpont nem lehet.

pl. 4.: $(X,\varrho) = (\mathbb{Z}, \varrho(a,b) = |b-a|)$, $\{2\}$ → nyílt és zárt is

→ nincs határpontja

$B(2, \frac{1}{2}) = \{2\}$ → van olyan környezete, ami teljes egészében (azaz minden pontja) belső pont.

$\Rightarrow \{2\}$ nyílt

ÁLL.: $\forall (X,\varrho)$ metrikus térben $\forall M \subset X$ halmazra az $\text{int}\, M$ mindig nyílt és $\bar M = \text{int}\, M \cup \partial M$ zárt!

Biz.: $\mathrm{int}\, M$ nyílt $\Longleftrightarrow$ minden pontja belső pont, azaz $\forall x \in \mathrm{int}\, M$-re van olyan $B_r(x)$, hogy $B_r(x) \subset \mathrm{int}\, M$

Ha $x \in \mathrm{int}\, M$, akkor van olyan r_0, hogy $B_{r_0}(x) \subset M$. Legyen $r = \frac{r_0}{2}$, ekkor minden olyan y, amely $B_r(x)$-beli: $\varrho(y, x) < r = \frac{r_0}{2}$. Belátjuk, hogy $y \in \mathrm{int}\, M$. Ha $z \in B_r(y)$, akkor $\varrho(y, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(x, z) < r + r = r_0 \Rightarrow z \in M \Rightarrow y$ belső pont.

$\mathrm{ext}\, M = \mathrm{int}\, M^c$, ami nyílt

$\overline{M} = \mathrm{int}\, M \overset{*}{\cup} \partial M = X \setminus \mathrm{ext}\, M = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nyílt}}}{(\mathrm{ext}\, M)}^c \Rightarrow \overline{M}$ zárt

\# M legszűkebb halmaza $\overline{M}$

Áll.: Nyílt halmazok uniója nyílt, és véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt.
(a) (b)

Biz.: a) Azt kell bizonyítani, hogy ~~x eleme az uniónak~~ ha x eleme az uniónak, akkor egy környezete is $x \in \left(\bigcup_{r \in \Gamma} M_r\right)$

Van olyan halmaz, amelynek eleme $\Rightarrow$ van olyan környezete, amelyik abban a halmazban van $\Rightarrow$ ez az összes halmaz uniójában van $\Rightarrow$ az unió nyílt

b) Azt kell igazolni, hogy a metszet minden pontjának van olyan környezete, amely szintén a metszetben van. Azaz legyen

$x \in M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k$-ban olyan $r_1, \ldots, r_k$, hogy $B_{r_1}(x) \subset M_1, \ldots, B_{r_k}(x) \subset M_k$

Legyen $r_0 = \min\{r_1, \ldots, r_k\}$, ekkor
$$\left.\begin{array}{l} B_{r_0}(x) \subset B_{r_1}(x) \\ \\ B_{r_0}(x) \subset B_{r_k}(x) \end{array}\right] \quad B_{r_0}(x) \subset \bigcap_{j=1}^{k} M_j$$

Áll.: Zárt halmazok metszete zárt, és véges sok zárt halmaz uniója is zárt.

Biz.: $\bigcap_{r \in \Gamma} M = \left(\bigcup_{r \in \Gamma} M^c\right)^c$ miatt $\bigcup_{r \in \Gamma} M^c$ nyílt, azaz ennek komplementere zárt.

$$\underset{\text{zártak}}{M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k} = \underset{\Rightarrow \text{ nyíltak}}{(M_1^c \cap M_2^c \cap \ldots \cap M_k^c)^c} \rightarrow \text{a metszet nyílt, a komplementere zárt.}$$

→ 3. tétel: sorozatok konvergenciája metrikus terekben

sorozat: $\mathbb{N} \to X$ függvény; $a_1, a_2, \ldots$; jel: (a_n) vagy (a_k)

DEF.: Azt mondjuk, hogy az $(a_n) \subset (X, \varrho)$ sorozat határértéke az "a" $\in X$ elem, ha "a" minden környezetéhez $\exists n_0$ index: $n > n_0$ esetén "a" benne van ebben a környezetben.

átfogalmazás: 1.) ha minden ε-hoz $\exists n_0$: $n > n_0 \Rightarrow a_n \in B_\varepsilon(a) \Leftrightarrow \varrho(a_n, a) < \varepsilon$

2.) $\Leftrightarrow$ (a_n) sorozat tart a-hoz, ha $\varrho(a_n, a) \to 0$

limesz tulajdonságai:

1.) A limesz egyértelmű! Ha ugyanis $(a_n) \to a$ és $(b_n) \to b$ is igaz lenne, akkor $\varrho(a,b) = r$ esetén vegyük azt az indexet, amely után az

$\varrho(a_n, a) < \frac{r}{2}$ és $\varrho(a_n, b) < \frac{r}{2}$; $r = \varrho(a,b) \leq \varrho(a_n, a) + \varrho(a_n, b) < r \Rightarrow r < r$ ↯ ellentmondás

részsorozat: az eredeti sorozat egyes elemeit vele azonos sorrendben tartalmazó sorozat

2.) ÁLL.: Ha $(a_n) \to a$ és (b_n) részsorozata (a_n)-nek, akkor $(b_n) \to a$

sorozatok összefésülése: $(a_n), (b_n) \to$ ezekből $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$

3.) ÁLL.: Ha $(a_n) \to a$ és $(b_n) \to a$, akkor az összefésült sorozatnak is ez a határértéke

4.) ÁLL.: Ha $(a_n) \to a$, akkor $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ korlátos ($\Leftrightarrow \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_r(x)$ valamilyen $r \in \mathbb{R}$ és $x \in X$ esetén)

BIZ.: Ha $(a_n) \to a$, akkor 1-hez is van olyan n_0: $n > n_0$ esetén $a_n \in B_1(a)$.

Vegyük meg a $\varrho(a_1, a), \varrho(a_2, a), \ldots, \varrho(a_{n_0}, a)$ távolságokat, és legyen $r > \max\{1, \varrho(a_1, a), \ldots, \varrho(a_{n_0}, a)\}$, a-nak ekkor az összes pont $B_r(a)$-beli, mert mindegyik pont a-tól vett távolsága r-nél kisebb.

limesz művelet tulajdonságai normált terekben:

DEF.: Legyenek $(a_n), (b_n)$ valamilyen $(X, \|.\|)$ normált térbeli sorozatok! Ekkor ezek összege az a sorozat, amelynek n-edik eleme $a_n + b_n$.

ÁLL.: Ha az $(a_n) \to a$, $(b_n) \to b$, akkor $(a_n + b_n) \to a + b$.

BIZ.: Azt kell igazolni, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \|(a_n + b_n) - (a + b)\| \to 0$$

$\varrho(a_n + b_n, a + b) = \|a_n + b_n - (a + b)\|$, azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz kell találni olyan n_0-t: $n > n_0$ esetén $\|(a_n + b_n) - (a + b)\| < \varepsilon$.

$(a_n)\to a$ és $(b_n)\to b$ miatt $\frac{\varepsilon}{2}$-höz van olyan n_1, n_2 index, hogy $n>n_1, n>n_2$ esetén

$\delta(a_n,a)=\|a_n-a\|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\delta(b_n,b)=\|b_n-b\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $n>\max(n_1,n_2)$, ekkor

$$\|a_n+b_n-(a+b)\|\le\|a_n-a\|+\|b_n-b\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ÁLL.: Ha $\lambda_n\subset\mathbb{R}$, $\lambda_n\to 0$ és (a_n) korlátos, akkor $\lambda_n a_n\to 0$.

BIZ.: Ha (a_n) korlátos $\Rightarrow \|a_n\|\le A$ $\forall n$-re, ekkor

$0\le\|\lambda_n a_n\| = |\lambda_n|\cdot\|a_n\|\le|\lambda_n|\cdot A\to 0$, rendőr-elv miatt $\|\lambda_n a_n\|\to 0$!

ÁLL.: Ha $\lambda_n\to\lambda$ és $(a_n)\to a$ $(X,\|\cdot\|)$ térben, akkor $(\lambda_n a_n)\to\lambda a \iff \|\lambda_n a_n-\lambda a\|\to 0$

BIZ.: $\|\lambda_n a_n-\lambda a\| = \|\lambda_n a_n-\lambda a_n+\lambda a_n-\lambda a\|\le\|\lambda_n a_n-\lambda a_n\|+\|\lambda a_n-\lambda a\| =$

$$= \|(\lambda_n-\lambda)a_n\|+\|\lambda(a_n-a)\| = \underbrace{\|(\underset{\lambda_n\to\lambda,\ 0}{\lambda_n-\lambda})\underset{\text{korlátos}}{a_n}\|}_{\to 0}+\underbrace{\underset{\text{rögzített}}{|\lambda|}\cdot\|\underset{a_n\to a,\ 0}{a_n-a}\|}_{\to 0}\to 0$$

rendőr-elv miatt

→ 4. tétel:

TÉTEL: Egy (X, ϱ) metrikus térbeli M halmaz pontosan akkor zárt, ha minden $(x_n) \subset M$ konvergens sorozat esetén (azaz $(x_n) \to x$ esetén) $x \in M$.

Biz.: a) egyik irány: Feltesszük, hogy M zárt, $(x_n) \to x$, $(x_n) \subset M$. Most azt kell igazolni, hogy $x \in M$. Tudjuk, hogy x-nek minden környezetében van x_n sorozatelem, ami M-beli. Ez $X = \operatorname{int} M \,\dot\cup\, \partial M \,\dot\cup\, \operatorname{ext} M$ miatt azt jelenti, hogy $x \in \operatorname{int} M$ vagy $x \in \partial M$. $x \in \operatorname{int} M$ elvezető, mert akkor $x \in M$ vagy $x \in \partial M$. Mivel M zárt, $M \supset \partial M \ni x$, azaz ekkor is $x \in M$.

b) másik irány: Azt kell igazolni, hogy $(x_n) \subset M$, $(x_n) \to x$ esetén $x \in M \Rightarrow M$ zárt. Ehhez tudni kellene, hogy M határpontjai M-ben vannak. Legyen y határpont. $B(y, 1)$-ben van M-beli pont $:= y_1$; $B(y, \frac{1}{2})$-ben is van M-beli pont, legyen ez y_2, etc. → biztos, hogy ekkor $(y_n) \subset M$. Sőt, minden ε-hoz egy indextől kezdve $y_n \in B(y, \varepsilon) \Rightarrow y_n \to y \Rightarrow y \in M$.

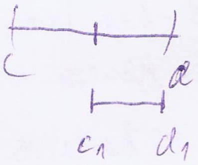
DEF.: Azt mondjuk, hogy az (X, ϱ) metrikus tér egy M halmaza sorozatkompakt, ha minden benne haladó $(x_n) \subset M$ sorozatnak van olyan részsorozata, amelyre $(x_{n_k}) \to x \in M$.

Pl. 1.: $(X, \varrho) = (\mathbb{R}, \varrho(a,b) = |b-a|)$, $G = [0,1)$. Legyen $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Ez $\mathbb{R}$-ben konvergens, $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$, ezért minden részsorozata is, de ~~0 ∉ (0,1)~~ $0 \in [0,1)$

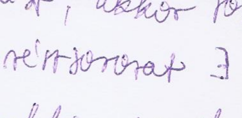
TÉTEL: Ha $M \subset (\mathbb{R}^n, \varrho(a,b) = |b-a|)$ korlátos és zárt, akkor sorozatkompakt.

Biz.: Először azt lássuk be, hogy egy konvergens részsorozat $\exists$!

Tfh. $(x_n) \subset M$, $\dim = 1$ esetén: ha M korlátos, akkor az első komponensei is azok, vagyis $c \le \underbrace{x_{n,1}, x_{n_2}, \dots}_{\text{a sorozat tagjainak első komponensei}} \le d$.



Vesszük azt a felét, ahol végtelen sok sorozattag van. Legyen ez $[c_1, d_1]$. Az eljárást folytatva kapjuk a $[c_2, d_2]$, $[c_3, d_3]$, … intervallumokat. Itt c_1 monoton növő, d_1 monoton csökkenő → mindkettőnek van határértéke: $(c_n) \le c_\infty \le d_\infty \le (d_n)$.
$c_\infty = d_\infty$, mert $d_\infty - c_\infty \le d_n - c_n \to 0$ a felezés miatt, így a határérték közös. A közös határérték bármely környezetében van ~~olyan~~ eleme az eredeti sorozatnak, vagyis ez egy részsorozat határértéke.



Tekintsük az első koordinátákból kapott (x_{n_k}) konvergens részsorozat indexeit, és válasszunk ezekből olyan részsorozatot, amelyre a második komponensek is konvergensek!
Az eljárást folytatva minden komponensre (véges sokszor) elvégezve kapunk olyan részsorozatot, amelynek minden komponense tart egy valós számhoz. Az ezekből álló vektorhoz tart akkor az eredeti (x_n) megfelelő részsorozata.

[Ha $(x_{n_1}) \to y_1$, $(x_{n_2}) \to y_2$, $(x_{n_3}) \to y_3$ $\Rightarrow (\underline{x}_n) \to (y = (y_1, y_2, y_3))$, mert $\forall \varepsilon$ $\exists$ első index: annál nagyobb n_1-ekre $|x_{n_1} - y_1| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$; ugyanez a másodikra és a harmadikra is igaz. Véve ezek maximumát:

$$\|(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}) - (y_1, y_2, y_3)\| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{3} |x_{n_j} - y_j|^2} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3}} = \varepsilon \quad]$$

Tudjuk tehát, hogy $(x_{n_k}) \to x$ valamilyen $x \in \mathbb{R}^n$-re. Mivel M zárt és $(x_{n_k}) \subset M$, ezért a limesze is M-ben van $\Rightarrow x \in M$.

pl. 1.: $\mathbb{R}$-ben $((-1)^n)$: $(-1, 1, -1, 1, \dots)$

* a tétel fordítottja is igaz:

Áll.: Ha egy $M \subset (X, \varrho)$ halmaz sorozatkompakt, akkor biztosan korlátos és zárt.

Biz.: 1.) Belátjuk, hogy korlátos (indirekt). Tfh. nem korlátos. Akkor valamilyen x-re van $B_1(x)$-en kívüli eleme: x_1. Sőt, van eleme $B_{\varrho(x, x_1)+1}(x)$-~~en~~en kívül is: $x_2 \in M$. Így konstruálunk egy sorozatot; belátjuk, hogy nem lehet konvergens részsorozata: a konstrukcióból látszik, hogy $\varrho(x_1, x_2) \geq \varrho(x, x_2) - \varrho(x, x_1) \geq \varrho(x, x_1) + 1 - \varrho(x, x_1) = 1$. Ugyanez igaz akármelyik egymást követő pontokra, ezért ha egy részsorozat konvergens lenne, akkor az korlátos is lenne, de ez nem korlátos sorozat. Ez ellentmond M sorozatkompaktságának.

2.) Belátjuk, hogy M zárt: legyen akkor $(x_n) \subset M$ konvergens sorozat! Akkor ennek minden részsorozata is x-hez tart, tehát ha sorozatkompakt, akkor a konvergens részsorozat ~~is ez korlátos~~ limesze is M-beli, de ez csak x lehet, azaz $x \in M$.

* ekvivalencia: $\mathbb{R}^n$-ben M korlátos és zárt $\Leftrightarrow$ M sorozatkompakt.

ellenpélda: az ekvivalencia nem igaz végtelen dimenziós normált terekben.

* Cauchy-konvergencia:

DEF.: Azt mondjuk, hogy az $(x_n) \subset (X, \varrho)$ sorozat Cauchy-konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n$: $k, l > n$ esetén $\varrho(x_k, x_l) < \varepsilon$.

Áll.: Ha $(x_n) \subset (X, \varrho)$ konvergens, akkor Cauchy-konvergens is.

Biz.: Ha $(x_n) \to x$, akkor $\frac{\varepsilon}{2}$-höz $\exists n$ index: $k > n$ és $l > n$ esetén $\varrho(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\varrho(x_l, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor $\varrho(x_k, x_l) \leq \varrho(x_k, x) + \varrho(x_l, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

* a fordítottja általában nem igaz

Pl. 1.: $(X, \varrho) = (0,1)$, $\varrho(a,b) = |b-a|$

$(x_n)_{n=2}^{\infty} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=2}^{\infty}$

Ez egy Cauchy-sorozat, mert ∃ ∀ ε-hoz egy index utána $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, $k, l > n$ esetén $\left|\frac{1}{k} - \frac{1}{l}\right| < \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. A limesz 0 kellene, hogy legyen, de az nincs benne X-ben.

DEF.: Egy teret teljesnek nevezünk, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens. Teljes normált tér $\Leftrightarrow$ Banach-tér.

Áll.: $\mathbb{R}^n$ teljes.

Biz.: Legyen (x_n) egy Cauchy-sorozat: belátjuk, hogy konvergens.

1.) Belátjuk, hogy korlátos: Mivel (x_n) Cauchy-sorozat, ezért 1-hez is van olyan n index, hogy $|x_{n+1} - x_k| < 1$ $\forall\, k \geq n+1$ esetén. Vegyük ezután az $r = \max\{|x_1 - x_{n+1}|, \dots, |x_n - x_{n+1}|, 1\}$. Ekkor (x_n) sorozat összes tagja $B_r(x_n)$ gömbben van, azaz (x_n) sorozat korlátos.

2.) Ezmiatt (x_n)-nek van konvergens részsorozata, legyen ennek limesze x. Belátjuk, hogy $(x_n) \to x$. Adott ε-hoz először választunk ki azon részsorozat-indexet: k, amelytől kezdve az $|x_{l_1}, x| < \frac{\varepsilon}{2}$, $l > k$, a Cauchy-konvergencia miatt $\frac{\varepsilon}{2}$-höz van olyan l_2 index is, hogy attól kezdve $|x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2}$, $p, q > l_2$. Ekkor legyen $N = \max\{l_1, l_2\}$, ekkor $n > N$ esetén $|x_n - x| \leq |x_n - x_N| + |x_N - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

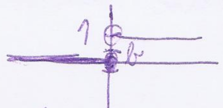
→ 5. tétel: határérték és folytonosság: $f: X \to Y$ függvényekre, ahol $(X, \varrho_1), (Y, \varrho_2)$ adott metrikus terek.

DEF.: (határérték). Legyen $a \in X$ olyan, hogy minden környezetében van D_f-nek pontja a-n kívül is (azaz az értelmezési tartomány egy torlódási pontja a). Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a-ban b: $\lim_{x \to a} f(x) = b$, ha b $\forall B_\varepsilon(b)$ környezetéhez van a-nak olyan $B_\delta(a)$ környezete, hogy $x \in D_f \cap B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(a)$.

DEF.: (folytonosság). Legyen $a \in D_f$. Azt mondjuk, hogy f folytonos a-ban, ha f(a) minden $B_\varepsilon(f(a))$ környezetéhez $\exists$ a-nak olyan $B_\delta(a)$ környezete, hogy $x \in D_f \cap B_\delta(a)$-ra $f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$.

minden azt mondjuk, hogy $f: X \to Y$ folytonos, ha f folytonos D_f minden pontjában.

ellenpélda: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$



Ez 0-ban nem folytonos: ha veszem 1-nél kisebb b-re a $(-b, b)$ intervallumot, akkor nem lesz 0-nak olyan környezete, ahonnan minden függvényérték $(-b, b)$-be esik.

ÁLL.: (sorozatfolytonosság). Legyen $a \in D_f$. f folytonos a-ban $\Leftrightarrow$ $\forall (a_n) \to a$, $(a_n) \subset D_f$ sorozat esetén $\lim f(a_n) = f(a)$. (Átviteli-elv).

BIZ.: 1.) Tfh. f folytonos a-ban. Legyen $(a_n) \subset D_f$ úgy, hogy $a_n \to a$. Be kell látni, hogy $\lim f(a_n) = f(a)$. Vegyünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Ekkor a folytonosság miatt van olyan δ, hogy $\varrho(a_n, a) < \delta$ esetén $\varrho(f(a_n), f(a)) < \varepsilon$. Azaz egy indextől kezdve valóban $\varrho(a_n, a) < \delta$, és ettől kezdve ($n > N$ esetén) valóban $\varrho(f(a_n), f(a)) < \varepsilon$. $\boxed{\Rightarrow}$

2.) (indirekt). Tfh. nem teljesül a folytonosság, azaz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $\delta > 0$ esetén van $B_\delta(a)$-ban olyan a_n sorozattag, amelyre $\varrho(f(a_n), f(a)) > \varepsilon$. Vegyünk egy ilyen sorozattagot a $\delta = 1$, $\delta = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{1}{4}$, ... etc. esetben, legyenek ezek $b_1, b_2, \dots$. Ekkor $(b_n) \to a$, de $\varrho(f(b_n), f(a)) > \varepsilon$. Ez ellentmond a feltevésnek. $\boxed{\Leftarrow}$

Műveleti szabályok (folytonos függvényekre):

ÁLL.: **Ha** f és $g: X \to Y$, (ahol X metrikus tér, Y pedig normált tér), továbbá f és g folytonosak $a \in X$ pontban, akkor $f+g$ is folytonos a-ban!

BIZ.: Az $a \in D_f \cap D_g \Rightarrow a \in D_{f+g}$. Igazolni kell: ha az $(a_n) \subset D_{f+g}$, $(a_n) \to a \Rightarrow (f+g)(a_n) \to (f+g)(a)$.
Ha $(a_n) \to a$ és $(a_n) \subset D_{f+g}$, akkor $f(a_n) \to f(a)$, (mert f folytonos a-ban), hasonlóan $g(a_n) \to g(a)$, (mert g folytonos a-ban) $\Rightarrow (f+g)(a_n) \overset{DEF.}{=} f(a_n) + g(a_n) \to f(a) + g(a) = (f+g)(a)$.

Áll.: Ha $f: X \to Y$ (ahol X metrikus tér, Y pedig normált tér) folytonos a-ban, akkor $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén λf is folytonos a-ban.

Biz.: Legyen $(a_n) \to a$ és $(a_n) \subset D_{\lambda f}$, ekkor $(\lambda f)(a_n) = \lambda \cdot f(a_n) \to \lambda \cdot f(a) = (\lambda f)(a) \iff \lambda f$ folytonos a-ban.

Áll.: Legyen $f: Y \to Z$, $g: X \to Y$ adott függvények, ahol X, Y, Z metrikus terek. Ha g folytonos $a \in X$-ben, és f folytonos $g(a) \in Y$-ban, akkor $f \circ g$ is folytonos a-ban.

Biz.: Értelmes $f \circ g(a)$? $f(g(a))$ a feltétel szerint értelmes. Az átviteli-elv szerint igazolni kell: ha $(a_n) \to a$, $(a_n) \subset D_{f \circ g} \Rightarrow f \circ g(a_n) \to f \circ g(a)$. Ha $(a_n) \subset D_g$, $(a_n) \to a$, g függvény folytonos a-ban $\Rightarrow g(a_n) \to g(a)$, $g(a_n) \subset D_f$, f folytonos $g(a)$-ban $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(g(a_n)) \to f(g(a)) \iff (f \circ g)(a_n) \to (f \circ g)(a)$.

* ennek átírása határértékekre nem feltétlenül igaz.

→ 6. tétel: inverz függvény folytonossága

DEF.: Az $f: X \to Y$ függvényt (ahol X és Y metrikus terek) injektívnek (invertálhatónak) nevezzük, ha $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$ (ha az $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$). Ha f injektív, akkor az R_f-en $f(x) \to x$ hozzárendeléssel megadott függvényt f inverzének nevezzük és f^{-1}-gyel jelöljük (azaz $f^{-1}(f(x)) = x$, $D_{f^{-1}} = R_f$).

pl. 1.: (folytonos függvényekre): $f(x) = 2x$, $D_f = \mathbb{R}$ (átviteli elvből látszik, hogy mindenhol folytonos)

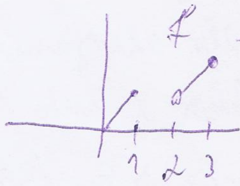
pl. 2.: $f(x) = \frac{x}{2}$, ha $x \neq 0$ és $f(0) = 1$ (nem folytonos 0-ban, mert $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$, de az

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \to 0 \neq f(0) = 1$

pl. 3.: $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ → folytonos? → mindenhol folytonos

pl. 4.: $f(x) = x$, ha $x \in [0,1]$, $D_f = [0,1] \cup (2,3]$

$f(x) = x - 1$, ha $x \in (2,3]$

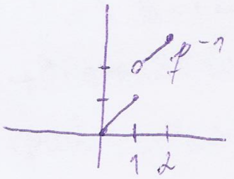


→ mindenhol folytonos

kérdés: Ha $f: X \to Y$ injektív, f folytonos D_f-ben, akkor f^{-1} is folytonos R_f-ben?
Nem!

$f^{-1}(x) = x$, ha $x \in [0,1]$, $D_f = [0,2]$

$f^{-1}(x) = x + 1$, ha $x \in (1,2]$



→ nem folytonos

Segédállítás/lemma folytonossághoz: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre teljesül, hogy ha f szigorúan monoton, akkor injektív, és az inverze is szigorúan monoton.

Biz.: Ha $x_1 \neq x_2$, akkor $x_1 > x_2$ vagy $x_1 < x_2$, így a szigorú monotonitás miatt $f(x_1) > f(x_2)$ vagy $f(x_1) < f(x_2)$, tehát mindenképp $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Az első esetben: $f(x_1) > f(x_2) \to \underbrace{f^{-1}(f(x_1))}_{x_1} > \underbrace{f^{-1}(f(x_2))}_{x_2}$

A második esetben: $<$

Áll.: Ha az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f szigorúan monoton, $D_f = I$, akkor az f^{-1} folytonos.

Biz.: $\forall \varepsilon \to 0$ esetén kellene $f(x)$-nek olyan környezete, hogy az abból választott $f(x_s)$ pontokban $f^{-1}(f(x_s)) = x_s$ legfeljebb ε távolságra legyen x-től.

1. eset: Legyen $x \in \operatorname{int} I$. Ekkor van $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ alakú intervallum I-ben. Tekintsük ennek f-képét, azaz pl. szigorúan monoton növő függvényre az $(f(x-\varepsilon), f(x+\varepsilon))$ intervallumot (vagy szigorúan monoton csökkenőre az $(f(x+\varepsilon), f(x-\varepsilon))$ intervallumot.

Ez biztosan környezete lesz $f(x)$-nek. Ha ebből a környezetből vesszük $f(x_s)$ pontot, akkor $f(x-\varepsilon) < f(x_s) < f(x+\varepsilon) \Rightarrow f^{-1}(f(x-\varepsilon)) < f^{-1}(f(x_s)) < f^{-1}(f(x+\varepsilon))$, tehát $x-\varepsilon < x_s < x+\varepsilon$. Hasonlóan, ha f szig. mon. csökk., akkor az $f^{-1}(f(x+\varepsilon)) < f^{-1}(f(x_s)) < f^{-1}(f(x-\varepsilon))$, tehát $x+\varepsilon < x_s < x-\varepsilon$.

2. eset: x nem belső pont, akkor I egy végpontja – mondjuk jobb végpontja –, akkor $(f(x-\varepsilon), f(x)]$, vagy $[f(x), f(x+\varepsilon))$-ből kell x_s ~~-et~~ kiválasztani.

pl. 1.: $I=[0,\infty)$; $f: I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ (ahol $n \in \mathbb{N}^+$ ~~...~~). Ez szigorúan monoton növő.
Ekkor $f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}$ (amely ekkor szigorúan növő és folytonos).

pl. 2.: $I = \mathbb{R}$; $f(x) = e^x$ (szigorúan monoton növő) $\Rightarrow f^{-1}(e^x) = x$, azaz $f^{-1}(y) = \ln(y)$

$R_f = \mathbb{R}^+ \Rightarrow D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$

\# folytonos függvények sorozatkompakt halmazokon:

ÁLL.: Legyen $f: X \to Y$, ahol X, Y metrikus terek. Legyen továbbá D_f sorozatkompakt és f folytonos. Ha f injektív, akkor a fentiek mellett az f^{-1} is folytonos!

Biz.: Az átviteli-elv alapján $f(x_n) \to f(x_0)$ esetén $f^{-1}(f(x_n)) \to f^{-1}(f(x_0))$, azaz $x_n \to x_0$. Ha ~~ez~~ nem igaz, akkor x-nek van olyan környezete, hogy minden index után van olyan x_k elem, hogy $\varrho(x_0, x_k) > \varepsilon$. Legyen (x_k) egy ilyen sorozat, amely az eredeti (x_n)-nek részsorozata. Ennek van egy konvergens $(x_{k_2}) \to x^*$ részsorozata. Itt $\varrho(x^*, x_0) \geq \varepsilon$. $f(x_{k_2})$ részsorozata $f(x_n)$-nek $\Rightarrow f(x_{k_2}) \to f(x_0)$; $f(x_{k_2}) \to f(x^*)$, de $x_0 \neq x^*$ ← ellentmondás.

TÉTEL: (Weierstrass). ~~H~~ Ha $f: X \to Y$ (X, Y metrikus terek) folytonos, D_f sorozatkompakt, akkor R_f is sorozatkompakt.

Biz.: Azt kell belátni, hogy ha adott egy $(f(x_k))$ sorozat, akkor abból kiválasztható részsorozat R_f-ben konvergens. Tudjuk, hogy az $(x_k) \subset D_f$, vagyis D_f sorozatkompaktsága miatt van $(x_n) \subset (x_k)$, hogy $(x_n) \to x^* \in D_f$. De ekkor f folytonossága miatt $(f(x_n)) \to f(x^*) \in R_f$.

* hasonló állítások általában nem igazak ~~pl.~~ korlátos halmaz folytonos képe korlátos?

Nem. Zárt halmaz folytonos képe zárt? Nem!

ellenpélda 1.: $f: (0,1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ → itt $R_f = [1,\infty)$ ← nem korlátos

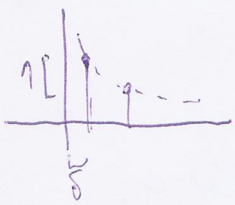
ellenpélda 2.: $g: [1,\infty) \to \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{1}{x}$ → itt $R_g = (0,1]$ ← nem zárt

→ **7. tétel**: egyenletes folytonosság, Heine-tétel, Bolzano-tétel

DEF.: Azt mondjuk, hogy az $f: X \to Y$ függvény (X, Y metrikus terek) a D_f halmazon egyenletesen folytonos, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists$ olyan δ, hogy ha $\rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

pl. 1.: $f: (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ nem egyenletesen folytonos: ha pl. $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists$-e olyan δ, hogy $\rho(x_1, x_2) < \delta$ esetén $\left|\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right| < 1$. Ha volna ilyen δ, akkor $\forall\, 0 < x_1, x_2 < \delta$ esetén is igaz volna ez. Legyen $\frac{\delta}{2}$ és $\frac{\delta}{3}$ a két pont.



$$\left|\frac{1}{\frac{\delta}{2}} - \frac{1}{\frac{\delta}{3}}\right| = \left|\frac{2}{\delta} - \frac{3}{\delta}\right| = \left|\frac{1}{\delta}\right|,$$ de ha $\delta \to 0$, akkor ez nem lehet 1-nél kisebb.

ÁLL.: (Heine-tétel). Ha $f: X \to Y$ és D_f sorozatkompakt, továbbá f folytonos, akkor f egyenletesen is folytonos.

BIZ.: Ha nem egyenletesen folytonos, akkor $\exists$ olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\forall \delta > 0$ esetén vannak olyan x_1, x_2 pontok, hogy $\rho(x_1, x_2) < \delta$, de $\rho(f(x_1), f(x_2)) > \varepsilon$. Vegyünk ehhez az ε-hoz $\delta = \frac{1}{n}$ esetén ilyen $x_{1,n}, x_{2,n}$ pontokat. Ekkor az $(x_{1,n}), (x_{2,n})$ sorozatok D_f-ben vannak. $(x_{1,n})$-nek van ~~konvergens részsorozata~~ $(x_{1,k})$ konvergens részsorozata, $(x_{1,k}) \to x_{1*}$. $(x_{2,k})$-nek is van $(x_{2,k})$ konvergens részsorozata, melynek között van egy $(x_{2,l})$ konvergens részsorozata, $(x_{2,l}) \to x_{2*} \Rightarrow (x_{1,l}) \to x_{1*}$, $(x_{2,l}) \to x_{2*}$, van közös konvergens részsorozata. Mivel $\rho(x_{1,l}, x_{2,l}) \to 0 \Rightarrow x_{1*} = x_{2*}$, ekkor az f függvény folytonossága miatt
$f(x_{1,l}) \to f(x_{1*}) = f(x_{2*}) \leftarrow f(x_{2,l})$, ami ellentmond annak, hogy $\rho(f(x_{1,l}), f(x_{2,l})) > \varepsilon$.

pl. 1.: $f: [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \to$ ez egyenletesen folytonos, mert f folytonos $[0,2]$-n, és $[0,2]$ sorozatkompakt.

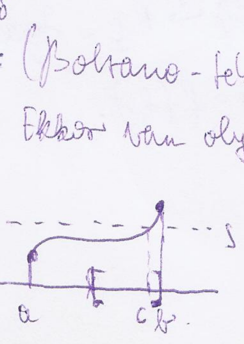
pl. 2.: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \to$ ez is sorozatkompakt.

pl. 3.: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \to$ egyenletesen is folytonos (mert $[0,1]$ sorozatkompakt).

pl. 4.: $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \to$ folytonos, de nem egyenletesen folytonos. Belátjuk, hogy az $\varepsilon = 1$-hez nincs olyan δ, hogy x és $x+\delta$ esetén $f(x+\delta) - f(x) < \varepsilon = 1 \to 2\delta x + \delta^2 < 1$, ha itt $x > \frac{1}{2\delta}$, akkor ez tényleg nem igaz.

TÉTEL: (Bolzano-tétel). Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, legyen továbbá s az $f(a)$ és $f(b)$ között. Ekkor van olyan $c \in [a,b]$, hogy $f(c) = s$.

BIZ.:



1. Feltételezhetjük, hogy $f(a) \leq f(b)$. Vegyük $\frac{a+b}{2}$ értéket. A következő intervallumon legyen $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ és $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ közül az, amelyikre igaz, hogy $f(a) \leq s \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ vagy $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq s \leq f(b)$.

Ha $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le f(a)$, akkor $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le f(a) \le s \le f(b)$. ~~Ke~~ Ha $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge f(a)$, akkor $s \in \left[f(a), f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$. Ha nem, akkor $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le s \le f(b)$, tehát valamelyik teljesül. Amelyik intervallumban s van, az legyen $[a_1, b_1]$, ezt felezve és a megfelelő intervallumot választva kapjuk $[a_2, b_2]$-t, etc. Tudjuk, hogy $a_n - b_n \to 0$ és (a_n) mon. növő, (b_n) mon. csökkenő korlátos sorozatok, $\lim(a_n)$ és $\lim(b_n)$ léteznek $\Rightarrow \lim(a_n) = \lim(b_n) := c$, és ezt keresstük, mert

$$\begin{array}{ccccc} f(a_n) & \le & s & \le & f(b_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f(c) & \le & s & \le & f(c) \end{array}$$

, valamint $f(a_n)$ ... f folytonossága miatt

~~pl. 1.: $f(x) = x^5 + 4x^4 - x^3 + 9 = 0$ ← Van-e megoldás? Van~~

pl. 1.: $f(x) = x^5 + 4x^4 - x^3 + 9 = 0$ ← Van-e megoldás? Van-e olyan x, ahol $f(x) = 0$?

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{\infty} f = \infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$\exists x_2 : f(x_2) > 0 \quad \exists x_1 : f(x_1) < 0$. Akkor $f(x_1)$ és $f(x_2)$ között van a 0, azzal $\exists$ egy x_0 az x_1 és x_2 között, hogy $f(x_0) = 0$.

pl. 2.: Mi lesz $R_{\exp}$? (azaz a természetes alapú ~~[illegible]~~ exponenciális függvény értékkészlete)?

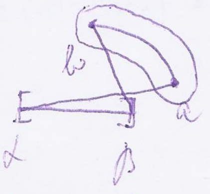
Tudjuk, hogy $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$, vagyis $\forall y \in \mathbb{R}^+$-hoz $\exists x_1, x_2 : f(x_1) < y$ és $f(x_2) > y$.

Ekkor a Bolzano-tétel miatt van olyan $x \in (x_1, x_2)$, hogy $f(x) = y$.

pl. 3.: Ha f folytonos I-n és $\max\limits_I f$, $\min\limits_I f$ $\exists \Rightarrow f$ értékkészlete: $R_f = [\min\limits_I f, \max\limits_I f]$.

Az általánosításhoz összefüggések:

DEF.: Legyen (X, δ) metrikus tér, ebben egy M halmazt ívszerűen összefüggőnek nevezünk, ha bármely két a, b pontja között van folytonos ív, azaz van olyan $\varphi : [\alpha, \beta] \to M$ folytonos függvény és $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. ($\mathbb{R}$, $\in \mathbb{R}$)



"ugyan" összefüggőség: M összefüggő $\overset{\text{DEF.}}{\iff}$ ha M nem áll elő nyílt halmazok diszjunkt uniójaként

TÉTEL: Ívszerűen összefüggő halmaz folytonos képe ívszerűen összefüggő. Azaz Ha. $f : X \to Y$ (metrikus terek) folytonos és $D_f \subset X$ ívszerűen összefüggő, akkor R_f is ívszerűen összefüggő.

Biz.: Azt kell bizonyítani, hogy $f(a)$ és $f(b)$ között van folytonos ív. Belátjuk, hogy $f \circ \varphi$ megfelelő lesz, ahol φ jelöli az a és b között ívet. $[\alpha, \beta] \xrightarrow{\varphi} D_f \xrightarrow{f} R_f$. Igaz továbbá, hogy $f \circ \varphi$ folytonos, $R_{f \circ \varphi} \subset R_f$ és $f \circ \varphi(\alpha) = f(a)$, $f \circ \varphi(\beta) = f(b)$.

→ 8. tétel: függvénysorozatok és sorok egyenletes konvergenciája

A továbbiakban (f_n) függvénysorozatokat vizsgálunk, ahol $\forall j$: $f_j : M \to X$ függvény. $D_f = M$, ahol az is legyen metrikus tér ~~részsorozata~~ részhalmaza.

DEF.: Azt mondjuk, hogy (f_n) pontonként konvergens az $M_0 \subset M$ halmazon, ha $\forall x \in M$ / $x \in M_0$ esetén $(f_n(x))$ konvergens. Továbbá azt mondjuk, hogy (f_n) pontonként tart f-hez, ha minden $x \in M$ / $x \in M_0$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n(x)) = f(x)$.

pl. 1.: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = x^n$

Van-e olyan f, hogy $(f_n) \to f$ pontonként?
Ha $x < 1$, akkor $f_n(x) = x^n \to 0$
Ha $x = 1$, akkor $f_n(x) = 1^n \to 1$. A pontonkénti határérték,

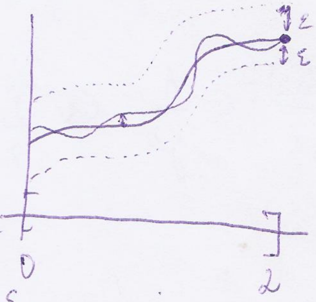
azaz amihez (f_n) tart pontonként:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Előfordulhat, hogy folytonos függvények pontonkénti limesze nem folytonos.

DEF.: Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat egyenletesen tart f-hez az M_0 halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz $\exists$ olyan n_0: $n > n_0$ ~~esetén~~ esetén minden $x \in M_0$-ra $\varrho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

ÁLL.: Folytonos függvények egyenletes limesze is folytonos, azaz ha $f_n : M \to X$ folytonos, $D_{f_n} = M$, $(f_n) \to f$ egyenletesen folytonos, akkor $f : M \to X$ folytonos.



Biz.: Azt kell igazolni, hogy $(x_n) \to x$ esetén $f(x_n) \to f(x)$, azaz $\forall \varepsilon$-hoz akarunk olyan n_0-t választani, hogy $n > n_0$ esetén $\varrho(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$.

$\varrho(f(x_n), f(x)) \leq \varrho(f(x_n), f_j(x_n)) + \varrho(f_j(x_n), f_j(x)) + \varrho(f_j(x), f(x))$

~ négyszög-egyenlőtlenség

Tekintsünk egy j indexet, amelyre $\forall x$ esetén a $\varrho(f_j(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Vegyünk ehhez olyan n_0-t, hogy $n > n_0$ esetén $\varrho(f_j(x_n), f_j(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$

* ha valamilyen normа adott egy függvényekből álló téren (azaz normált terünk van), akkor $(f_n) \to f \overset{DEF}{\iff} \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, (ha $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{max}$, akkor kapjuk az egyenletes konvergencia esetét).

* → Függvénysorok: $g_1, g_2, \dots$, tagokból álló függvénysor (ahol $g_j : M \to X$, $M \subset$ metrikus tér) (normált tér), $f_k = \sum\limits_{j=1}^{k} g_j$ esetén (f_k) sorozatot hívjuk a (g_j)-hez tartozó függvénysornak.

DEF.: Azt mondjuk, hogy a fenti függvénysor konvergens (valamilyen értelemben), ha f_k (abban az értelemben) konvergens, és az összegének (f_k) limeszét nevezzük.

ÁLL.: Tfh. a ~~függvények~~ folytonos függvényekből álló $\left(\sum_{j=1}^{k} g_j\right)$ sor konvergens és limesze g. Ekkor g is folytonos.

Biz.: Mivel $g_1, \dots, g_k$ folytonosak, ezért $f_k = \sum_{j=1}^{k} g_j$ is folytonos. Ezért az (f_k) sorozat egyenletes limesze a fenti állítás miatt szintén folytonos, és éppen ez a (g_j) tagokból álló sor limesze.

TÉTEL: (Weierstrass-kritérium): Legyen $g_k : M \to \mathbb{R}$ függvények úgy, hogy $|g_k(x)| \leq a_k$ $\forall x$-re. Ha $\sum_k a_k$ konvergens, akkor a g_k tagokból álló sor egyenletesen konvergens.

Biz.: $f_k = \sum_{j=1}^{k} g_j$, $f_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} g_j$, $\ell \geq k$ jelöléssel kapjuk, hogy

$$|f_k(x) - f_\ell(x)| = \left|\sum_{j=k+1}^{\ell} g_j(x)\right| \leq \sum_{j=k+1}^{\ell} |g_j(x)| \leq \sum_{j=k+1}^{\ell} a_j \leq \sum_{j=\ell+1}^{\infty} a_j \underset{\infty}{\overset{k}{\downarrow}} 0.$$ Ez azt jelenti, hogy

$(f_k(x))$ Cauchy-sorozat $\overset{\mathbb{R}\text{ teljes}}{\Longrightarrow}$ $f_k(x)$ konvergens, a $\lim(f_k(x)) =: f(x)$. Belátjuk, hogy ez egyenletes limesz, tehát hogy $f_k \to f$ egyenletesen. Tudjuk, hogy

$$|f_k(x) - f_\ell(x)| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \to 0 \Rightarrow \sup_{x \in M} |f_k(x) - f(x)| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \to 0.$$

$\boxed{\text{pl. 1.}}$ $f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jx)}{j^2}$ (Ez lehet-e „ugrásfüggvény” vagy „négyszögjel”? Nem: folytonosnak kell lennie!)

$$\left|\frac{\sin(jx)}{j^2}\right| \leq \frac{1}{j^2} \text{ és } \sum_j \frac{1}{j^2} \text{ konvergens} \overset{\text{W.-k.}}{\Longrightarrow} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jx)}{j^2}$$ egyenletesen konvergens, az összeg is folytonos.

→ 9. tétel: Hatványsorok, konvergenciasugár

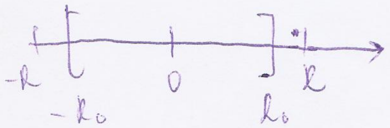
Speciális függvénysor: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ → milyen esetben és értelemben lesz egy ilyen függvénysor?

Sorozatok limsup-ja: $\limsup(a_n) = \sup\{\alpha : \exists (a_{n_k}) \subset (a_n);\ a_{n_k} \to \alpha\}$. A fenti hatványsorhoz tartozó konvergenciasugár (jel: $R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$).

ÁLL.: A fenti függvénysor $\forall R_0 < R$ esetén egyenletesen konvergens a $[-R_0, R_0]$ intervallumon. (+) ∀ komplex számoknál R_0 sugarú körlapon igaz.

Biz.: Tudjuk, hogy az $[-R_0, R_0]$ halmazon $|c_n x^n| \le |c_n||x^n| \le |c_n||R_0^n|$. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| R_0^n$ konvergens. Ehhez a gyökkritériumot használjuk: $\sqrt[n]{|c_n| R_0^n} = \sqrt[n]{|c_n|}\, R_0 < \frac{\sqrt[n]{|c_n|}}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$, ennek limsup-ját véve: $\limsup \sqrt[n]{|c_n|}\, R_0 < \limsup\left(\frac{\sqrt[n]{|c_n|}}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}\right) = 1$. Így a Weierstrass-kritérium szerint a sor ezen az intervallumon egyenletesen konvergens.

∀ $[-R, R]$-en kívül a hatványsor nem konvergens. (gyökkritérium miatt). Előfordulhat, hogy R-ben vagy $-R$-ben konvergens vagy divergens a sor.



DEF.: Ha $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, akkor $R = \infty$.

Kiegészítés:

1.) Egy $c_j x^j$, $x \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, n$ tagokból álló függvénysort hatványsornak nevezünk → a hatványsor tagjai folytonos függvények.

2.) limsup az a legnagyobb valós szám (vagy végtelen), amelyhez (a_n) egy alkalmas részsorozata konvergál. limsup és liminf mindig ∃!

3.) $R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$ → $|x| < R$ esetén a hatványsor konvergens, $|x| > R$ esetén divergens.

→ 10. tétel: lineáris operátorok

Adott X, Y vektorterek esetén azt mondjuk, hogy az $A: X \to Y$ függvény lineáris, ha $x, y \in D_A$ esetén $A(x) + A(y) = A(x+y)$ és $\lambda A(x) = A(\lambda x)$ $\lambda \in \mathbb{R}$ teljesül.

Ehhez x, y és $\lambda x \in D_A$, $D_A \subset X$ vektortér.

Azt mondjuk, hogy $\{b_1, b_2, \dots\}$ az X vektortér egy bázisa, ha $\forall$ eleme előállítható az ezekből vett véges lineáris kombinációjával. ⇒ Ennek száma egyértelmű és ez a dimenzió.

pl. 1.: $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \leftrightarrow A$ mátrix, n oszlopos, k sor

pl. 2.: $v: C[0,1] \to \mathbb{R}$, $v(f) = f(1)$;

$D: C[0,1] \to ([0,1] \to \mathbb{R})$, ahol D_D = kétszer deriválható függvények → $Df = f''$

jelölés: $lin(X, Y) = X \to Y$ alakú A lineáris függvények halmaza, hogy $D_A = X$.

Áll.: $lin(X, Y)$ vektortér az alábbi műveletekkel: $(A+B)(x) := A(x) + B(x)$, $(\lambda A)(x) := \lambda(A(x))$.

Biz.: Azt kell igazolni, hogy $A+B$ és λA is lineáris:

1.) $(A+B)(x+y) \overset{DEF}{=} A(x+y) + B(x+y) \overset{A\ lin,\ B\ lin}{=} A(x) + A(y) + B(x) + B(y) = (A+B)(x) + (A+B)(y)$

2.) hasonló.

Spec. eset: $A \in lin(X, X)$. Ekkor értelmezhető lineáris függvények kompozíciója („szorzata") is.

DEF: $AB(x) \overset{DEF}{=} A(B(x))$, ahol $A, B \in lin(X, X)$.

Áll.: Teljesülnek az alábbiak: 1.) $(A+B)(C) = AC + BC$, 2.) $C(A+B) = CA + CB$;

3.) $\exists I$, hogy $IA = A = AI$ $\forall A$-ra, 4.) $\exists \hat{0}$, hogy $\hat{0}A = A\hat{0} = \hat{0}$ $\forall A$-ra.

Biz.: Mivel A, B lineáris ($AB(x+y) = A(Bx + By) = ABx + ABy$), így sorra lépve:

$(A+B)C(x) = (AC+BC)(x)$ kell, hogy legyen $\forall x \in X$-ra. $[(A+B)C](x) \overset{DEF}{=} (A+B)(C(x)) \overset{DEF}{=}$

$= A(C(x)) + B(C(x)) \overset{DEF}{=} (AC)(x) + (BC)(x) \overset{DEF}{=} (AC+BC)(x)$.

Legyen $I: X \to X$; $I(x) = x$ $\forall x \in X$ identitás függvény; $(IA)(x) \overset{DEF}{=} I(A(x)) \overset{DEF}{=} A(x)$,

$(AI)(x) \overset{DEF}{=} A(I(x)) \overset{DEF}{=} A(x)$. Legyen $\hat{0}: X \to X$, $\hat{0}(x) = \underline{0}$ $\forall x \in X$; $A\underline{0} = \underline{0}$ és $\hat{0}A = A\hat{0} = \hat{0}$.

Gyakran írjuk, hogy $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n} \in lin(X, X)$. $lin(X, X)$-nek ezen struktúráját egységelemes algebrának nevezzük. ~~[illegible]~~

Spec. eset: $X = \mathbb{R}^n$; $A \in lin(X, X)$, $\sim A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix; $B \in lin(X, X) \sim B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$AB \in lin(X, X)$, ~ legyen AB olyan, hogy ez megfeleljen AB-nek(!) → ha így definiálom AB-t, akkor ez a mátrixszorzás [!].

→ Lineáris függvény inverze:

Lemma: $A \in lin(X, Y)$ pontosan akkor injektív (van inverze), ha $Ax = \underline{0} \Rightarrow x = 0$,

$Ax = 0 \Rightarrow x = 0$.

Biz.: Ha A injektív, akkor $A\underline{0} = \underline{0}$ miatt $\forall x$-re, amelyre $Ax = 0 \Rightarrow x = \underline{0}$. Ha $Ax = Ay$ esetén az $A(x-y) = Ax - Ay = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$, tehát A injektív.

Áll.: Ha B olyan, hogy $AB = BA = I$, akkor $B = A^{-1}$

Biz.: $\left.\begin{array}{l} A^{-1}(A(x)) \overset{\text{Def}}{=} x \\ B(A(x)) = x \end{array}\right\} \Rightarrow B = A^{-1}$ $\qquad ABx = x = Ay$, $A(A^{-1}x) = A(A^{-1}(Ay)) = Ay \Rightarrow B = A^{-1}$.

$\rightsquigarrow$ Folytonos lineáris függvények: Ezt $A: X \to Y$ függvényekre vizsgáljuk, ahol X és Y normált terek.

Áll.: Egy $A: X \to Y$ lineáris függvény pontosan akkor folytonos, ha a 0 pontban folytonos.

Biz.: Folytonos $\Leftrightarrow (x_n) \to x \Rightarrow (Ax_n) \to Ax$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x - x_n \to 0 \Rightarrow Ax - Ax_n \overset{\text{lineáris}}{=} A(x - x_n) \to 0.$$

TÉTEL: Egy $X \to Y$ lineáris függvény pontosan akkor folytonos, ha az korlátos, azaz $\exists C \in \mathbb{R}^+ : \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in D_A$

Biz.: 1.) korlátos $\Rightarrow$ folytonos. Legyen $x_n \to 0 \Leftrightarrow \|x_n - 0\| \to 0 \Leftrightarrow \|x_n\| \to 0 \Rightarrow C\|x_n\| \to 0 \Rightarrow$ $\|Ax_n\| \leq C\|x_n\|$

$\Rightarrow \|Ax_n\| \to 0 \Rightarrow Ax_n \to 0$. Azt kaptuk, hogy a korlátosságból következik, hogy $x_n \to 0$ esetén $Ax_n \to 0$, azaz A folytonos 0-ban $\Leftrightarrow$ A folytonos. 2.) Legyen A folytonos. (indirekt).

Tfh. nem korlátos, azaz x_n-re $\|Ax_n\| \geq 1\|x_n\|$ ... stb. Tekintsük az $\frac{x_n}{1\|x_n\|}$; $\frac{x_2}{2\|x_2\|}$; $\frac{x_3}{3\|x_3\|}$; ... elemeinek normája $\frac{1}{1\|x_1\|}\|x_1\|$; ... $\Rightarrow 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots \to 0$. $\|A \frac{x_1}{1\|x_1\|}\|_Y = \frac{1}{1\|x_1\|}\|Ax_1\|_Y \geq \frac{1\|x_1\|}{1\|x_1\|} = 1$. Hasonlóan

$\|A\frac{x_j}{j\|x_j\|}\| = \frac{1}{j\|x_j\|}\|Ax_j\| \geq \frac{j\|x_j\|}{j\|x_j\|} = 1 \Rightarrow A$ nem lehet 0-ban folytonos (egy 0-ba tartó sorozat képei nem tartanak 0-hoz).

Alkalmazás: $\forall \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ - lineáris függvény folytonos.

Biz.: Elég igazolni, hogy korlátos / 0-ban folytonos. Ehhez $x_n \to 0 \Rightarrow Ax_n \to 0$, kompaktság ~~Biztosítja~~ Ha $x_n \to 0 \Rightarrow \forall$ komponense tart 0-hoz. $(Ax_n)_l \leq c \cdot \max_j \{(x_n)_j\}$, ha ...

$\max_j \{(x_n)_j\} \to 0 \Rightarrow Ax_n \to 0$.

~~Ab~~:

Pl. 1.) $N: f \to f(1)$, $X = C[0,1]$; $\|f\| = \int_0^1 |f|$

$f_n = x^n \quad \|f_n\| = \int_0^1 |x^n| dx = \frac{1}{n+1}$, $\|f_n\| \to 0 \Rightarrow f_n \to 0$

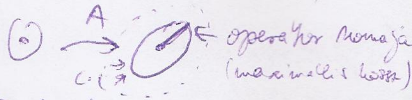
$N(f_n) = f_n(1)$

Legyen $A: X \to Y$ korlátos lineáris (jel.: $L(X,Y)$, $B(X,Y)$). Legyen A normája: (ahol $D(A)=X$)

$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X = 1\}$

+ az ~~elérhető~~ $\exists$, ~~és véges~~ és véges (a korlátosság miatt $\exists$ olyan c: $\|Ax\| \le c\|x\|$ $\forall x \in X$)

Áll.: Ezzel ellátva az $L(X,Y)$ vektorteret, normált teret kapunk.



Biz.: Azt kell belátni, hogy $\|.\|$ (operátor norma) valóban norma. $\|A\| \ge 0$, mert nem-negatív értékek szuprémuma. Ez pontosan akkor lehet 0, ha $\|Ax\| = 0$ $\forall x \in X$-re, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow \|Ax\| = 0$ $\forall x \in X$, $\to$ $Ax = 0$ $\forall x \in X \Rightarrow A = 0$ $\leftarrow$ az az operátor, amely mindent 0-ba képez. $\|\lambda A\| = \sup\{\|\lambda A x\| : \|x\| = 1\} = \sup\{|\lambda| \cdot \|Ax\| : \|x\| = 1\} = |\lambda| \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\} \overset{DEF}{=} |\lambda| \|A\|$. $\|A+B\| = \sup\{\|(A+B)x\| : \|x\| = 1\} \le \sup\{\|Ax\| + \|Bx\| : \|x\| = 1\} \le \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\} + \sup\{\|Bx\| : \|x\| = 1\} = \|A\| + \|B\|$.

alt. DEF.: Az $\|A\| = \min\{c : \|Ax\| \le c\|x\| \ \forall x \in X\}$. Ez az előzővel ekvivalens definíció

Áll.: 1.) Teljesül, hogy $\forall A \in L(X,Y)$ esetén az $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$. 2.) Az alt. def ekvivalens az eredetivel.

Biz.: 1.) Legyen $z \in X$ $\forall$, ekkor $\|Az\| = \|A(\|z\| \cdot \underbrace{\frac{z}{\|z\|}}_{\text{normája } 1})\| = \|z\| \|A(\frac{z}{\|z\|})\| \le \|z\| \sup_{\|x\|=1}\{\|Ax\|\} = \|z\|\|A\|$.

2.) Mivel az $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$, ezért ~~az olyan egyenlőtlenségek között~~ a lehetséges c együtthatók infimuma biztos legfeljebb $\|A\|$. (Indirekt). Ha ez kisebb lenne, mint $\|A\|$, akkor lenne α a kettő között, hogy

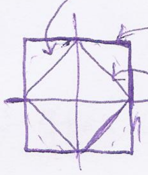
inf $\|A\|$ $\|Ax\| \le \alpha \|x\|$ $\forall x \in X$. ~~Az Másrészt $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$ teljesül, ami ellentmond annak, hogy~~ Ekkor ha vesszük $\sup_{\|x\|=1}\{\|Ax\|\} \le \alpha$, ami ellentmond annak, hogy $\alpha < \|A\|$.

$\inf\{c : \|Ax\| \le c\|x\| \ \forall x \in X\} = \|A\|$. Ekkor $\|A\|$ alkalmas minimum is, mert az $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$ igaz.

pl. 1.) Maximumnormák. $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ahol $\{\mathbb{R}^n, \|.\|_{max}\}$. Ekkor $\|A\|_{max (\infty)} = \sup\{\|Av\|_{max} : \|v\|_{max} = 1\} =$

$\|v\|_{max} = \max_{j \in \{1,\dots,n\}} |v_j|$ = maximális sor-abs. érték összeg $= \max_j \{\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|\}$.

pl. 2.) $\mathbb{R}^2$ egységgömbje, ha $(\mathbb{R}^2, \|.\|_{max})$ a normált tér $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ esetén $\|v\| = \|(v_1, v_2)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$



$\|v\| = 1$, ha nagyobbik komponens abszolútértéke 1. $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ ~~eset~~ esetén

$\|v_A\|_1 = |v_1| + |v_2| = 1$

pl. 3.) Ha $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, és a hozzátartozó ~~négyzetes~~ mátrix szimmetrikus, akkor $\|A\|_2 = \max_j \{\lambda_j\}$

A sajátértékei

Állítás

TÉTEL: Ha X, Y normált terek teljesek (Banach-tér), akkor $L(X,Y)$ is teljes.

Biz.: Teljes: benne minden Cauchy-sorozat konvergens. Azt kell igazolni, hogy ha (A_n) egy Cauchy-sorozat $L(X,Y$-ban), akkor van olyan $A \in L(X,Y)$, hogy $A_n \to A$ (operátornormában). Ha (A_n) Cauchy-sorozat, akkor $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $j,k \ge N$-re $\|A_j - A_k\| < \varepsilon$.

Ekkor $\forall x \in X$-re igaz, hogy $\|\underbrace{A_j x - A_k x}_{=(A_j - A_k)x}\| \le \|A_j - A_k\| \cdot \|x\|$, vagyis az $(A_n x)$ is Cauchy-sorozat rögzített x-re.
(Ha $\|A_j x - A_k x\| < \varepsilon$-t akarjuk, akkor válasszunk olyan N-et, hogy $\|A_j - A_k\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$)

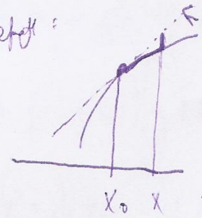
Mivel Y teljes, ezért benne az $(A_n x)$ Cauchy-sorozat konvergens. Legyen $Ax = \lim(A_n x)$, ez A def-je.
Igazolni kell, hogy $A_n \to A$ operátornormában, és azt, hogy $A \in L(X, Y)$. Az előbbi igazolja a másodikat: $\|Ax\| = \lim \|A_n x\| \le \sup(\|A_n\| \|x\|) \le \|x\| \underbrace{\sup \|A_n\|}_{\text{ez véges, mert } \{\|A_n\|\} \text{ korlátos}}$. Az ekvivalens definíció miatt $\|A\| <$ korlát $= \sup\|A_n\|$.
Most igazoljuk a másodikat:

$$\|A_n - A\| \overset{DEF}{=} \sup\{\|(A_n - A)x\| : \|x\| = 1\} \overset{DEF}{=} \min\{c : \|(A_n - A)x\| \le c\|x\| \ \forall x \in X\} = \min\{c : \|\underbrace{(A_n - A)x}_{=A_n x - Ax}\| \le c, \|x\| = 1\}.$$

Ezért ~~$A_n \to A$ ezekben~~ $Ax = \lim A_n x$ esetén $\|A_n x - Ax\|$ tetszőlegesen kicsi lesz, vagyis ezért c is kisebb ε-nál egy indextől kezdve, és vagyis $A_n \to A$.

→ 11. tétel: deriválás $X \to Y$ típusú függvényekre

Szemléletesen:



$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)-f(x)}_{\eta(x) \text{ eltérés}}$ kicsi, azaz $(x-x_0)$-lal ~~osztva~~ 0-hoz tart.

$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\eta(x)$

DEF.: Legyen $f: X \to Y$ (ahol X és Y normált terek). Legyen $x_0 \in \operatorname{int} D_f$. ~~Akkor~~ Ekkor azt mondjuk, hogy f deriválható x_0-ban és deriváltja ott az $A \in L(X,Y)$ folytonos lineáris függvény, ha $\exists$ olyan $\eta: X \to Y$ függvény, hogy $\underbrace{f(x)-f(x_0)}_{\in Y} = \underbrace{A(x-x_0)}_{\in Y} + \underbrace{\eta(x)}_{\in Y}$, ~~ahol~~ emellett $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{\|x-x_0\|} = 0$; jel: $f'(x_0)=A$.

ÁLL.: A definíció egyértelmű. (azaz ha A_1 és A_2 megfelelő, akkor $A_1=A_2$).

BIZ.: Legyenek az $f(x)-f(x_0)=A_1(x-x_0)+\eta_1(x)$ és $f(x)-f(x_0)=A_2(x-x_0)+\eta_2(x)$. Ekkor az $(A_1-A_2)(x-x_0)=\eta_2(x)-\eta_1(x) \to \lim\limits_{x-x_0 \to 0} \frac{(A_1-A_2)(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = \lim\limits_{x-x_0 \to 0} \frac{\eta_2(x)-\eta_1(x)}{\|x-x_0\|} = 0$

$\lim\limits_{v \to 0} \frac{(A_1-A_2)v}{\|v\|} = 0$ (akkor is, ha $\forall v$ ~~vektorra~~ $\in X$-et véve a $\frac{v}{1}, \frac{v}{2}, \frac{v}{3}, \dots$-ra alkalmazom)

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(A_1-A_2)\frac{v}{n}}{\|\frac{v}{n}\|} = 0 \Rightarrow$ minden tagja 0, azaz az $(A_1-A_2)v = 0$ $\forall v \in X$-re $\Rightarrow$

$\|$ konstans sorozat $\qquad \Rightarrow A_1-A_2=0 \Rightarrow A_1=A_2$

$\frac{(A_1-A_2)v}{\|v\|}$

ÁLL.: Ha $f: X \to Y$ deriválható x_0-ban (azaz $f'(x_0)$ $\exists$), akkor f folytonos x_0-ban.

BIZ.: Elegendő megmutatni, hogy ha az $(x_n) \subset D_f$, $(x_n) \to x_0$, akkor az $f(x_n) \to f(x_0)$ (sorozatokkal való folytonosság). Ha deriválható: $f(x_n)-f(x_0)=A(x_n-x_0)+\eta(x_n)$. Mivel $A: X \to Y$ folytonos, ezért $x_n - x_0 \to 0$ esetén $A(x_n-x_0) \to 0$. Másrészt $\frac{\eta(x_n)}{\|x_n-x_0\|} \to 0$ miatt $\eta(x_n) \to 0$ kell, hogy teljesüljön. Vegyük, hogy $\underbrace{\|x_n-x_0\|}_{\downarrow 0} \underbrace{\frac{\eta(x_n)}{\|x_n-x_0\|}}_{\downarrow 0} = \underbrace{\eta(x_n)}_{\downarrow 0}$. $\lim[f(x_n)-f(x_0)] = \lim[A(x_n-x_0)+\eta(x_n)] = 0$

$\Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$!

Műveleti szabályok

ÁLL.: Ha f és g deriválható x_0-ban, akkor az összegük is, és $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

BIZ.: Tudjuk, hogy x_0 egy környezetében értelmes f (def miatt), egy másikban értelmes g, ezért ezek metszetében, (ami maga is x_0 egy környezete) $f+g$ értelmes. Ha $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\eta_f(x)$ és $g(x)-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)+\eta_g(x)$, akkor $(f+g)(x)-(f+g)(x_0)=[f'(x_0)+g'(x_0)](x-x_0)+(\eta_f+\eta_g)(x)$. Azt kell még ellenőrizni, hogy az alábbi limesz 0. → $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\eta_f(x)+\eta_g(x)}{\|x-x_0\|} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\eta_f(x)}{\|x-x_0\|} + \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\eta_g(x)}{\|x-x_0\|} = 0+0=0$

pl. 1.: $f:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$; $f(A)=A^2$ (a derivált nem $2A$), $x-x_0=\Delta$

$$f(A+\Delta)-f(A)=(A+\Delta)^2-A^2=(A+\Delta)(A+\Delta)-A^2=\underbrace{A\Delta+\Delta A}_{f'(A)\Delta}+\underbrace{\Delta^2}_{\eta(x)}$$ így az $f'(A)$ lineáris,

$[f'(A)]\Delta=A\Delta+\Delta A$. Igaz-e, hogy $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\Delta^2}{\|\Delta\|}=0$

$$\left\|\frac{\Delta^2}{\|\Delta\|}\right\|=\frac{1}{\|\Delta\|}\|\Delta\cdot\Delta\|\le\frac{\|\Delta\|}{\|\Delta\|}\|\Delta\|\to 0$$ (akármilyen normában)

pl. 2.: Adott $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ esetén $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x)=(Ax,x)$ skalárszorzattal. $f'(x_0)=?$ $\sim A+A^T$

$$f(x_0+\Delta)-f(x_0)=(A(x_0+\Delta),x_0+\Delta)-(Ax_0,x_0)=(Ax_0,x_0)+(Ax_0,\Delta)+(A\Delta,x_0)+(A\Delta,\Delta)-(Ax_0,x_0)=$$

$$=\underbrace{(Ax_0,\Delta)+(A^Tx_0,\Delta)}_{f'(x_0)\Delta}+\underbrace{(A\Delta,\Delta)}_{\eta(x+\Delta)}$$

$|A\Delta|\cdot|\Delta|$

$$f'(x_0)(v)=((A+A^T)x_0,v),\qquad \frac{(A\Delta,\Delta)}{|\Delta|}\le\frac{|A\Delta||\Delta|}{|\Delta|}=|A\Delta|\xrightarrow{\Delta\to 0}0$$

Lemma: Ha $f:X\to Y$ deriválható x_0-ban, akkor annak egy környezetében $x\to\frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|}$ hozzárendelési függvény (amely a fenti környezet $x\neq x_0$ pontjaiban értelmes) korlátos.

Biz.: Tudjuk, hogy az $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\eta(x)$; átrendezve, normákat véve:

$$\|f(x)-f(x_0)\|=\|f'(x_0)(x-x_0)+\eta(x)\|\le\|f'(x_0)\|\cdot\|x-x_0\|+\|\eta(x)\|\quad(\text{ha } x\neq x_0)$$

$$\frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|}\le\underbrace{\underbrace{\|f'(x_0)\|}_{\text{rögzített}}+\underbrace{\frac{\|\eta(x)\|}{\|x-x_0\|}}_{\text{DEF szerint } x_0 \text{ egy környezetében korlátos}}}_{\text{korlátos}}$$

korlátos → ha ez korlátos, akkor ~~az egyenlőtlenség~~ $\frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|}$ is korlátos.

TÉTEL: Legyen $f:Y\to Z$, $g:X\to Y$ függvények úgy, hogy g deriválható x_0-ban, f pedig deriválható $g(x_0)$-ban. Ekkor az $f\circ g:X\to Z$ függvény deriválható x_0-ban és az $\underbrace{(f\circ g)'(x_0)}_{L(X,Z)}=\underbrace{\underbrace{f'(g(x_0))}_{L(Y,Z)}\cdot\underbrace{g'(x_0)}_{L(X,Y)}}_{L(X,Z)}$.

Biz.: Tudjuk, hogy (a deriválták definíciójából) az $f(g(x))=f(g(x_0))+f'(g(x_0))(g(x)-g(x_0))+\eta_1(g(x))$, mert f deriválható $g(x_0)$-ban. $g(x)\in g(x_0)$ azon környezetének, ahol f értelmes, $g(x)\in D_f$.

még tudod, hogy $g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \eta_2(x)$, és olyan x-ekre igaz, amelyekre g értelmezve x_0 egy környezetében értelmes. Ezt az előzőbe helyettesítve: $f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\left[\underbrace{g'(x_0)(x-x_0) + \eta_2(x)}\right] + \eta_1(g(x)) =$

$= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\left[g'(x_0)(x-x_0)\right] + f'(g(x_0))\eta_2(x) + \eta_1(g(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = (f \circ g)(x_0) + \left[f'(g(x_0))g'(x_0)\right](x-x_0) + f'(g(x_0))\eta_2(x) + \eta_1(g(x))$. Látni kell, hogy

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(g(x_0))\eta_2(x) + \eta_1(g(x))}{\|x-x_0\|} = 0$, azaz $\dfrac{\|f'(g(x_0))\eta_2(x) + \eta_1(g(x))\|}{\|x-x_0\|} \xrightarrow{x \to x_0} 0$, ehhez pedig már csak annyi kell, hogy egy $\leq$ is tartson 0-hoz.

Ehhez 1.) belátjuk azt, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\|f'(g(x_0))\eta_2(x)\|}{\|x-x_0\|} \leq$

$\leq \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\|f'(g(x_0))\|\|\eta_2(x)\|}{\|x-x_0\|} = \|f'(g(x_0))\| \underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\|\eta_2(x)\|}{\|x-x_0\|}}_{=0\text{, mert } g \text{ deriválható } x_0\text{-ban}} \overset{DEF}{=} 0$

2.) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\|\eta_1(g(x))\|}{\|x-x_0\|} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\|\eta_1(g(x))\|}{\|g(x)-g(x_0)\|} \cdot \dfrac{\|g(x)-g(x_0)\|}{\|x-x_0\|} = \lim\limits_{x \to x_0} \|\underbrace{\eta_1(g(x))S(x)}\| \cdot \underbrace{\dfrac{\|g(x)-g(x_0)\|}{\|x-x_0\|}} = 0 \Rightarrow x \to f \circ g(x)$ deriváltja x_0-ban $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

$g(x) \neq g(x_0)$, $S(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\|g(x)-g(x_0)\|}, & \text{ha } g(x) \neq g(x_0) \\ 0, & \text{ha } g(x) = g(x_0) \end{cases}$

↓ 0, mert f deriválható, $f(g(x_0))$ létezése miatt

korlátos (lemma miatt)

~~pl~~ ÁLL.: (Valós függvények inverzének deriváltja). Tfh. $f: I \to \mathbb{R}$ és szigorúan monoton. Továbbá f deriválható $\operatorname{int} I$-n és $f'(x_0) \neq 0$. Ekkor f^{-1} deriválható $f(x_0)$-ban és ~~deriváltja~~ $[f^{-1}]'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ vagy $[f^{-1}]'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$, $(f(x_0) = y_0)$.

BIZ.: Legyen $y_0 = f(x_0)$, ekkor $\lim\limits_{y \to y_0} \underbrace{\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} \overset{DEF}{=} \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} =$

(tétel) f^{-1} is folytonos y_0-ban, $y \to y_0$ esetén $f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0)$

$\neq 0$, ha $x \neq x_0$. Ha f szigorúan monoton, akkor $f(x) = f(x_0) \Rightarrow x = x_0$

$= \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \lim\limits_{f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0)} \dfrac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0)} \dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} =$

$= \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, a nevező nem 0.

pl. 1.: $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f = \sin$, $f^{-1} = \arcsin$, $\sin|_I$ bij. mon. növő. $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin(y))} =$

$$= \frac{1}{\underbrace{\cos(\underbrace{\arcsin(y)}_{\in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)})}_{< 0 \ I\text{-n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (\forall y \in R_{\sin|_I} = (-1,1))$$

→ <u>12. tétel:</u>

#Fontos speciális eset: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fv. parciális deriváltjainak kiszámítása. Tfh. a ~~derivált létezik~~ $f'(\underline{x}_0)\ \exists$. Tudjuk, hogy $f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = f'(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) + \eta(\underline{x})$ alakú, ahol $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{\eta(\underline{x})}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} = 0$. Itt $f'(\underline{x}_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, ez azonosítható egy mátrixszal, amelynek n oszlopa és 1 sora van → sorvektor. $= [a_1, a_2, \dots, a_j, a_n]$

Most speciális $\underline{x}$-et választok, ~~ahol~~ $f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = \sum_{j=1}^{n} a_j [\underline{x} - \underline{x}_0]_j + \eta(\underline{x})$, akkor, hogy az a_j-t meghatározzuk.

$\underline{x} = \underline{x}_0 + \varepsilon_n \underline{e}_j$, ahol $\underline{e}_j = (0, \dots, 0, \overset{j\text{-edik}}{1}, 0, \dots, 0)$. Ekkor $f(\underline{x}_0 + \varepsilon_n \underline{e}_j) - f(\underline{x}_0) = a_j \varepsilon_n + \eta(\underline{x}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_j = \frac{f(\underline{x}_0 + \varepsilon_n \underline{e}_j) - f(\underline{x}_0)}{\varepsilon_n} - \underbrace{\frac{\eta(\underline{x})}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|}}_{\to 0,\ \varepsilon_n \to 0} \cdot \varepsilon_n \to f(\underline{x}_0 + \varepsilon_n \underline{e}_j) \text{ deriváltja.}$$

(itt $\underline{x} - \underline{x}_0 = (0, \dots, 0, \varepsilon_n, 0, \dots, 0)$)

def. szerint a j-edik változó szerinti parciális derivált

#Ha $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, akkor $f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, ami (ha $\exists$, akkor) egy n oszlopból és k sorból álló mátrixszal azonosítható; $\underbrace{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^k} = \underbrace{f'(\underline{x}_0)}_{\mathbb{R}^{k \times n}} \underbrace{(\underline{x} - \underline{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^n} + \eta(\underline{x})$ → ennek j-edik komponense a mátrix j-edik sora és a vektor skalárszorzata

$$[f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)]_j = [a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}](\underline{x} - \underline{x}_0) + [\eta(\underline{x})]_j$$

$= f_j(\underline{x}) - f_j(\underline{x}_0)$, vagyis a fenti vektor az $[a_{j1}, \dots, a_{jn}]$ vektor a j-edik komponens deriváltja. $\underline{x} \to f_j(\underline{x})$, tehát a derivált mátrix j-edik sorába a j-edik koordinátafüggvény $(f_j(\underline{x}))$ parciális deriváltjai kerülnek.

$$\begin{array}{cc} & \overset{n}{\longleftrightarrow} \\ j\text{-edik} \to & \begin{bmatrix} \\ \partial_1 f_j \ \partial_2 f_j \cdots \partial_n f_j \\ \\ \end{bmatrix} \updownarrow k \end{array}$$

→ Lokális ~~...~~ növekedés és deriváltak:

Def.: Azt mondjuk, hogy az (minden esetben $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \text{int } D_f \Leftrightarrow f$ értelmes x egy környezetében) az f függvény x-ben lokálisan nő, ha x-nek van olyan környezete, hogy ott $x_+ > x$ esetén $f(x_+) \geq f(x)$ és $x_- < x$ esetén $f(x_-) \leq f(x)$, tehát tőle balra legfeljebb, tőle jobbra legalább akkora értékeket vesz fel x-ben. Hasonlóan azt mondjuk, hogy f szigorúan lokálisan nő x-ben, ha van olyan környezete, hogy $x_+ > x$ esetén $f(x_+) > f(x)$, és $x_- < x$ esetén $f(x_-) < f(x)$.

#Hasonló definíció: a (szigorú) lokális csökkenés hasonlóan definiálható.

Áll.: Tf mindig, hogy $f'(x)$ $\exists$! Ha f az x-ben lokálisan nő, akkor $f'(x) \geq 0$. (1.) Ha $f'(x) > 0$, akkor $f(x)$ az x-ben szigorúan lokálisan nő. (2.)

Biz.: 1.) $f'(x) = \lim\limits_{\substack{x_+ \to x \\ x_+ > x}} \dfrac{\overbrace{f(x_+) - f(x)}^{\geq 0}}{\underbrace{x_+ - x}_{\geq 0}} \geq 0$.

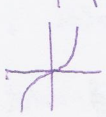
2.) (Indirekt). Ha nem igaz az állítás, akkor x-nek minden környezetében van olyan $x_- < x$ pont, hogy $f(x_-) \geq f(x)$ vagy $x_+ > x$ pont, hogy $f(x_+) \leq f(x)$. Ekkor van olyan $x_n \to x$ sorozat, hogy $\dfrac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}$, $x \neq x_n$] $x_n = x_-$ esetén, nev. poz, számláló ≤ 0 $\Rightarrow$ tört ≤ 0

$x_n = x_+$ esetén száml. ≥ 0, nev. < 0 $\Rightarrow$ ≤ 0

$\Rightarrow \lim\limits_{x_n \to x} \dfrac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \leq 0$, ami ellentmond a feltételnek, igazoltuk az állítást.
$= f'(x)$

Ezek megfordítása nem igaz.

Pl. 1.:  $f(x) = -x^3$ $x = 0$-ban.

pl. 2.:  $f(x) = x^3$ $x = 0$-ban.

TÉTEL: Ha f az x-ben deriválható és lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x) = 0$.
(akkor van lokális szélsőérték, ha lokális minimuma (vagy maximuma) van, azaz x egy környezetében nincs $f(x)$-nél kisebb (vagy nincs $f(x)$-nél nagyobb) érték)

Biz.: (Indirekt). Ha pl. $f'(x) > 0$, akkor f az x-ben szigorúan lokálisan nő, azaz x minden környezetében van $x_+ > x$, hogy $f(x_+) > f(x)$, ami ellentmondás*. Ha $f'(x) < 0$, akkor tekintsük a $-f$ függvényt! Erre $(-f)'(x) > 0$, azaz $-f$ szigorúan lokálisan nő, vagyis $-f$-nek nem lehet maximuma, sem minimuma x-ben, tehát f-nek sem lehet maximuma vagy minimuma x-ben.

* Ha $x_- < x$, akkor pedig $f(x_-) < f(x)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ nem lehet minimum.

Következmény: Rolle-tétel.

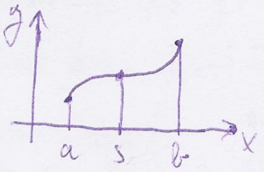
→ 13. tétel:

$\overbrace{I}$ $\overbrace{\text{int} I}$

TÉTEL: (Rolle-tétel). Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(a) = f(b)$ és f deriválható (a,b)-n. Ekkor $\exists$ van olyan $c \in (a,b)$, hogy $f'(c) = 0$!

Biz.: R_f is sorozatkompakt halmaz. ⇒ R_f korlátos és zárt, vagyis $R_f = [\inf R_f, \sup R_f]$ ⇒ ⇒ $R_f = [\min f, \max f]$. Ha f konstans, akkor bárhol 0 a derivált; Ha ha nem, akkor valahol az intervallum belsejében felveszi $\min f$-et vagy $\max f$-et, ott szélsőérték van, tehát ott a deriváltja 0.

→ Lagrange-középértéktétel: Tegyük fel, hogy $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ itt folytonos, f deriválható (a,b)-n ($\forall$ pontjában). Ekkor $\exists$ olyan $s \in (a,b)$, hogy $f'(s) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Biz.: (Ennek spec. esete a Rolle-tétel). Tekintsük a következő $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt. $g(x) \stackrel{!}{=} f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Itt $g(a) = f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = f(a)$ és $g(b) = f(a)$ szintén! Azaz g-re alkalmazható a Rolle-tétel, azaz $\exists s \in (a,b)$, hogy $g'(s) = 0$. Ekkor tudjuk, hogy $g'(s) = f'(s) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(s) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} + g'(s)$.

ÁLL.: Tegyük fel, hogy $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény deriválható (a,b)-n. Ekkor f monoton növő (a,b)-n $\Longleftrightarrow$ $f' \geq 0$ (a,b)-n.

Biz.: 1.) $\boxed{\Rightarrow}$ Ha monoton növő az intervallumon, akkor $\forall$ pontban monoton növő, de akkor $\forall$ pontban nem negatív a deriváltja. 2.) $\boxed{\Leftarrow}$ (Indirekt). Ha nem monoton növő, akkor $\exists$ olyan $x_1, x_2 \in (a,b)$, hogy $x_1 < x_2$, de $f(x_1) > f(x_2)$. Ekkor a Lagrange-középértéktétel szerint van olyan $s \in (x_1, x_2)$, hogy $f'(s) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$, ami ellentmond annak, hogy $f'(s) \geq 0$.

Következmény: Ha $f' = 0$ egy I-n, akkor ott f konstans. ~~Ekkor~~ Ha $f' \geq 0 \Rightarrow f$ itt monoton növő, $-f' \geq 0 \Rightarrow -f$ itt monoton növő $\Rightarrow f$ monoton csökkenő. Ha f monoton növő és csökkenő I-n, akkor csakis konstans lehet!

ÁLL.: Tegyük fel, hogy $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ deriválható (a,b)-n. Ekkor f szigorúan monoton növő (a,b)-n $\Longleftrightarrow$ $f' \geq 0$ (a,b)-n és nincs olyan intervallum (a,b)-n, hogy $f' = 0$.

Biz.: 1.) $\boxed{\Rightarrow}$ Mert (szigorúan) monoton növő $\forall$ pontban, tehát $f' \geq 0$ teljesül. Ha volna olyan intervallum, ahol $f' = 0$, akkor ott f konstans lenne, ami ellentmond a szigorúan monoton növésnek. 2.) $\boxed{\Leftarrow}$ Ha nem lenne szigorúan monoton növő, akkor volna olyan $x_1 < x_2$, hogy $f(x_1) \geq f(x_2)$. Emellett f monoton növő, tehát $f(x_1) \stackrel{!}{=} f(x_2)$, ekkor f ugyanazt az értéket veszi fel $[x_1, x_2]$ intervallumon, akkor f itt konstans, ami ellentmond a feltevésnek.

Pl. 1.) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ 0, & \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\} \end{cases}$ $\quad x \to f(0,0)$, $x \to 0$

$\partial_1 f(0,0) = 0$, $\partial_2 f(0,0) = 0 \to (\partial_1 f(0,0), \partial_2 f(0,0)) = (0,0)$; ez nem derivált, mert $f(0,0)$ nem deriválható.

Áll.: Ha az $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ függvénynek teljesül, hogy egy (x_0,y_0,z_0) pont valamilyen környezetében $\partial_1 f(x,y,z)$, $\partial_2 f(x,y,z)$, $\partial_3 f(x,y,z)$ parciális deriváltak léteznek, és azok (x_0,y_0,z_0)-ban folytonosak, f deriválható (x_0,y_0,z_0)-ban és $f'(x_0,y_0,z_0)=(\partial_1 f(x_0,y_0,z_0),\partial_2 f(x_0,y_0,z_0),\partial_3 f(x_0,y_0,z_0))$.

Biz.: Felhasználva, hogy $x_1\to f(x_1,y,z)$-re érvényes a Lagrange-középértéktétel:

$$f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)=f(x,y,z)-f(x_0,y,z)+f(x_0,y,z)-f(x_0,y_0,z)+f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)=$$

Lagrange

$$=\partial_1 f(x_s,y,z)(x-x_0)+\partial_2 f(x_0,y_s,z)(y-y_0)+\partial_3 f(x_0,y_0,z_s)(z-z_0)=$$

$$=[\partial_1 f(x_s,y,z),\partial_2(x_0,y_s,z),\partial_3(x_0,y_0,z_s)][(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)]=$$

maradéktag

$$=[\partial_1 f(x_0,y_0,z_0),\partial_2 f(x_0,y_0,z_0),\partial_3 f(x_0,y_0,z_0)][(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)]+$$

$$+\underbrace{[\partial_1 f(x_s,y,z)-\partial_1 f(x_0,y,z),\partial_2 f(x_0,y_s,z)-\partial_2 f(x_0,y_0,z),\partial_3 f(x_0,y_0,z_s)-\partial_3 f(x_0,y_0,z_0)]}_{\eta_0}\underbrace{[(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)]}_{\eta(x,y,z)}$$

Igaz-e, hogy $\eta_0\to 0$? Igen, mert $(x_s,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)$, $(x_0,y_s,z)\to(x_0,y_0,z_0)$, $(x_0,y_0,z_s)\to(x_0,y_0,z_0)$.

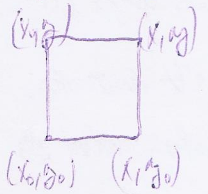
Igaz-e, hogy $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}\dfrac{\eta(x,y,z)}{\|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\|}\to 0$? Igen.

Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Ekkor $\partial_j f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$; $\partial_k(\partial_j f):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, vagy $\partial_j(\partial_k f):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$; $\partial_k\partial_j f\overset{?}{=}\partial_j\partial_k f$.

Feltétel az egyenlőségre:

Young-tétel: Ha egy $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ függvény esetén egy $\underline{x}_0$ pont környezetében a másodrendű parciális deriváltak léteznek és folytonosak, akkor ezek $\underline{x}_0$-ban felcserélhetők.

Biz.: Abban az esetben végezzük el, ha $n=2$, az általános eset pedig úgy kapható, hogy az $(x_j,\dots,x_k)\to f(x_{01},\dots,x_j,\dots,x_k,\dots,x_{0n})$ függvényre alkalmazzuk, mert ennek első változó szerinti deriváltja éppen $\partial_{x_j} f(\underline{x}_0)$ és második változó szerinti deriváltja $\partial_{x_k} f(\underline{x}_0)$. $n=2$ eset.



(x_0,y_0) pontban

$F(x)=f(x,y)-f(x,y_0)$

$G(y)=f(x,y)-f(x_0,y)$, itt

$$F(x)-F(x_0)=f(x,y)-f(x,y_0)-f(x_0,y)+f(x_0,y_0)\overset{\text{Lagrange}}{=}F'(x_s)(x-x_0)=[\partial_1 f(x_s,y)-\partial_1 f(x_s,y_0)](x-x_0)$$

$x_s\in[x,x_0]$

$$G(y)-G(y_0)=f(x,y)-f(x_0,y)-f(x,y_0)+f(x_0,y_0)=G'(y_s)(y-y_0)=[\partial_2 f(x,y_s)-\partial_2 f(x_0,y_s)](y-y_0).$$

$y_s\in[y,y_0]$

Most $y\to\partial_1 f(x_s,y)$, $x\to\partial_2 f(x,y_s)$ függvényekre alkalmazzuk a Lagrange-középértéktételt, azaz

$$\partial_1 f(x_s,y)-\partial_1 f(x_s,y_0)=\partial_2(\partial_1 f(x_s,y_r))(y-y_0)$$

$y_r\in[y,y_0]$

$$\partial_2 f(x,y_s)-\partial_2 f(x_0,y_s)=\partial_1(\partial_2 f(x_r,y_s))(x-x_0)$$

$x_r\in[x,x_0]$

$$F(x)-F(x_0)=\partial_2\partial_1 f(x_s,y_r)(y-y_0)(x-x_0)$$

$$G(y)-G(y_0)=\partial_1\partial_2 f(x_r,y_s)(x-x_0)(y-y_0)$$

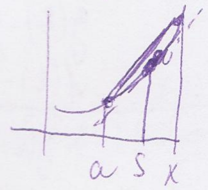
$$\Rightarrow\partial_2\partial_1 f(x_s,y_r)=\partial_1\partial_2 f(x_r,y_s)$$

$$\downarrow\ \begin{smallmatrix}x\to x_0\\ y\to y_0\end{smallmatrix}\qquad\downarrow$$

$$\partial_2\partial_1 f(x_0,y_0)=\partial_1\partial_2 f(x_0,y_0)$$

~~Tétel~~: Középérték-tételek:

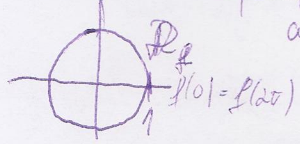
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(s),\ s\in(x,a)$? Igaz-e: $f(x)-f(a) = (x-a)f'(s)$, $s\in(x,a)$ valamilyen ~~...~~ közbülső hely.



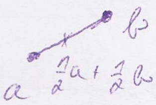
Általában nem! ~~pl~~ cél: általánosítás (Lagrange középérték-tétel)

pl. n.:j $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $f(t)=(\cos t, \sin t) \Rightarrow f'(t)=(-\sin t, \cos t)$

$(0,0)=f(2\pi)-f(0) \overset{?}{=} 2\pi\cdot f'(s) = 2\pi(-\sin s, \cos s)$ → nincs ilyen s.



Egy X normált térben az a és b közti szakasz: $\{x : x = ta+(1-t)b,\ t\in[0,1]\}$
jel.: $\overline{ab}$.



Áll.: Legyen $f:X\to\mathbb{R}$, f folytonos $\overline{ab}$-n és deriválható itt (a végpontokban nem kell). Ekkor van olyan $s\in\overline{ab}$, hogy $f(b)-f(a)=f'(s)(b-a)$. (Lagrange-középérték-tétel általánosítása).

Biz.: Legyen φ olyan, hogy értékkészlete $\overline{ab}$ és $\mathbb{R}\to X$ típusú, azaz $\phi(t)=ta+(1-t)b$;
$\phi:[0,1]\to\overline{ab}$; $\phi(0)=b$; $\phi(1)=a$. $\phi'(t)=a-b$ (mert $\phi(x)-\phi(x_0) = \cancel{\dots}$
$= xa+(1-x)b-(x_0a+(1-x_0)b)) = (x-x_0)\underbrace{(a-b)}_{\phi'(x_0)})$. Tekintsük ~~...~~ az $f\circ\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, ~~...~~ erre alkalmazzuk a L-f k-é-t-t!

Itt $\underbrace{f\circ\phi(1) - f\circ\phi(0)}_{=f(a)-f(b)} = (f\circ\phi)'(s_0)(1-0) = (f\circ\phi)'(s_0) = f'(\phi(s_0))\phi'(s_0) = f'(\phi(s_0))(a-b) \Rightarrow \phi(s_0)$ helyen vett deriváltja, igaz a tétel.

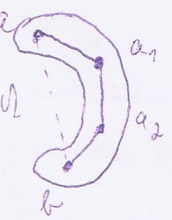
$\boxed{s=\phi(s_0)}$

Lagrange-egyenlőtlenség: Legyen $f:X\to Y$, továbbá f deriválható $\overline{ab}$-n. Ekkor ~~...~~

$\|f(b)-f(a)\| \le \sup_{s\in\overline{ab}} \|f'(s)\|\cdot\|b-a\|$.

Alkalmazás:

Áll.: Legyen $f:X\to Y$, $f'=0$ egy olyan $\Omega\subset X$ halmazon, amelynek bármely két pontja (törött) szakaszokkal összeköthető. Ekkor itt f konstans.



Biz.: Igazolni kell, hogy $f(a)=f(b)$ igaz ~~...~~ esetén. Kössük őket össze egy ~~...~~ $\overline{aa_1}, \overline{a_1a_2}, \dots, \overline{a_nb}$ törött vonallal. Mindegyiken $\|f(a)-f(a_1)\| \le \sup_{s\in\overline{aa_1}} \|f'(s)\|\|a-a_1\| = 0\cdot\|a-a_1\| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a)=f(a_1)$. ~~...~~ Hasonlóan $f(a_1)=f(a_2)$, $f(a_2)=f(a_3)$, ..., $f(a_n)=f(b) \Rightarrow f(a)=f(b)$

~~Áll. tétel~~

~~Cauchy-középérték-tétel: f, g: [a,b] → R, folytonosak itt is folytonosak (a,b)-n~~
~~deriválhatóak, emellett $g'(s)\neq 0$ $s\in(a,b)$. Ekkor van olyan s, hogy~~

$\cancel{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(s)}{g'(s)}}$

~~Biz.: $g(a)\neq g(b)$, mert ellenkező esetben $g'(s)=0$ lenne valamilyen $s\in(a,b)$-re~~

→ 14. tétel: Bilineáris operátorok, második derivált

DEF.: Az $A: X\times Y\to Z$ függvényt bilineárisnak hívjuk, ha rögzített $x\in X$ esetén $y\to A(x,y)$ hozzárendeléssel adott $Y\to Z$ függvény lineáris, és hasonlóan, rögzített $y\in Y$-ra az $X\to Z$ függvény is az.

Pl. 1.:] $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x_0 rögzített, $g(x,y)=xy$

Pl. 2.:] $A:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$; $A(x,y)=(\mathcal{A}x,y)$, A bilineáris operátor $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixszal adott. Ez valóban lineáris pl. akkor, ha $y\in\mathbb{R}^n$-et rögzítjük: $x\to(\mathcal{A}x,y)$ skalárszorzat; $\lambda x=(\mathcal{A}\lambda x,y)$;
$A(\lambda x,y)=(\mathcal{A}\lambda x,y)=(\lambda\mathcal{A}x,y)=\lambda(\mathcal{A}x,y)=\lambda A(x,y)\Rightarrow$ linearitás egyik feltétele teljesül; nézzük meg a másikat:
$A(x_1+x_2,y)\overset{DEF}{=}(\mathcal{A}(x_1+x_2),y)=(\mathcal{A}x_1+\mathcal{A}x_2,y)=(\mathcal{A}x_1,y)+(\mathcal{A}x_2,y)=A(x_1,y)+A(x_2,y)$

Pl. 3.:] $A:C^1(\Omega)\times C^1(\Omega)\to\mathbb{R}$, $C^1(\Omega)=\{u_{\Omega\to\mathbb{R}}: u$ folytonos és u' is folytonos Ω-n$\}$, $A(u,v)=\int_\Omega \nabla u\nabla v$

ÁLL.: A bilineáris operátorok ($X\times Y\to Z$) (egy adott közös értelmezési tartománnyal rendelkezők) maguk is vektorteret alkotnak, (itt az összeadás: $(A_1+A_2)(x,y)\overset{DEF}{=}A_1(x,y)+A_2(x,y)$).

→ Folytonos bilineáris operátorok: feltesszük, hogy ezek az egész $X\times Y$ halmazon értelmezve vannak.

DEF.: Azt mondjuk, hogy az $A: X\times Y\to Z$ bilineáris függvény korlátos, ha $\exists$ olyan c, hogy a $\sup\limits_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}}\{\|A(x,y)\|\}\le c$.

ÁLL.: Ekkor van olyan c, hogy $\|A(x,y)\|\le c\|x\|\|y\|$.

BIZ.: Korlátosság miatt és a bilineáris folytonosság miatt $\|A(x,y)\|=\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|},y\right)\|x\|\right\|=\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|},\frac{y}{\|y\|}\right)\|y\|\|x\|\right\|=$
$=\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|},\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|\|y\|\|x\|\le c\|x\|\|y\|$. A fentek alapján legyen $\|A\|=\inf\{c:\|A(x,y)\|\le c\|x\|\|y\|\}=$
$=\min\{c:\|A(x,y)\|\le c\|x\|\|y\|\}$.

TÉTEL: $A:X\times Y\to Z$ bilineáris függvény folytonos $\Leftrightarrow$ korlátos.

BIZ. 1.) $\Leftarrow$. Folytonossághoz elegendő $(x_n,y_n)\to(x,y)\Rightarrow A(x_n,y_n)\to A(x,y)$ szekvenciális folytonosság igazolása.
$\|A(x,y)-A(x_n,y_n)\|=\|A(x,y)-A(x_n,y)+A(x_n,y)-A(x_n,y_n)\|\le\|A(x,y)-A(x_n,y)\|+\|A(x_n,y)-A(x_n,y_n)\|=$
$=\|A(x-x_n,y)\|+\|A(x_n,y-y_n)\|\le \underbrace{\|A\|}_{\substack{\text{korlátosság}\\ \text{miatt } c}}\underbrace{\|x-x_n\|}_{0}\|y\|+\|A\|\|x_n\|\underbrace{\|y-y_n\|}_{0}\to0.$

2.) $\Rightarrow$ (Indirekt). Tfh., ha nem volna korlátos, akkor lenne olyan $(x_1,y_1)\in X\times Y:\|A(x_1,y_1)\|\ge\|x_1\|\|y_1\|$. Hasonlóan minden n-re van olyan $(x_n,y_n)\in X\times Y:\|A(x_n,y_n)\|\ge n^2\|x_n\|\|y_n\|$. Vegyük most az $\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|},\frac{y_n}{n\|y_n\|}\right)$ sorozatot, amelynek normája: $\sqrt{\left(\frac1n\right)^2\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\|^2+\left(\frac1n\right)^2\left\|\frac{y_n}{\|y_n\|}\right\|^2}=\sqrt{2\left(\frac1n\right)^2}=\frac{\sqrt2}{n}\to0.$
$\left\|A\left(\frac1n\frac{x_n}{\|x_n\|},\frac1n\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)\right\|=\left\|\frac1n\frac{1}{\|x_n\|}A\left(x_n,\frac1n\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)\right\|=\frac{1}{n^2}\frac{1}{\|x_n\|\|y_n\|}\|A(x_n,y_n)\|\ge\frac{1}{n^2}\frac{1}{\|x_n\|\|y_n\|}n^2\|x_n\|\|y_n\|=1$, ami ellentmond annak, hogy A folytonos $(0,0$-ban$)$.

Megjegyzés: Legyen $A \in L(X, L(Y,Z))$. Ez automatikusan egy bilineáris függvényt definiál, $\tilde{A}: X\times Y \to Z$;
$\underbrace{\tilde A(x,y)}_{\in Z} := \underbrace{(Ax)}_{\in L(Y,Z)}\underbrace{(y)}_{\in Y}$.

ÁLL.: A fenti konstrukcióval értelmezett $\tilde A: X\times Y\to Z$ függvény folytonos és bilineáris.

Biz.: Először az $\tilde A$ bilineáris: kell $\tilde A(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2, y) = \lambda_1\tilde A(x_1,y)+\lambda_2\tilde A(x_2,y)$ és $\tilde A(x,\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2) = \lambda_1 \tilde A(x,y_1)+\lambda_2\tilde A(x,y_2)$. $\tilde A(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y) = ((A(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2))(y) \underset{A\in L(X,L(Y,Z))}{=} (\lambda_1Ax_1+\lambda_2Ax_2)(y) = \lambda_1(Ax_1)(y)+\lambda_2(Ax_2)(y) \overset{DEF}{=}$
$= \lambda_1\tilde A(x_1,y)+\lambda_2\tilde A(x_2,y)$.

$\tilde A(x,\lambda_1y_1+\lambda_2y_2) = (Ax)(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2) = \lambda_1(Ax)(y_1)+\lambda_2(Ax)(y_2) \overset{DEF}{=} \lambda_1\tilde A(x,y_1)+\lambda_2\tilde A(x,y_2)$.

Másodszor az $\tilde A$ folytonos: $\|\tilde A(x,y)\|_{(Z)} = \|(Ax)(y)\|_{(Z)} = \|Ax\|_{(L(Y,Z))}\|y\| \le \|A\|_{L(X,L(Y,Z))}\|x\|_X\|y\|_Y$, ami korlátosságot jelent $\Rightarrow$ folytonos.

ÁLL.: Ez fordítva is igaz: ha $\tilde A: X\times Y\to Z$ folytonos és bilineáris függvény, akkor van olyan $A\in L(X,L(Y,Z))$, hogy ebből $\tilde A$ a fenti módon kapható.

Biz.: Legyen Ax olyan $Y\to Z$ függvény, hogy $(Ax)(y) = \tilde A(x,y)$. Belátjuk, hogy $A\in L(X,L(Y,Z))$. Először azt, hogy az $Ax\in L(Y,Z)$, azaz $\|(Ax)(y)\|\le C\|y\|$ valamilyen rögzített C-re.
$\|(Ax)(y)\| = \|\tilde A(x,y)\| \le \underbrace{\|\tilde A\|\,\|x\|}_{C}\|y\| = C\|y\|$. folytonos Az is kell még, hogy $A\in L(X,L(Y,Z))$ is folytonos. [...]

$\rightsquigarrow$ Második deriváltra való alkalmazás: Tudjuk, hogy ha $f: X\to Y$, akkor $f': X\to L(X,Y)$. Ezért
$\underset{\text{rögzített } x}{f''(x)} \in L(X, L(X,Y)) \underset{\text{azonosítható}}{\longleftrightarrow} L(X\times X, Y)$ folytonos, bilineáris függvény. Konkrétan:

$f:\mathbb R^n\to\mathbb R$, $f': \mathbb R^n \to \underbrace{L(\mathbb R^n,\mathbb R)}_{\updownarrow\ \mathbb R^n}$ sorvektor, $f''(x)\in L(\mathbb R^n, L(\mathbb R^n,\mathbb R)) = L(\mathbb R^n,\mathbb R^n)\longleftrightarrow \mathbb R^{n\times n} \ni H$
ennek megfelelő a példában szereplő bilineáris függvény

∗ Hasonlóan értelmezhető multilineáris (vagy n-lineáris) függvény is.

ÁLL.: Ha $f: X\to Y$, akkor $f^{(n)}(x) \underset{n\text{-lineáris}}{\longleftrightarrow} L(\underbrace{X\times X\times\ldots\times X}_{n\text{-szer}}, Y)$ multilineáris, korlátos leképezés.

pl. 1.:) Determináns: $\underbrace{\mathbb R^n\times\mathbb R^n\times\ldots\times\mathbb R^n}_{n\text{ db}}\to\mathbb R$

1.) $Det(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n) = -Det(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$

2.) $Det(e_1,e_2,\ldots,e_n) = 1$ és antiszimmetrikus, azaz olyan n-lineáris leképezés, mely a mátrixhoz
egységvektorok

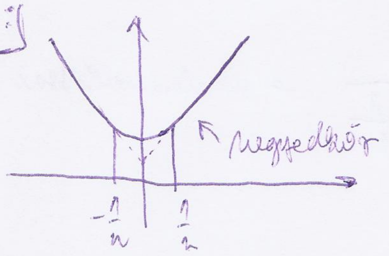
számot rendel úgy, hogy 1.) és 2.) tulajdonságokat kielégítse.

→ 15. tétel: Függvénysorozatok és ~~~~ sorok deriválása ~~~~

Probléma: ~~Ha~~ Ha $f_n \to f$, akkor igaz-e, hogy $f_n' \to f'$? Sorokra: $\sum_{k=0}^{\infty} g_k = g \overset{?}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} g_k' = g'$.

$\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k\right)_n \to g \overset{?}{\Rightarrow} \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k'\right)_n \to g' \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} g_k' = g'$. Elég-e az egyenletes konvergencia feltétel? Nem. Olyan is lehet, hogy $f_n \to f$ egyenletesen és f_n' $\exists$ és korlátos, de f nem is deriválható!

Pl. 1.:



$f_n \to f$ egyenletesen, most $\max|f - f_n| < \frac{1}{n}$, f valamint f_n deriválható, de f nem deriválható!

Áll.: Ha $f_n' \to \tilde{f}$ egyenletesen és $\tilde{f}$ folytonos, és emellett $f_n \to f$ pontonként (ahol mindegyik az ~~fn~~ ~~értelmezett~~ (a,b)-n értelmezett f_n), akkor f deriválható és $f' = \tilde{f}$.

Biz.: Kellene $\forall c \in (a,b)$ pontra $\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \tilde{f}(c)$. A definíció szerint itt $\forall \varepsilon > 0$-hoz olyan h_0 keresendő, hogy ~~h<~~ $h < h_0$ esetén $\left|\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - \tilde{f}(c)\right| < \varepsilon$. Tudjuk, hogy

$$\left|\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - \tilde{f}(c)\right| \leq \left|\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - \frac{f_n(c+h) - f_n(c)}{h}\right| + \left|\frac{f_n(c+h) - f_n(c)}{h} - \tilde{f}(c)\right|.$$

$\left(* \left|\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - \frac{f_n(c+h) - f_n(c)}{h}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right)$. *Keressünk olyan n-t, ~~amely~~ amire.

$|f(c+h) - f_n(c+h)| + |f_n(c) - f(c)| \leq h\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ pontonkénti konvergencia miatt ez teljesül,

tehát $\frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\left|\frac{f_n(c+h) - f_n(c)}{h} - \tilde{f}(c)\right|}_{\text{Lagrange-középértéktétel:}} \leq \varepsilon$.

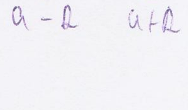
$$\underset{s \in (c, c+h)}{|f_n'(s) - \tilde{f}(c)|} \leq \underbrace{|f_n'(s) - \tilde{f}(s)|}_{\circ} + \underbrace{|\tilde{f}(s) - \tilde{f}(c)|}_{d} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ezeknek kisebbnek kell lennünk, mint $\frac{\varepsilon}{4}$.

Egyenletes konvergencia miatt $h \to 0 \Rightarrow s \to c$ és $\tilde{f}$ folytonossága is kimondja, ez teljesül.

Alkalmazás: Hatványsorok vizsgálata:

TÉTEL: Konvergenciasugarak belsejében a hatványsorokat szabad tagonként deriválni.



Biz.: Legyen $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$, ahol $R=\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$. Ekkor a tagonkénti deriválással

$\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k\right)_n}_{f_n} \to f(x)$. Ekkor $f_n' = \left(\sum_{k=0}^{n} k c_k (x-a)^{k-1}\right)_n \overset{?}{\rightrightarrows} \tilde{f}$ egyenletesen. Vagyis az

a kérdés, hogy $\sum_{k=0}^{n} k c_k (x-a)^{k-1}$ konvergens-e egyenletesen. Ehhez a konvergenciasugarat kell vizsgálni:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k-1]{k c_k}} = \frac{1}{\underbrace{\limsup \sqrt[k-1]{|k|}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \limsup \sqrt[k-1]{|c_k|}} = \frac{1}{\limsup \left(\sqrt[k]{c_k}\right)^{\frac{k}{k-1}}}$$

→ A deriválással kapott hatványsor konvergenciasugara megegyezik az eredetivel! Azaz f_n' egyenletesen konvergens, továbbá a limesz is folytonos ⇒ f deriválható és deriváltja éppen a tagonkénti deriváltakból nyert összeg.

→ 16. tétel: Cauchy-középértéktétel.

Legyen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények ~~korlátos~~ és (a,b)-n deriválhatóak, emellett $g'(s) \neq 0$, $s \in (a,b)$. Ekkor van olyan s, hogy $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(s)}{g'(s)}$.

Biz.: ($g(a) \neq g(b)$, mert ellenkező esetben $g'(s) = 0$ volna valamilyen $s \in (a,b)$-re). Tekintsük a következő függvényt: $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} (g(x) - g(a))$. $F(a) = f(a)$,

$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} (g(b) - g(a)) = f(a)$. Rolle-tétel szerint valamilyen s-re: $F'(s) = 0$.

$$F'(s) = f'(s) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(s) = 0 \Rightarrow \frac{f'(s)}{g'(s)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Alkalmazás: (L'Hospital szabály).

ÁLL.: Tfh. $\lim_a f = \lim_a g = 0$, emellett f és g deriválhatóak "a" egy környezetében (esetleg "a"-t kivéve). Ekkor $\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f'}{g'}$, ha az utóbbi $\exists$.

Biz.: $f(a) = 0$, $g(a) = 0$ definícióval folytonosak. $\forall s$ esetében $\frac{f(s)}{g(s)} = \frac{f(s)-f(a)}{g(s)-g(a)} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{f'(s_0)}{g'(s_0)}$, $s_0 \in (a,s)$

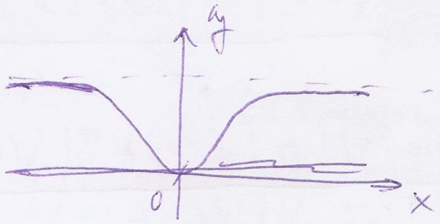
Ha $\lim_a \frac{f'}{g'}$ $\exists$, akkor "s" → "a" esetén (rendőr-elv végett) "s_0" → "a" ⇒

$$\Rightarrow \lim_a \frac{f'}{g'} = \lim_{s_0 \to a} \frac{f'(s_0)}{g'(s_0)} = \lim_{s \to a} \frac{f'(s)}{g'(s)}.$$

→ 17. tétel: Taylor-formula

→ Taylor-sorok, Taylor-polinomok (1 dim):

pl. 1.: $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$



$$f'(0)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}\underset{x=\frac{1}{h}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x^2}}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}x e^{-x^2}=0,\quad f(0), f'(0), f''(0), \ldots=0$$

1.) Feltevés: Ha $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k$, akkor összefüggést keresünk c_k és f között, feltéve, hogy $x\in(a-R,a+R)$. Legyen $0^0=1$. $f(a)=c_0$.

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k k(x-a)^{k-1}\Rightarrow f'(a)=c_1\cdot 1,\quad f''(a)=c_2\cdot 2\cdot 1\Rightarrow f^{(k)}(a)=c_k k!$$

$$\downarrow$$

Következmény: $\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$. $\qquad c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

Kérdés: Ha adott a fenti típusú sor, akkor az f-et leírja-e? Először közelítés:

$$f(x)\simeq f(a)+f'(a)(x-a)\simeq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2.$$

Áll.: (Taylor-polinomok közelítő tulajdonsága). Legyen az f $(n+1)$-szer deriválható függvény "a" környezetében. Ekkor $\forall$ rögzített x pontra $\exists\, s\in(a,x)$ ~~hogy s létezik~~ létezik, hogy

$$f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{közelítő Taylor-polinom}}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{maradéktag}}$$

pl. 1.: $f=\sin$, $a=0$ →

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}x^k+\underbrace{\frac{\sin^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\to 0}\Rightarrow\left|\sin x-\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|=\left|\frac{\sin^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\to 0.$$

Biz.: Tudjuk, (most a Taylor-polinomot így konstruáltuk), hogy $T_{n,a}(a)=f(a)$, $T'_{n,a}(a)=f'(a)$, ... és $T^{(n)}_{n,a}(a)=f^{(n)}(a)$:

$$\frac{f(x)-T_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{[f(x)-T_{n,a}(x)]-[f(a)-T_{n,a}(a)]}{(x-a)^{n+1}-(a-a)^{n+1}} \underset{s\in(a,x)}{=} \frac{[f(s)-T_{n,a}(s)]'}{[(x-a)^{n+1}]'(s)} = \frac{f'(s)-T'_{n,a}(s)}{(n+1)(s-a)^n} =$$

$$= \frac{[f'(s)-T'_{n,a}(s)]-[f'(a)-T'_{n,a}(a)]}{(n+1)[(s-a)^n-(a-a)^n]} \underset{s_1\in(a,s)}{=} \frac{[f'-T'_{n,a}]'(s_1)}{(n+1)((s-a)^n)'(s_1)} = \frac{f''(s_1)-T''_{n,a}(s_1)}{n(n+1)(s-a)^{n-1}} = \dots$$

Cauchy-tétel.

~~Cauchy~~ Cauchy

$$\dots = \frac{f^{(n+1)}(s_n) - \overbrace{T^{(n+1)}_{n,a}(s_n)}^{=0}}{(n+1)!}, \text{ ahol } s_n\in(a, s_{n-1}) \text{ és } = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(s_n)}{(n+1)!}}_{\text{Lagrange-maradéktag}},$$

~~ezt~~ elvégezve ~~(n-1)-szer~~
még (n-1)-szer

Alkalmazás: Binomiális sor: ~~emlékeztető~~

~~A~~ (Emlékeztető: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k x^{n-k}$; $f(x) = (1+x)^\alpha$ közelítése, ahol $\alpha\in\mathbb{R}^+$, a hozzá tartozó Taylor-sor: (0 körül)

$f(x)|_{x=0} = 1^\alpha = 1$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \to f'(x)|_{x=0} = \alpha$ ~~(α+1)~~, $f''(x)|_{x=0} = \alpha(\alpha-1), \dots,$

$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)$ ~~(...)~~ $\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \to f^{(k)}(x)|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} x^k = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k}$$ binomiális sor. Kérdés: ez milyen x-re egyezik meg $f(x)$-szel?

Először ~~kell~~ kell a konvergenciatartomány: $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ milyen x-re konvergens! Ehhez hányados-kritériumot alkalmazunk:

$$\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)\frac{1}{(k+1)!}}{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)\frac{1}{k!}}x = \frac{(\alpha-k)x}{k+1} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{\alpha-k}{k+1}x = -1\cdot x,$$

abszolútértéke: $|x|$, azaz $|x|<1$ esetén konvergens, $|x|>1$ esetén divergens $\Rightarrow R=1$.
Konvergenciahalmaz lehet $(-1,1)$, vagy $[-1,1)$, vagy $(-1,1]$, vagy $[-1,1]$.

Kérdés: $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ előállítja-e $(1+x)^\alpha$ függvényt?

Áll: Igen! A konvergenciahalmaz belsejében teljesül az egyenlőség.

Biz: Tudjuk, hogy $f(x) = (1+x)^\alpha$ esetén $f' = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \underset{x\neq -1}{=} \frac{\alpha}{1+x}f(x)$. Másrészt a $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ hozzárendeléssel megadott g függvény a konvergenciahalmaz belsejében tagonként deriválható, azaz

$g'(x)=\sum_{k=0}^{\infty} k\binom{\alpha}{k}x^{k-1}$, ~~ahol~~ amit $\frac{1+x}{\alpha}$-val szorozva: $\frac{1+x}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} k\binom{\alpha}{k}x^{k-1}=$

abszolút konvergens

$$=\frac{1}{\alpha}\left[\sum_{k=0}^{\infty} k\binom{\alpha}{k}x^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty} k\binom{\alpha}{k}x^{k}\right]=\sum_{k=0}^{\infty} x^k\left(\frac{k}{\alpha}\binom{\alpha}{k}+\frac{k+1}{\alpha}\binom{\alpha}{k+1}\right)=\sum_{k=0}^{\infty} x^k\left[\frac{k}{\alpha}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}+\right.$$

$$\left.+\frac{k+1}{\alpha}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k)}{(k+1)!}\right]=\sum_{k=0}^{\infty} x^k\frac{k(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)+(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k\frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(k+\alpha-k)}{k!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} x^k\binom{\alpha}{k}=g(x)\Rightarrow\boxed{g'(x)\frac{1+x}{\alpha}=g(x)},\quad\boxed{f'(x)\frac{1+x}{\alpha}=f(x)};\quad g(0)=1,\ f(0)=1.$$

Mivel a lineáris differenciálegyenletekre vonatkozó kezdeti érték feladatok megoldása egyértelmű, ezért $f(x)=g(x)$.

Pl. 1.: $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k$, ahol $\binom{\frac{1}{2}}{k}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}=$

$$=\frac{1}{2^k}\frac{(-1)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(3-2k)}{k!}$$

* Fontos kérdés, hogy ha operátorokra (mátrixokra) ($x\to x$ lineáris függvényekre) alkalmazom, akkor $|x|<1$ helyett minek kell teljesülni a konvergenciához.

$\sqrt{A}=\sqrt{I+A-I}$.

Pl. 2.: $\ln(1+x)$, közelítése:

$[\ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots$, ennek primitív függvénye tagonként

$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$, ennek konvergenciasugara is legalább ~~egy~~ 1, mert az együtthatók kisebbek, mint fent. $\Rightarrow$ Ez $(-1,1)$-beli zárt intervallumokon egyenletesen konvergens, tehát tagonként deriválható:

$$\underbrace{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots\right)}_{=\ln(1+x)}'=1-x+x^2-x^3+x^4=\frac{1}{1+x}$$

$\ln(1+x)$, mert 0-ban ~~mindkettő~~ Of 0.

Pl. 3.: Ez általában lassú, néha gyors konvergenciát ad:

$$\boxed{\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\underset{s\in(0,x)}{\sin^{(5)}(s)}\frac{x^5}{5!}}$$

$x=0{,}1$ esetén

$$\left|\sin x-\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}\right)\right|\le 1\cdot\frac{0{,}1^5}{5!}=\frac{1}{10^5\cdot 120}$$

→ 17. tétel: $X \to \mathbb{R}$ ~~függvények Taylor-közelítése~~ típusú függvények Taylor-közelítése

Feltevés: $f: X \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható "a" egy környezetében, f'' folytonos a-ban;

a+h: $f(a+h)$ értékét akarjuk közelíteni. Ez nyilvánvaló közelítés:

$$\underbrace{f(a+h)-f(a)}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{f'(a)}_{L(X,\mathbb{R})}[\underset{\in X}{h}] + \eta(h), \text{ ahol } \lim_{\|h\|\to 0}\frac{\eta(h)}{\|h\|}=0 \Rightarrow \boxed{f(a+h)=f(a)+f'(a)[h]+\eta(h)}$$

elsőrendű Taylor-közelítés

Legyen $g:[0,1]\to$ ~~X~~, $g(t)=a+th$, ekkor ~~f(a+th)~~ legyen $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\phi(t)=f(g(t)) = f(a+th)$. Itt $\phi(0)=f(a)$, $\phi(1)=f(a+h)$. Taylor-sor elvileg:

$$\phi(1)=\phi(0)+\frac{\phi'(0)}{1!}\cdot 1+\frac{\phi''(0)}{2!}1^2+\frac{\phi'''(0)}{3!}\cdot 1^3+\dots$$ ← Taylor-soros formula

$$\phi(1)=\phi(0)+\frac{\phi'(0)}{1!}\cdot 1+\boxed{\frac{\phi''(\xi)}{2!}1^2}$$ ← maradéktagos formula 2. tagig

Lagrange maradéktag, $\xi\in[0,1]$

Ennek felírásakor $\underbrace{\phi'(t)}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{f'(a+th)}_{L(X,\mathbb{R})}[\underset{\in X}{h}]$; $\phi''(t)=(\phi')'(t)=\underbrace{\underbrace{[f''(a+th)[h]]}_{L(X,L(X,\mathbb{R}))}[h]}_{L(X,\mathbb{R})}=f''(a+th)[h,h]$ azonosítás

$t\to a+th$

$t+\delta\to a+(t+\delta)h$

$f(t+\delta)-f(t)=\delta\cdot h+0$

Folytatva: $\phi^{(k)}(t)=f^{(k)}(a+th)[\underbrace{h,\dots,h}_{k\text{ db}}]$. (~~$\phi(t) = f(a+th)$~~)

~~$\phi(t) = f(a+th) = f(a)$~~

$$\boxed{\phi(t)=f(a+th)=f(a)+\frac{f'(a)[h]}{1!}t+\frac{f''(a)[h,h]}{2!}t^2+\dots+\frac{f^{(k)}(a)[h,\dots,h]}{k!}t^k}$$

$$f(a+th)=f(a)+\frac{f'(a)[h]}{1!}t+\frac{f''(a+\tau h)[h,h]}{2!}t^2, \text{ ahol } \tau\in[0,1]$$

Spec. eset: $X=\mathbb{R}^n$, ekkor $f'(a)=[\partial_1 f,\partial_2 f,\dots,\partial_n f](a)$,

$$f(a+s)=f(a)+\underbrace{f'(a)}_{\in\mathbb{R}^n\text{ sorvektor}}\cdot\underbrace{s}_{\in\mathbb{R}^n\text{ oszlopvektor}}+\left(\begin{bmatrix}\partial_{11}f & \partial_{21}f & \dots & \partial_{n1}f\\ \vdots & & & \\ \partial_{1n}f & \dots & & \partial_{nn}f\end{bmatrix}(a)[s,s]\right)\frac{1}{2!}$$

~~$0+(x,y)$~~

$n=2$ eset, 0 körül: $f(x,y)=\underbrace{f(0,0)}_{0+(x,y)}+\underbrace{\partial_1 f(0,0)x+\partial_2 f(0,0)y}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}\partial_{11}f(0,0) & \partial_{21}f(0,0)\\ \partial_{12}f(0,0) & \partial_{22}f(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}\partial_{11}f(0,0)x+\partial_{21}f(0,0)y\\ \partial_{12}f(0,0)x+\partial_{22}f(0,0)y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{2}(\partial_{11}f(0,0)x^2+\partial_{12}f(0,0)xy+\frac{1}{2}\partial_{22}f(0,0)y^2$$

~ Többváltozós szélsőérték-számítás

DEF.: Azt mondjuk, hogy $f: X \to \mathbb{R}$ függvénynek a-ban lokális minimuma van, ha az "a" pont egy környezetében f nem vesz fel $f(a)$-nál kisebb értéket. (~~Bet~~ Hasonlóan maximumra)

Lokális szélsőérték $\Leftrightarrow$ lokális minimum vagy lokális maximum.

ÁLL.: Ha f-nek a-ban szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$.

BIZ.: Tegyük fel, hogy f-nek lokális minimuma van.

$f(a+h) = f(a) + f'(a)[h] + \eta(h)$ teljesül, ahol igazoljuk, hogy $f'(a)[h] = 0$ $\forall h$ esetén $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $f'(a) = 0$. Ha $\exists$ valamilyen h-ra $f'(a)[h] \neq 0$, akkor legyen mondjuk $f'(a)\left[\frac{h}{\|h\|}\right] = c > 0$

és tekintsük azt, hogy

$$\underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|}}_{\geq 0 \text{ a feltevés alapján (mert } f(a) \text{ minimális)}} = \frac{f'(a)[h]}{\|h\|} + \frac{\eta(h)}{\|h\|} = \underbrace{f'(a)\left[\frac{h}{\|h\|}\right]}_{= c} + \underbrace{\frac{\eta(h)}{\|h\|}}_{\to 0}.$$

Most ugyanis

$(-h)$-val:

$$\underbrace{\frac{f(a+(-h)) - f(a)}{\|-h\|}}_{\geq 0} = \underbrace{f'(a)\left[\frac{-h}{\|h\|}\right]}_{= -c} + \underbrace{\frac{\eta(-h)}{\|h\|}}_{\to 0},$$

ez viszont ellentmondás.

DEF.: Azt mondjuk, hogy a $B: X \times X \to \mathbb{R}$ bilineáris függvény pozitív szemidefinit, ha minden $h \in X$ esetén $B(h,h) \geq 0$; hasonlóan negatív szemidefinit: ha $\forall h \in X$-re $B(h,h) \leq 0$. Pozitív definit, ha $\forall h \neq 0$-ra $B(h,h) > 0$ és szigorúan pozitív definit, ha $\exists c > 0$, ~~ahol~~ hogy $\forall h \neq 0$-ra $B(h,h) > c\|h\|^2$.

~~# szigorúan pozitív definit: minden sajátérték > 0,~~

(# pozitív/negatív definit mátrix: minden sajátérték pozitív/negatív)

(# pozitív/negatív szemidefinit mátrix: minden sajátérték ≥ 0 / ≤ 0-a).

~~# pozitív definit és negatív definit teljes~~

mátrixok esetén pozitív definit $\Leftrightarrow$ szigorúan pozitív definit

ÁLL.: Ha az f-nek a-ban lokális minimuma van, akkor $f''(a)$ kötelezően pozitív szemidefinit. (Fordítva nem igaz). Ha $f''(a)$ szigorúan pozitív definit és $f'(a) = 0$, akkor f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van.

BIZ.: (Megjegyzés: analóg állítások érvényesek lokális/szigorúan lokális maximum esetén)

B1.) f-nek a-ban minimuma van $\Rightarrow$ $f''(a)$ pozitív szemidefinit. Ekkor $f'(a) = 0$, így

$$\frac{f(a+th)}{t^2} = \frac{f''(a+\tau h)}{2!}[h,h].$$

Mindkét ~~oldalon~~ oldalon határátmenetet alkalmazva:

$$0 \le \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t^2} = \lim_{\substack{t\to 0 \\ \tau\to 0}} \frac{f''(a+\tau h)}{2!}[h,h]$$

$$\downarrow$$

$$\frac{f''(a)}{2!}[h,h] \Rightarrow f''(a) \text{ pozitív szemidefinit.}$$

2.) Ha $f'(a)=0$ és $f''(a)$ szigorúan pozitív definit $\Rightarrow$ f-nek a-ban szigorúan lokális minimuma van.

$$\frac{f(a+th)-f(a)}{t^2} = \frac{f''(a+\tau h)}{2!}[h,h] - \frac{f''(a)}{2!}[h,h] + \frac{f''(a)}{2!}[h,h].$$

Azt kellene igazolni, hogy elég kis t esetén a bal oldal pozitív. ($\|h\|=1$ feltesszük). A jobb oldalra:

$\frac{f''(a)}{2!}[h,h] > c\|h\|^2$. Mivel f'' folytonos a-ban, ezért:

$$\left\| \frac{f''(a+\tau h)-f''(a)}{2!}[h,h] \right\| \le \frac{1}{2!}\left\| f''(a+\tau h) - f''(a)\right\| \|h\|.$$

Amennyiben $t\to 0$, ez tart 0-hoz, elég kis t-re legfeljebb $\frac{c}{2}$, azaz a fenti összeg legalább $\frac{c}{2}$.

* Lehetséges egyszerűsítés: Ha tudjuk, hogy $f: X\to\mathbb{R}$ van minimuma, akkor ez $\forall$ irányban minimum, azaz ha adott f, akkor $t \to f(a+th): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvénynek minimuma van $t=0$-ban. Ha tehát megfelelően választjuk meg, akkor a-ra ebből is következik

→ 19. tétel: Implicit függvény tétel, inverz függvény tétel

Kérdés: Ha két változót tartalmazó egyenletből mikor lehet az egyik változót a másikkal kifejezni?

a) $x^2+y^2=4$, $x,y\in\mathbb{R}$

$y^2=4-x^2$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ egy környezetében: $y=\sqrt{4-x^2}$

Áll.: Legyen $\phi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\phi(a,b)=0$ és $\partial_2\phi(a,b)\neq 0$. Ekkor az (a,b) pont egy környezetében a második változó az elsőből kifejezhető, azaz van olyan r és d, hogy

$\{(x,y)\in B_r(a)\times(b-d,b+d):\phi(x,y)=0\}=\{(x,f(x)): x\in B_r(a);\ f:B_r(a)\to\mathbb{R}$ folytonos$\}$.

↑ implicit függvény

Ez az f implicit függvény létezését állítja.

Biz.: Abban az esetben, ha $\phi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ha $\partial_2\phi(a,b)\neq 0$, akkor feltételezhető, hogy >0. Ekkor a második változóban függvényen lokálisan növő lesz ϕ, azaz valamilyen d-re $0<d_*<d$ esetén $\phi(a,b+d_*)>0$, $0>d_*>-d$ esetén $\phi(a,b+d_*)<0$. Mivel ϕ folytonos, ezért $(a,b+d)$ egy környezetében ϕ ugyanúgy pozitív, $(a,b-d)$ egy környezetében pedig negatív. Legyen $r>0$ olyan, hogy ez $\phi((a-r,a+r)\times(b-d))$-ben negatív, $((a-r,a+r)\times(b+d))$-ben pozitív. Azaz, ha $x\in(a-r,a+r)$-nek, akkor $\exists\, y$ érték $(b-d,b+d)$-n, hogy $\phi(x,y)=0$. Ez egyértelmű, ugyanis $\partial_2\phi>0$, tehát $y\to(x,y)$ függvény monoton növő. Ha egyértelmű, akkor $f: x\to y$ értelmes. Ekkor $\{(x,y):\phi(x,y)=0\}=\{(x,f(x))\}$. Belátjuk még, hogy f folytonos. Tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz akarunk találni olyan $\delta>0$-t, hogy $|x-x_0|<\delta$ esetén $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. ϕ folytonossága miatt ismert van $(x_0,f(x_0)+\varepsilon)$-hoz és $(x_0,f(x_0)-\varepsilon)$-hoz δ, hogy $((x_0-\delta,x_0+\delta)\times(f(x_0)+\varepsilon))$-ban $\phi>0$ és $((x_0-\delta,x_0+\delta)\times(f(x_0)-\varepsilon))$-ban $\phi<0$. Ekkor ϕ nullhelye $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ esetén $(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$-beli nullhely.

Általánosítani is lehet: $\phi:X\times Y\to Z$; X,Y normált terek; $\phi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$, ϕ folytonos (a,b) egy környezetében; $\partial_2\phi(a,b)\in\mathbb{R}^{k\times k}$ nem szinguláris ($\det\neq 0$) és $\partial_2\phi(a,b)$ is folytonos (a,b) egy környezetében. Ekkor $\exists$ egyetlen tartozó implicit függvény:

$\{(x,y)\in B_r(a)\times B_d(b),\ \phi(x,y)=0\}=\{(x,f(x)): x\in B_r(a)\}$, tehát valamilyen függvény.

Tekintsük az $x\to\phi(x,f(x))$ függvényt, ami azonosan 0. Ha f deriválható, akkor

$$[\partial_1\phi(x,f(x)),\partial_2\phi(x,f(x))][I,f'(x)]=\partial_1\phi(x,f(x))+\partial_2\phi(x,f(x))f'(x)\overset{!}{=}0\Rightarrow f'(x)=\underbrace{\partial_2\phi(x,f(x))}_{\mathbb{R}^{k\times k}}{}^{-1}\cdot\partial_1\phi(x,f(x))$$

→ Inverz függvény tétel:

Adott egy $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, amely b egy környezetében deriválható és $a = g(b)$. Ekkor $\exists$ ennek inverze, ha deriváltja b-ben folytonos és $g'(b) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ az „a" pont egy környezetében.

Biz.: Implicit függvény tétel alkalmazása abban az esetben, ha $\Phi(x,y) = x - g(y)$, $\Phi: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $\Phi(a,b) = a - g(b) = 0$, $\partial_2 \Phi(a,b) = -g'(b)$ nem szinguláris és b-ben folytonos. Ekkor (a,b) egy környezetében $\exists$ a Φ-hez tartozó implicit függvény, azaz

$\{(x,y): x = g(y)$ egy környezetében$\} = \{(x, g^{-1}(x)):$ x az „a" pont egy környezetében van$\}$, azaz $y = g^{-1}(x)$.