# Analízis I

## Simon László előadása alapján

### ELTE, 2009. január

Ajánlott irodalom:

- Komornik Vilmos: Valós analízis előadások
- Mezei István, Faragó István, Simon Péter: Bevezetés az analízisbe

Előadó e-mail címe: simonl a ludens.elte.hu-nál

Ez a jegyzet **nem** szakirodalom s nem garantált, hogy az órai anyagot teljesen lefedi, az előadásokra bejárni ajánlott.

Ha a jegyzetben helyesírási, tartalmi vagy formai hibát találsz, kérlek jelezd az előadónak vagy a tuzesdaniel@gmail.com e-mail címen!

A korábban (középiskolában) tanultakból általánosítunk. $\mathbb{R}^n$ -ben éltünk eddig, ahol vektor alatt ezt értettük: 09.16
$\mathbf{v} = (v_1, v_2 ... v_n)$ ahol $v_j \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ Ezen vektorfogalmat fogjuk általánosítani úgy, hogy a már korábban tanult vektorok némely tulajdonságait kiválasztjuk, s egy halmaz ($\mathbb{V}$ ) elemeit ($a$, $b$ és $c$) akkor fogjuk vektoroknak nevezni, ha az alább kiválaszott - és korábban (középiskolában) már tanult - tulajdonságokat (a műveletekkel) teljesítik.

- összeadás +
  $\mathbb{R}^n$ -ben azt mondtuk, hogy $\mathbf{v} + \mathbf{u} = (v_1, v_2 ... v_n) + (u_1, u_2 ... u_n) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2 ... v_n + u_n)$, ezek tulajdonságaiból az alábbiakat általánosítjuk:
  1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asszociativitás)
  2. $\exists\, !0 \in \mathbb{V}: a + 0 = 0 + a = a$ (egység, semleges elem létezése)
  3. $\forall a \in \mathbb{V} \exists\, !(-a) \in \mathbb{V}: a + (-a) = 0$ (inverz elem létezése)
  4. $a + b = b + a$ (kommutativitás)

  Az első 3 tulajdonságokkal rendelkező struktúrát csoportnak, a 4-ikkel is rendelkezőt Abel-csoportnak, vagy kommutatív csoportnak nevezzük.
- skalárral való szorzás ·
  Legyen $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$! $\mathbb{R}^n$ -ben azt mondtuk, hogy $\lambda\mathbf{v} = \lambda(v_1, v_2 ... v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2 ... \lambda v_n)$, ezek tulajdonságaiból az alábbiakat általánosítjuk:
  1. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (disztributivitás)
  2. $\lambda(\beta a) = (\lambda\beta)a$
  3. $1a = a$

__**Definíció**__: Ha egy halmazon értelmezve van az összeadás és a skalárral való szorzás a fentiek szerint, akkor azt vektortérnek (avagy lineáris térnek) nevezzük.

Ismert művelet volt $\mathbb{R}^n$ -ben a skaláris szorzás, ezt értettük alatta: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j u_j$. Erre érvényesek az alábbi tulajdonságok:

- $\langle a, b+c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$
- $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$
- $\lambda \langle a, b \rangle = \langle \lambda a, b \rangle$
- $\langle a, a \rangle \geq 0$ és $\langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$

**Definíció**: Legyen $X$ vektortér, amelynek elemei között értelmezve van a skaláris szorzat (két elem skaláris szorzata egy $\mathbb{R}$ -beli szám) a fenti tulajdonságokkal. Ekkor $X$-t valós euklideszi (eukleidészi) térnek nevezzük.

Jó **példa** az euklideszi térre a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények összessége (röviden $C[0,1]$ ) a szokásos összeadással, számmal való szorzással, ha a skaláris szorzat definíciója: $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f \cdot g$.

**Definíció**: Legyen $X$ valós euklideszi tér! Ekkor egy $a \in X$ elem normáját így határozhatjuk meg: $\|a\| := \sqrt{\langle a, a \rangle}$

A norma tulajdonságai:

1. $\|a\| \geq 0$ és $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$
3. $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (háromszög egyenlőtlenség), mert $\langle a+b, a+b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, a \rangle + \langle a, b \rangle + \langle b, b \rangle =$ $= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b \rangle \leq \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\| \cdot \|b\| = (\|a\| + \|b\|)^2$. Itt felhasználtuk az ún Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget, mely szerint:

**Tétel**: Legyen $X$ valós euklideszi tér! Ekkor $\forall a, b \in X$ esetén $|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$. (Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség, röviden CS)

Bizonyítás: $0 \leq \langle a + \lambda b, a + \lambda b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle \lambda b, a \rangle + \langle a, \lambda b \rangle + \langle \lambda b, \lambda b \rangle = \langle a, a \rangle + 2\lambda \langle a, b \rangle + \lambda^2 \langle b, b \rangle$, ez teljesül minden $\lambda$ értékre, így $4\langle a, b \rangle^2 - 4\langle a, a \rangle \langle b, b \rangle \leq 0$, vagyis

$\langle a, b \rangle^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle \Rightarrow |\langle a, b \rangle| \leq \sqrt{\langle a, a \rangle} \sqrt{\langle b, b \rangle} = \|a\| \cdot \|b\|$, és pont ezt akartuk igazolni.

**Definíció**: legyen $X$ vektortér, amelyen értelmezve van egy norma a fenti tulajdonságokkal, ekkor $X$-t normált térnek nevezzük.

**Példa**: $X = C[0,1]$, a függvény normája pedig $\|f\| := \sup |f|$.

Egy normált térben mindig értelmezhető az elemek $\rho$ távolsága, $\rho(a, b) := \|a - b\|$. A távolság (metrika) tulajdonságai:

1. $\rho(a, b) \geq 0$ és $\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

2. $\rho(a,b) = \rho(b,a)$
3. $\rho(a,c) \leq \rho(a,b) + \rho(b,c)$ (háromszög egyenlőtlenség)

**Definíció**: Legyen $X$ valamilyen halmaz és tfh értelmezve van $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ függvény (metrika, távolság) a fenti tulajdonságokkal! Ekkor $X$-t metrikus térnek nevezzük.

# Topológiai alapfogalmak a metrikus térben

- Legyen $X$ metrikus tér! Egy $a \in X$ pont $r$ sugarú környezete azon pontok összessége, amelyek $a$-tól $r$-nél kisebb távolságra vannak: $B_r(a) := \{x \in X : \rho(x,a) < r\}$

## Pont és halmaz viszonya

Legyen $a \in X, M \subset X$ !

**Definíció**: azt mondjuk, hogy az $a$ pont az $M$ halmaznak belső pontja, ha létezik $a$-nak olyan $r$ sugarú környezete, hogy $B_r(a) \subset M$. Jele: $a \in \text{int}(M)$

**Definíció**: $a$ pont az $M$ halmaznak külső pontja, ha létezik $a$-nak olyan $r$ sugarú környezete, hogy $B_r(a) \cap M = \emptyset$. Jele: $a \in \text{ext}(M)$

**Definíció**: az $a$ pont $M$-nek határpontja, ha $a$ minden $r$ sugarú környezete esetén $B_r(a) \cap M \neq \emptyset$ és $B_r(a) \cap M^C \neq \emptyset$. Jele: $a \in \partial(M) = \text{front}(M)$

Állítás: $\partial(M), \text{ext}(M), \text{int}(M)$ halmazok diszjunktak, uniójuk kiadja $X$-et.

**Definíció**: egy $a \in X$ pontot az $M$ halmaz torlódási pontjának nevezünk, ha az $a$ pont minden környezetében van $M$-beli, de $a$-tól különböző pont, formailag: $a$ torlódási pont, ha $\{B_r(a) \backslash \{a\}\} \cap M \neq \emptyset$. Az $M$ halmaz torlódási pontjainak halmazát $M'$-vel jelöljük.
Megjegyzés: ha az $a$ pont $M$-nek torlódási pontja, akkor $a$-nak minden környezete végtelen sok pontot tartalmaz az $M$ halmazból.

**Definíció**: egy $a \in M$ pontot az $M$ halmaz izolált pontjának nevezünk, ha $\exists B_r(a) : B_r(a) \cap M = \{a\}$ és $r \neq 0$.

**Definíció**: az $M$ halmaz belső és határpontjainak összességét az $M$ halmaz lezárásának nevezzük, $\overline{M} = \text{int}\, M \cup \partial M$.
Megjegyzés: $\overline{M}$ pontjait szokás $M$ érintkezési pontjainak is nevezni. Továbbá $a \in \overline{M} \Leftrightarrow \forall B_r(a) \cap M \neq \emptyset$.

**Példák:**

- $X = \mathbb{R}, M = (0,1) \Rightarrow M' = [0,1]$, izolált pontja nincs, $\partial M = \{0,1\}, \text{int}\, M = (0,1), \overline{M} = [0,1]$

- $X = \mathbb{R}, M = \mathbb{Z} \Rightarrow M' = \varnothing$, minden pontja izolált, $\partial M = \mathbb{Z}, \operatorname{int} M = \varnothing, \overline{M} = \mathbb{Z}$
- $X = \mathbb{R}, M = [0,1] \Rightarrow M' = [0,1]$, nincs izolált pontja, $\partial M = \{0,1\}, \operatorname{int} M = (0,1), \overline{M} = [0,1]$

## Nyílt és zárt halmazok

**Definíció**: egy $M \subset X$ halmazt nyíltnak nevezünk, ha $\forall x \in M$ esetén $x \in \operatorname{int}(M) \Leftrightarrow M \subset \operatorname{int}(M) \Leftrightarrow M \cap \partial M = \varnothing$.

**Definíció**: egy $M$ halmazt zártnak nevezünk, ha tartalmazza az összes határpontját $\Leftrightarrow \partial M \subset M$.

**Példák** (legyen $X := \mathbb{R}$ ):

- $M = [0,1]$ zárt halmaz
- $M = (0,1)$ nyílt halmaz
- $M = (0,1]$ se nem nyílt, se nem zárt halmaz
- $M = \mathbb{Z}$ zárt halmaz (minden pontja izolált is)

Állítás: egy $M \subset X$ halmaz zárt $\Leftrightarrow M = \overline{M} \Leftrightarrow M' \subset M$.

**Tétel**: tetszőleges $M$ halmaz esetén $\operatorname{int}(M)$ és $\operatorname{ext}(M)$ nyílt halmaz.

Bizonyítás ( $\operatorname{int}(M)$ nyílt halmaz ): legyen $a \in \operatorname{int} M$. Azt kellene megmutatni, hogy $\exists B_r(a) \subset \operatorname{int} M$.

$a \in \operatorname{int}(M) \Rightarrow \exists B_R(a) \subset M$. Legyen $r := R/2$, ekkor $B_r(a) \subset \operatorname{int}(M)$, ugyanis ha $b \in B_r(a)$, akkor a háromszög egyenlőtlenség miatt $B_r(b) \subset B_R(a) \subset M, b \in \operatorname{int}(M) \Rightarrow B_r(a) \subset \operatorname{int}(M)$.

Állítás: $\partial M, \overline{M}, M'$ zárt halmazok.

**Tétel**: ha $M \subset X$ nyílt, akkor $M^C = X \backslash M$ zárt halmaz.

Bizonyítás: tfh $M$ nyílt halmaz, ekkor $\partial M \cap M = \varnothing$, $\partial M = \partial(M^c)$, ezért $\partial M^C \cap M = \varnothing \Rightarrow \partial M^C \subset M^C$, vagyis $M^C$ zárt.

**Tétel**: akárhány nyílt halmaz uniója nyílt halmaz, és véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt.

Bizonyítás: legyenek $M_{\gamma \in I}$ nyílt halmazok ($I$ indexhalmaz)! Belátjuk, hogy $M := \bigcup\limits_{\gamma \in I} M_\gamma$ nyílt. Legyen

$a \in M \Rightarrow \exists \gamma : a \in M_\gamma$. Mivel $M_\gamma$ nyílt, ezért $\exists B_r(a) \subset M_\gamma \Rightarrow B_r(a) \subset M$.

Legyenek $M_{j \in I}$ nyílt halmazok ($I$ indexhalmaz)! Belátjuk, hogy $M := \bigcap\limits_{j=1}^{p} M_j$ nyílt halmaz. Legyen

$a \in M \Rightarrow a \in M_j, \forall j = 1,2...p$. Mivel $M_j$ nyílt, ezért $\exists r_j : B_{r_j}(a) \subset M_j$. Legyen

$r = \min\{r_1, r_2,..,r_p\} \Rightarrow B_r(a) \subset \bigcap\limits_{j=1}^{p} M_j$.

**Tétel**: akárhány zárt halmaz metszete zárt halmaz, és véges sok zárt halmaz uniója is zárt.

Bizonyítás: (belátjuk, hogy metszetük zárt) tfh $M_\gamma$ zárt! Ekkor $M_\gamma^C$ nyílt halmaz. Ezért $\bigcap_{\gamma\in I} M_\gamma = \left(\bigcup_{\gamma\in I} M_\gamma^C\right)^C$ zárt.

Az unió esete hasonlóan bizonyítható.

Megjegyzés: végtelen sok nyílt halmaz metszete általában nem nyílt, az alaphalmaz és az üreshalmaz nyílt és zárt egyszerre.

# Sorozatok határértéke a metrikus térben

09.18

**Definíció**: egy $f:\mathbb{N} \rightarrowtail X$ ($X$ metrikus tér) függvényt $X$-beli sorozatnak nevezünk. Jelölés: a sorozat $k$-adik tagja $a_k := f(k)$ -nek, a sorozat $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} := f\ (a_k) = f$.

**Definíció**: azt mondjuk, hogy az $(a_k)$ sorozat határértéke (limesze) $a \in X$, ha az $a$ pont tetszőleges $\varepsilon$ sugarú környezetéhez létezik olyan $k_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy $k > k_0, k \in \mathbb{N}$ esetén $a_k \in B_\varepsilon(a)$. Másképp: $\forall\varepsilon > 0\,\exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho(a_k, a) < \varepsilon$, ezt így jelöljük: $\lim(a_k) \equiv \lim_{k\to\infty} a_k = a$

## A limesz tulajdonságai

1. ha $a_k = a$ (minden $k$-ra), akkor $\lim(a_k) = a$
2. tfh $\lim(a_k) = a$, akkor $(a_k)$ minden részsorozatának határértéke létezik és értékük $a$.
   Részsorozat: $(a_k)$ véges vagy végtelen sok elemét elhagyom úgy, hogy még mindig végtelen sok maradjon, és a sorrenden nem változtatok. Másképpen: $(a_k)$ részsorozata $\left(a_{g_k}\right)$, ahol $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ szigorúan monoton növő.
   Bizonyítás: $\lim(a_k) := a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\,\exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho(a_k, a) < \varepsilon$. Mivel $g_k \geq k \Rightarrow k > k_0$ -ra $\rho\left(a_{g_k}, a\right) < \varepsilon$, hisz ekkor $g_k > k_0$.
3. a határérték egyértelmű
   Bizonyítás: tfh $(a_k)$ határértékei $a$ és $b$ ($X$ elemei), Belátandó, hogy $a = b$. $\forall\varepsilon > 0\,\exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho(a_k, a) < \varepsilon$, másrészt $\forall\varepsilon > 0\,\exists k_1 : k > k_1, \rho(a_k, b) < \varepsilon \Rightarrow k > \max\{k_0, k_1\}$ esetén $\rho(a_k, a) < \varepsilon, \rho(a_k, b) < \varepsilon$, így a háromszög egyenlőtlenség alapján $\rho(a, b) \leq \rho(a, a_k) + \rho(a_k, b) < 2\varepsilon, \forall\varepsilon > 0 \Rightarrow \rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
4. ha $\lim(a_k) = a \Rightarrow (a_k)$ minden átrendezésének a hatáértéke szintén $a$
   Egy $(a_k)$ átrendezése: veszek egy $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijekciót, az átrendezett sorozat: $\left(a_{g_k}\right)$.
5. sorozatok összefésülése
   $(a_k), (b_k)$ $X$-beli sorozatok összefésülése olyan $(c_k)$ $X$-beli sorozat, melynek elemei $a_1, b_1, a_2, b_2 \dots$. Ha $\lim(a_k) = a = \lim(b_k) \Rightarrow \lim(c_k) = a$
6. Ha egy sorozatnak létezik a limesze, akkor korlátos is. (Korlátos: létezik olyan $n$ dimenziós gömb, mely tartalmazza a sorozat összes elemét.)
   Bizonyítás: $\lim(a_k) = a \Rightarrow \varepsilon = 1\,\exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho(a_k, a) < 1$, így $r := \max\left\{\rho(a, a_1), \rho(a, a_2), \dots, \rho\left(a, a_{k_0}\right)\right\}$ esetén $a_k \in B_{r+1}(a)\,\forall k$.

## A limesz műveletei tulajdonságai

- **összeadás**

**Tétel**: legyen $X$ normált tér! Ha $\lim(a_k) = a, \lim(b_k) = b \Rightarrow \lim(a_k + b_k) = a + b$.

Bizonyítás: mivel $\lim(a_k) = a$, ezért $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho(a, a_k) = \|a_k - a\| < \varepsilon$ és mivel $\lim(b_k) = b$, ezért $\forall \varepsilon > 0 \exists k_1 : k > k_1 \Rightarrow \rho(b, b_k) = \|b_k - b\| < \varepsilon$, így

$\rho(a_k + b_k, a + b) = \|(a_k + b_k) - (a + b)\| = \|(a_k - a) + (b_k - b)\| \leq \|a_k - a\| + \|b_k - b\| < 2\varepsilon$, ha $k > \max\{k_0, k_1\}$.

- **szorzás**

**Tétel**: legyen $X$ normált tér! Tfh $\lim(a_k) = a$, ( $a_k \in X$ ) és $\lim(\lambda_k) = \lambda$ ( $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ). Ekkor $\lim(\lambda_k a_k) = \lambda a$.

Bizonyítás: mivel $\lim(a_k) = a$ ezért $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \|a_k - a\| < \varepsilon$. Mivel $\lim(\lambda_k) = k$ ezért $\forall \varepsilon > 0 \exists k_1 : k > k_1 \Rightarrow |\lambda_k - \lambda| < \varepsilon$. Tehát $k > \max\{k_0, k_1\}$ esetén

$\|\lambda_k a_k - \lambda a\| = \|(\lambda_k a_k - \lambda a_k) + (\lambda a_k - \lambda a)\| \leq \|\lambda_k a_k - \lambda a_k\| + \|\lambda a_k - \lambda a\| =$

$= \|(\lambda_k - \lambda) a_k\| + \|\lambda(a_k - a)\| = \underbrace{|\lambda_k - \lambda|}_{<\varepsilon} \|a_k\| + \underbrace{|\lambda|}_{rögz.} \underbrace{\|a_k - a\|}_{<\varepsilon}$. Mivel $(a_k)$ korlátos, $\exists M > 0 : \|a_k\| < M \forall k \in \mathbb{N}$ -re,

tehát $k > \max\{k_0, k_1\}$ esetén $\|\lambda_k a_k - \lambda a\| < \varepsilon M + |\lambda| \varepsilon = (M + |\lambda|)\varepsilon$.

**Tétel**: legyen $X$ euklideszi tér! Tfh $\lim(a_k) = a$ és $\lim(b_k) = b$, ahol $a_k, b_k \in X$. Ekkor $\lim\langle a_k, b_k\rangle = \langle a, b\rangle$

Bizonyítás: a Cauchy-Schwarz felhasználásával.

**Tétel**: legyen $X$ normált tér! Ha $\lim(\lambda_k) = 0$ és $(a_k)$ korlátos, $\Rightarrow \lim(\lambda_k a_k) = 0$

Bizonyítás: hasonló az előzőhöz.

- **Osztás**

**Tétel**: legyen $(a_k)$ egy valós vagy komplex sorozat. Ha $a = \lim(a_k) \neq 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{a}$.

Bizonyítás: mivel $\lim(a_k) = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow |a_k - a| < \varepsilon$, így $\exists k_1 : k > k_1 \Rightarrow |a_k - a| < \varepsilon |a|^2 / 2$. Legyen $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$, ekkor $\exists k_2 : k > k_2 \Rightarrow |a_k| > \frac{|a|}{2}$. Legyen $k > \max\{k_1, k_2\}$, ekkor $\left|\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - a_k|}{|a_k a|} < \frac{\varepsilon |a|^2 / 2}{|a_k||a|} = \frac{\varepsilon |a| / 2}{|a| / 2} = \varepsilon$, és pont ezt akartuk igazolni.

## Zárt halmazok jellemzése sorozatokkal

Emlékeztető: $X$ metrikus térben egy $M$ halmazt zártnak neveztünk, ha $\partial M \subset M \Leftrightarrow \overline{M} \subset M \Leftrightarrow \overline{M} = M$ (ahol $\overline{M} = \mathrm{int}(M) \cup \partial M$ ), továbbá $a \in \overline{M} \Leftrightarrow$ ha $a$ bármely környezete tartalmaz $M$ béli pontot is. Ezek szerint $M$ zárt halmaz pontosan akkor, ha minden olyan pont, amelynek bármely környezetében van $M$ beli pont, az $M$-hez tartozik.

**Tétel**: egy $M \subset X$ halmaz zárt pontosan akkor, ha tetszőleges konvergens sorozatot nézve, melynek tagjai $a_k \in M$ $\lim(a_k) \in M$.

Bizonyítás: az előbbiek szerint $M$ halmaz zárt pontosan akkor, ha minden olyan pont, amelynek bármely környezetében van $M$ beli pont, az $M$-hez tartozik.

$\Rightarrow$ irányban: tfh $M$ zárt! Ha $a_k \in M$ és $\lim(a_k) = a$, akkor $a \in M$, mert a minden környezetében van $M$ beli pont is (nevezetesen $a_k$ ).

$\Leftarrow$ irányban: fordítva is igaz, ha $a$ minden környezete tartalmaz $M$ béli pontot, akkor $\exists(a_k) \in M : \lim(a_k) = a$. Vagyis minden olyan pont ($a$), amelynek minden környezetében van $M$-beli pont (az $a_k$ -k), az $M$-nek eleme, és a fentiek szerint ebből következik, hogy $M$ zárt.

**Korlátos és zárt halmazok, illetve sorozatkompakt halmazok**

**Tétel**: legyen $(a_k)$ korlátos sorozat $\mathbb{R}^n$ -ben! Ekkor $(a_k)$ sorozatnak létezik konvergens részsorozata. (Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel $\mathbb{R}^n$ -ben)

Bizonyítás: először $n = 1$ esetre, ekkor ($a_k \in \mathbb{R}$) korlátos $\Rightarrow \exists[c,d] \ni a_k, \forall k$. Felezzük $[c,d]$ intervallumot! Ekkor a két zárt fél intervallum közül legalább az egyik végtelen sok tagot tartalmaz a sorozatból. Ez legyen $[c_1, d_1]$. Ezt megint felezzük, melyek közül legalább az egyik végtelen sok tagot tartalmaz a sorozatból, ez legyen $[c_2, d_2]$ …Így $a_k$ -ból kiválasztható egy $a_{k_l}$ részsorozat úgy, hogy $a_{k_l} \in [c_l, d_l]$. Belátjuk, hogy $a_{k_l}$ részsorozat konvergens.

$[c,d] \supset [c_1, d_1] \supset [c_2, d_2] \supset \ldots \supset [c_l, d_l]$, $\lim\limits_{l\to\infty} |c_l - d_l| = \lim\limits_{l\to\infty} \frac{c-d}{2^l} = 0$. Tudjuk, hogy $\{c_l : l \in \mathbb{N}\}$ felülről korlátos $\Rightarrow \exists \sup\{c_l : l \in \mathbb{N}\}$ és azt is, hogy $\{d_l : l \in \mathbb{N}\}$ alulról korlátos $\Rightarrow \exists \inf\{d_l : l \in \mathbb{N}\}$. Mivel $\lim\limits_{l\to\infty} |c_l - d_l| = 0 \Rightarrow \sup\{c_l : l \in \mathbb{N}\} = \inf\{d_l : l \in \mathbb{N}\} := \alpha$, továbbá $a_{k_l} \in [c_l, d_l] \Rightarrow \lim\left(a_{k_l}\right) = \alpha$ („rendőr-elv”).

$n = 2$ esetre, ekkor $a_k = \left(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}\right)$. Mivel $a_k$ korlátos sorozat $\mathbb{R}^2$ -ben, így $a_k^{(1)}, a_k^{(2)}$ korlátos sorozatok $\mathbb{R}$ -ben. Az előzőek szerint az előbbiből kiválasztható ebből egy konvergens részsorozat, $\left(a_{k_l}^{(1)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$. Tekintsük az $a_k^{(2)}$ ugyanilyen indexű elemekből álló $\left(a_{k_l}^{(2)}\right)$ részsorozatát (mely korlátos $\mathbb{R}$ -ben). Az előzőek szerint ennek létezik konvergens részsorozata, $\left(a_{k_{l_m}}^{(2)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$. $\left(a_{k_l}^{(1)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ konvergens, így $\left(a_{k_{l_m}}^{(1)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ is az, így $\left(a_{k_{l_m}}\right) := \left(a_{k_{l_m}}^{(1)}, a_{k_{l_m}}^{(2)}\right)$ részsorozat konvergens.

$n = 3$ esetén hasonló módon, mint $n = 1$ -ről váltottunk $n = 2$ -re, itt is igazolható (tkp teljes indukció).

Megjegyzés: hasonló jellegű állítások általában nem igazak tetszőleges normált terekben, csak véges dimenzióban!

**Tétel**: legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt halmaz! Ha $(a_k \in M)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat, akkor létezik olyan $\left(a_{k_l}\right)$ részsorozata, amely konvergens és $\lim\left(a_{k_l}\right) \in M$ 09.23

Bizonyítás: mivel $M$ korlátos $\Rightarrow (a_k)$ korlátos sorozat $\mathbb{R}^n$ -ben. A Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel szerint ennek létezik konvergens részsorozata $a_{k_l} \in M$, $M$ zárt $\Rightarrow \lim\left(a_{k_l}\right) \in M$.

**Definíció**: legyen $X$ tetszőleges metrikus tér! Egy $M \subset X$ halmazt sorozatkompaktnak nevezünk, ha tetszőleges

$M$-beli sorozatnak van konvergens részsorozata, és limesze $\in M$.

Megjegyzés: a fenti tétel szerint $\mathbb{R}^n$ -ben minden korlátos és zárt halmaz sorozatkompakt.

Állítás: ha $X$ tetszőleges metrikus tér $\Rightarrow \forall$ sorozatkompakt halmaz korlátos és zárt, de ha egy metrikus térben egy halmaz korlátos és zárt, még nem következik, hogy sorozatkompakt is (természetesen $\mathbb{R}^n$ -ben igaz).

Bizonyítás: legyen $M \subset X$ sorozatkompakt halmaz! Először belátjuk, hogy $M$ korlátos.

Indirekt bizonyítás: $M$ nem korlátos. Legyen $a \in X$ rögzített pont. Ha $M$ nem korlátos $\Rightarrow \exists x_1 \in M, x_1 \notin B_1(a)$ és $\exists x_2 \in M, x_2 \notin B_2(a)$ és… Belátjuk (indirekt), hogy az így nyert $(x_l)$ sorozatnak nincs konvergens részsorozata. Ha ugyanis $\exists \lim \left(x_{l_k}\right) = x_0 \in M \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \rho\left(x_{l_k}, a\right) = \rho(x_0, a)$, ez ellentmond annak, hogy $x_{l_k} \notin B_{l_k}(a) \Leftrightarrow \rho\left(x_{l_k}, a\right) > l_k \to \infty$.

Most belátjuk, hogy $M$ zárt. Tekintsük az $(a_k)$ $M$-beli elemekből álló konvergens sorozatokat! Mivel $M$ sorozatkompakt, ezért $(a_k)$ -nak létezik $\left(a_{k_l}\right)$ részsorozata, ami konvergens és $\lim\left(a_{k_l}\right) \in M$, de $\lim\left(a_{k_l}\right) = \lim(a_k) \Rightarrow \lim(a_k) \in M$. Mint korábban bizonyítottuk, ez ekvivalens azzal, hogy $M$ zárt.

### Cauchy-féle konvergencia-kritérium, teljesség

**Tétel**: legyen $X$ metrikus tér! Ha $(a_k)$ konvergens sorozat, $\lim(a_k) = a \in X$, akkor teljesül rá az ún. Cauchy-féle (konvergencia) kritérium: $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k, l > k_0 \Rightarrow \rho(a_k, a_l) < \varepsilon$.

Bizonyítás: mivel

$\lim(a_k) = a \Rightarrow \exists k_0 : \forall k, l > k_0 \Rightarrow \rho(a_k, a) < \frac{\varepsilon}{2}, \rho(a_l, a) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \rho(a_k, a_l) \le \rho(a_k, a) + \rho(a, a_l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Kérdés: fordítva igaz-e? Általában nem.

**Példák:**

- Legyen $X = \mathbb{Q}$ a szokásos távolsággal! Tfh $a_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, de $\lim(a_k) = \sqrt{2}$. Ekkor $(a_k)$ teljesíti a Cauchy-féle konvergencia-kritériumot, de nincs határértéke $X$-ben.
- $X := (0,1)$, a szokásos távolsággal. $a_k := \frac{1}{k}$ tagokból álló sorozat. Ez megint teljesíti a Cauchy-féle konvergencia-kritériumot, még sincs határértéke $X$-ben.

**Definíció**: egy $X$ metrikus teret teljes metrikus térnek nevezzük, ha minden $X$-beli Cauchy-sorozatnak (vagyis melyre teljesül a Cauchy-féle konvergencia-kritérium) van limesze $X$-ben.

**Tétel**: $\mathbb{R}^n$ teljes metrikus tér.

Megjegyzés: a tétel azt mondja, hogy ha $(a_k) \in \mathbb{R}^n$ -beli sorozatra teljesül a Cauchy-féle konvergencia-kritérium $\Rightarrow \exists \lim(a_k) \in \mathbb{R}^n$.

Bizonyítás: legyen $(a_k) \in \mathbb{R}^n$, melyre teljesül a Cauchy-féle konvergencia-kritérium

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k, l > k_0 \Rightarrow \|a_k - a_l\| < \varepsilon$. Először belátjuk, hogy $(a_k)$ korlátos.

Legyen $\varepsilon := 1$, ekkor $\exists k_0 : k, l > k_0 \Rightarrow \|a_k - a_l\| < \varepsilon = 1$. Legyen $l = k_0 + 1$ rögzített, ekkor láthatjuk, hogy minden $\forall k \geq l : \|a_k - a_l\| < 1$, vagyis $k_0$ fölött korlátos a sorozat. Mivel $k_0$ véges, ezért $a_0, a_1 \dots a_{k_0}$ véges sok elem, így korlátos is.

Most belátjuk, hogy konvergens is. Alkalmazzuk a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tételt, miszerint minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata $\Rightarrow \exists \left(a_{k_l}\right) : \lim \left(a_{k_l}\right) = a \in \mathbb{R}^n$. Belátandó még, hogy az $(a_k)$ sorozat is ehhez tart. Legyen $\varepsilon/2 > 0$ tetszőleges. Mivel $\lim \left(a_{k_l}\right) = a \Rightarrow \exists l_0 : l > l_0 \Rightarrow \|a_{k_l} - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Másrészt mivel a Cauchy sorozat is, ezért $\exists k_1 : k, l > k_1 \Rightarrow \|a_k - a_l\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|a_k - a_{k_l}\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|a_k - a\| \leq \|a_k - a_{k_l}\| + \|a_{k_l} - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

# Függvények limesze (határértéke)

A továbbiakban legyen $X$ és $Y$ metrikus terek, $f : X \rightarrowtail Y$, $D_f \subset X$ és $R_f \subset Y$!

**Definíció**: legyen $a \in X$ az $f$ függvény értelmezési tartományának torlódási pontja! Azt mondjuk, hogy az $f$ függvénynek az $a$ pontban $b \in Y$ a határértéke (limesze), ha $b$ bármely (kicsi) $B_\varepsilon(b)$ környezetéhez létezik $a$-nak olyan $B_\delta(a)$ környezete, hogy $x \in B_\delta(a) \cap D_f, x \neq a \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$.

Megjegyzés: mivel $a$ pont $D_f$ -nek torlódási pontja, ezért bármely $\delta > 0$ esetén $\exists x \neq a : x \in B_\delta(a) \cap D_f$, továbbá a függvény határértéke szempontjából mindegy, hogy $f$ értelmezve van-e $a$-ban vagy sem és $f(a)$ mivel egyenlő.

Állítás: a limesz egy pontban egyértelmű.

**Definíció**: legyen $a \in D_f$. Ekkor $f$ függvényt $a$ pontban folytonosnak nevezzük, ha az $f(a) \in Y$ bármely $B_\varepsilon(f(a))$ környezetéhez található az $a$-nak olyan $B_\delta(a)$ környezete, hogy $x \in B_\delta(a) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$.

Megjegyzés:

- ha $a$ a $D_f$ -nek izolált pontja, akkor abban a függvény folytonos
- ha $a$ a $D_f$ -nek torlódási pontja, akkor $f$ folytonos $a$-ban $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- legyen $f$ valós-valós függvény! Ekkor $f$-nek $a$-ban baloldali határértékét így értelmezzük: $\lim\limits_{x \to a} f|_{(-\infty, a)}(x)$ (ha létezik), és $f$-nek $a$-ban jobboldali határértéke $\lim\limits_{x \to a} f|_{(a, \infty)}(x)$ (ha létezik)
- az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény folytonos, mert mindenhol folytonos, ahol értelmezve van (0-ban nincs értelmezve)

**Példa:** $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in [0,2] \setminus \{1\} \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$. Ez a függvény 1-ben nem folytonos, és határértéke 1-ben 0.

**Definíció**: ha $f$ folytonos $D_f$ minden pontjában, akkor $f$-et folytonosnak nevezzük.

# Átviteli elv



1. **Tétel**: legyen $a \in D_f{}'$ ( $D_f{}'$ a torlódási pontok halmaza)! $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_k) \subset D_f \backslash \{a\}, \lim (x_k) = a$ esetén $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = b$.

   Bizonyítás $\Rightarrow$ irányban: legyen $\lim\limits_{x \to a} f(x) \equiv \lim\limits_{a} f = b$. Legyen $(x_k)$ tetszőleges olyan sorozat, melyre $x_k \in D_f \backslash \{a\}, \lim (x_k) = a$! Belátandó, hogy $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0, k > k_0 \Rightarrow f(x_k) \in B_\varepsilon(b)$. Mivel $\lim\limits_{a} f = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in \{B_\delta(a) \cap D_f\} \backslash \{a\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$, másrészt $\lim (x_k) = a, x_k \in D_f \backslash \{a\} \Rightarrow \forall \delta > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow x_k \in B_\delta(a)$, vagyis $k > k_0$ esetén $f(x_k) \in B_\varepsilon(b)$.

   Bizonyítás $\Leftarrow$ irányban: tfh $\forall (x_k) \subset D_f \backslash \{a\}, \lim (x_k) = a$ esetén $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = b$, bizonyítandó: $\Rightarrow \lim\limits_{a} f = b$, vagyis $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in \{B_\delta(a) \cap D_f\} \backslash \{a\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$. Indirekt bizonyítunk: $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0, \exists x \in \{B_\delta(a) \cap D_f\} \backslash \{a\} : f(x) \notin B_{\varepsilon_0}(b)$. Legyen $\delta := \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, ehhez $\exists x_k \in B_{\frac{1}{k}}(a), x_k \in D_f \backslash \{a\} : f(x_k) \notin B_{\varepsilon_0}(b)$. Ekkor $\lim (x_k) = a$, de $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) \neq b$, mert $\forall k \in \mathbb{N}$ -re $f(x_k) \notin B_{\varepsilon_0}(b)$, ez meg ellentmond a feltevésünknek.

2. **Tétel**: legyen $a \in D_f$! Ekkor az $f$ függvény $a$-ban folytonos pontosan akkor, ha $\forall (x_k) \subset D_f, \lim (x_k) = a$ esetén $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = f(a)$.

   Bizonyítás: az előzővel analóg módon

### Műveleti szabályok

- \+ összeadás

  **Tétel**: legyen $X$ metrikus, $Y$ normált tér! Legyenek $f, g : X \rightarrowtail Y$ és $a \in (D_f \cap D_g)'$. Ekkor $\lim\limits_{a} f = b, \lim\limits_{a} g = c \Rightarrow \lim\limits_{a}(f + g) = b + c$.

  Bizonyítás: legyen $(x_k)$ tetszőleges olyan sorozat, melyre teljesül, hogy $x_k \in \{D_f \cap D_g\} \backslash \{a\}, \lim (x_k) = a$. Azt kell megmutatni, hogy $\lim\limits_{k \to \infty} (f + g)(x_k) = b + c$, ahol $(f + g)(x_k) = f(x_k) + g(x_k)$. Mivel $\lim\limits_{a} f = b, x_k \in D_f \backslash \{a\}, \lim (x_k) = a \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = b$ (átviteli elvből), hasonlóan $\lim\limits_{a} g = c \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} g(x_k) = c$, így ezekből $\lim\limits_{k \to \infty} (f(x_k) + g(x_k)) = b + c$

- szorzás
  1. **Tétel**: legyen $X$ metrikus, $Y$ normált tér, $f : X \rightarrowtail Y, \lambda : X \rightarrowtail \mathbb{R}$. Legyen $a \in \{D_f \cap D_\lambda\}'$ ! Ha $\lim\limits_{a} f = b \in Y, \lim\limits_{a} \lambda = \lambda_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{a}(\lambda f) = \lambda_0 b \in Y$
  2. **Tétel**: legyen $X$ metrikus, $Y$ euklideszi tér, $f, g : X \rightarrowtail Y, a \in \{D_f \cap D_g\}'$ ! Ha $\lim\limits_{a} f = b \in Y, \lim\limits_{a} g = c \in Y \Rightarrow \lim\limits_{a} \langle f, g \rangle = \langle b, c \rangle$

- osztás

  **Tétel**: legyen $X$ metrikus tér, $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$. Ha $\lim\limits_{a} f = b \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$.

### Műveleti szabályok folytonosságra

- + összeadás:
  **Tétel:** legyen $X$ metrikus, $Y$ normált tér, $f, g: X \rightarrowtail Y$. Ha $f, g$ folytonos $a$-ban $\Rightarrow f + g$ is folytonos $a$-ban.
- szorzás
  1. **Tétel**: legyen $X$ metrikus, $Y$ normált tér, $f: X \rightarrowtail Y, \lambda: X \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosak $a$-ban, ekkor $\lambda \cdot f$ is folytonos $a$-ban.
  2. **Tétel**: legyen $X$ metrikus, $Y$ euklideszi tér. Ha $f, g: X \rightarrowtail Y$ folytonosak $a$-ban $\Rightarrow \langle f, g \rangle$ is folytonos $a$-ban.

- osztás:
  **Tétel:** legyen $X$ metrikus tér, $f: X \rightarrowtail \mathbb{R}$. Ha $f$ folytonos $a$-ban és $f(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ is folytonos $a$-ban.

(Az előző tételek bizonyítása az átviteli elvvel történik.)

**A kompozíció függvény**

1. **Tétel**: legyenek $X$, $Y$, $Z$ metrikus terek, $f: X \rightarrowtail Y, g: Y \rightarrowtail Z$. Ha $f$ folytonos $a \in X$ -ben, $g$ pedig $b = f(a) \in Y$ -ban, $\Rightarrow g \circ f$ is folytonos $a$-ban.
   Bizonyítás: mivel $g$ folytonos $b = f(a)$ -ban, így $g$ értelmezve van $f(a)$ -ban, ezért $g \circ f$ értelmezve van $a$-ban, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Az átviteli elvvel belátjuk, hogy $g \circ f$ folytonos $a$-ban. Legyen $(x_k)$ tetszőleges sorozat, melyre $\lim (x_k) = a, x_k \neq a, x_k \in D_{g \circ f}$. Az utóbbi azt jelenti, hogy $x_k \in D_f$, másrészt $f(x_k) \in D_g$, igazolandó tehát, hogy $\lim\limits_{k \to \infty} (g \circ f)(x_k) = (g \circ f)(a) = g(f(a))$.
   Mivel $f$ folytonos $a$-ban, $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = f(a)$. Másrészt $g$ folytonos $f(a)$ -ban, így $g$-re alkalmazva az átviteli elvet, $\lim\limits_{k \to \infty} g(f(x_k)) = g(f(a))$.
   Kérdés: ha $\lim\limits_{a} f = b, \lim\limits_{b} g = c \Rightarrow \lim\limits_{a}(g \circ f) = c$? Általában nem. Példa: legyen $g(y) = \begin{cases} 0 \text{ ha } y = 0 \\ 1 \text{ ha y} \neq 0 \end{cases}$, és $f$ pedig a konstans 0 függvény, azaz $f(x) = 0$, valamint $a = b = 0$. Ekkor $\lim\limits_{0} g = 1, (g \circ f)(x) = 0 \ \forall x \Rightarrow \lim\limits_{0}(g \circ f)(x) = 0$
2. **Tétel**: legyenek $X$, $Y$, $Z$ metrikus terek, $f: X \rightarrowtail Y, g: Y \rightarrowtail Z$. Ha $\lim\limits_{a} f = b$ és $g$ folytonos $b$-ben, akkor $\lim\limits_{a}(g \circ f) = g(b)$.

**Inverz függvény folytonossága**

Egy tetszőleges függvény inverzét akkor tudjuk értelmezni, ha a függvény injektív, azaz $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

**Definíció**: ha $f$ injektív, akkor inverzét így értelmezhetjük: $f^{-1}: R_f \to D_f, y \in R_f$ esetén $f^{-1}(y) = x$, ahol $x \in D_f, f(x) = y$.

Állítás: ha $f: \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ és szigorúan monoton függvény, akkor $f$ injektív.

Kérdés: Ha $f$ folytonos és injektív, akkor inverze is? Általában nem. Pl: $f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x < 1 \\ x - 1 & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$.

Állítás: ha $f:\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton, akkor inverze is.

**Tétel**: ha $f:I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény és $I \subset \mathbb{R}$ valamilyen intervallum $\Rightarrow f^{-1}$ folytonos.

Megjegyzés: az intervallumok az $\mathbb{R}$ összefüggő részhalmazai. Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmazt összefüggőnek nevezünk, ha $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x < x_2 \Rightarrow x \in A$.

Bizonyítás: legyen $y_0 \in D_{f^{-1}} = R_f$. Legyen $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Először tegyük fel, hogy $x_0 \in \operatorname{int} I$. Azt szeretnénk belátni, hogy $f^{-1}$ folytonos $y_0$ -ban. Legyen $\varepsilon > 0, x_0 \pm \varepsilon \in I$ (ilyen $\varepsilon$ létezik, mert $x_0 \in \operatorname{int} I$ )! Ekkor $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$, mivel $f$ szigorúan monoton (növő). Ha $y \in (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$, mivel $f$ inverze is szigorúan monoton, ezért $f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon)) \Leftrightarrow f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$, vagyis $f^{-1}$ folytonos $y_0$ -ban. Az $x_0 \in \partial I$ eset tárgyalása hasonló.

**Példák:** 10.06

1. $f:\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, x \geq 0, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, ekkor $f$ szigorúan monton nő, $D_f = [0,\infty)$, $f^{-1}$ folytonos az $y \in R_f$ pontokban és $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$. (Később látjuk a Bolzano-tétellel, hogy $R_f = [0,\infty)$ .)
2. $f:\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x$, ekkor $f$ szigorúan monoton nő, $D_f = \mathbb{R}$, $f^{-1}$ folytonos. (Később látjuk a Bolzano-tétellel, hogy $D_{f^{-1}} = R_f = (0,\infty)$.)

**Tétel**: legyenek $X$, $Y$ metrikus terek, $f:X \rightarrowtail Y, f \in C(D_f)$, $D_f$ sorozatkompakt, $f$ injektív $\Rightarrow f^{-1} \in C(R_f)$.

Bizonyítás: legyen $y_0 \in D_{f^{-1}} = R_f$. Belátjuk, hogy $f^{-1} \in C[y_0]$. Alkalmazzuk az átviteli elvet! Legyen $y_k \in D_{f^{-1}} = R_f$ olyan, amelyre $\lim (y_k) = y_0$. Belátandó: $\left(f^{-1}(y_k)\right)_{k \in \mathbb{N}} \to f^{-1}(y_0)$. $x_k := f^{-1}(y_k), x_0 := f^{-1}(y_0) \Rightarrow y_k = f(x_k), y_0 = f(x_0)$, vagyis belátandó: $\lim (x_k) \to x_0$. Indirekt bizonyítunk: ha ez nem lenne igaz, akkor $\exists \varepsilon_0 > 0, x_{k_l}: \rho(x_{k_l}, x_0) \geq \varepsilon_0$. Tekintsük az $(x_{k_l})$ sorozatot, amelyre $x_{k_l} \in D_f$. Tudjuk, hogy $D_f$ sorozatkompakt, ekkor $\exists \left(x_{k_{l_j}}\right): \lim \left(x_{k_{l_j}}\right) = x* \in D_f$, de mivel $f \in C[x*] \Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} f\left(x_{k_{l_j}}\right) = f(x*)$ és mivel $\lim\limits_{j\to\infty} f\left(x_{k_{l_j}}\right) = \lim\left(y_{k_{l_j}}\right) = y_0 = f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = f(x*)$. De hát $f$ injektív, vagyis $x_0 = x*$, ami meg ellentmondás, mert $\lim \left(x_{k_{l_j}}\right) = x* = x_0$ esetén $\exists j \in \mathbb{N}: \rho\left(x_{k_{l_j}}, x_0\right) < \varepsilon_0$, de ez ellentmond $\rho(x_{k_l}, x_0) \geq \varepsilon_0$ -nak.

# A folytonos függvények alaptulajdonságai

**Tétel**: legyen $X$, $Y$ metrikus terek, $f:X \to Y, f \in C(D_f)$, $D_f$ sorozatkompakt $\Rightarrow R_f$ is sorozatkompakt. (Weierstrass tétele).

Bizonyítás: legyen $(y_k) \subset R_f$ tetszőleges sorozat! Azt kell megmutatni, hogy $\exists \left(y_{k_l}\right)$ részsorozata, mely konvergens és $\lim \left(y_{k_l}\right) \in R_f$. Mivel $y_k \in R_f \Rightarrow \exists x_k \in D_f: f(x_k) = y_k$. Mivel $D_f$ sorozatkompakt és $x_k \in D_f \Rightarrow \exists \left(x_{k_l}\right): \lim \left(x_{k_l}\right) = x_0 \in D_f$. Mivel $f \in C[x_0] \Rightarrow \lim\limits_{l\to\infty} f\left(x_{k_l}\right) = f(x_0) = y_0 \in R_f$, node $f\left(x_{k_l}\right) = y_{k_l}$, ezért

$\lim\left(y_{k_l}\right) = y_0 \in R_f$, és pont ezt akartuk belátni.

Következmények:

1. $D_f$ sorozatkompakt $\Rightarrow R_f$ korlátos és zárt (minden sorozatkompakt halmaz korlátos és zárt)
2. ha $Y = \mathbb{R}$ akkor is, ha $D_f$ sorozatkompakt $\Rightarrow R_f \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt. A korlátosság következménye: $\sup R_f, \inf R_f$ véges, és mivel az $R_f$ értékkészlet zárt $\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = \inf f, f(x_2) = \sup f$

Példák arra, hogy miért szükséges feltenni, hogy $D_f$ sorozatkompakt ( $D_f, R_f$ sorozatkompaktsága $\mathbb{R}$ -ben azt jelenti, hogy a halmazok korlátosak és zártak)

1. $D_f = [0,\infty)$ zárt, de nem korlátos, $f(x) = x$, ekkor $R_f = [0,\infty)$ nem korlátos
2. $D_f = (0,1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$, ekkor $D_f$ korlátos, de nem zárt, $R_f$ pedig nem korlátos.

Megjegyzés: az a tény, hogy egy $f : X \rightarrowtail Y, f \in C[x_0] \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : x \in B_\delta(x_0) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$, ahol $\delta$ függhet $\varepsilon$ -tól és $x_0$ -tól is.

**<u>Definíció</u>**: azt mondjuk, hogy $X$, $Y$ metrikus terek esetén egy $f : X \rightarrowtail Y$ függvény egyenletesen folytonos, ha $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : x_1, x_2 \in D_f, \rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Tehát ekkor $\delta$ csak $\varepsilon$-tól függ.

**<u>Tétel</u>**: ha $f$ folytonos és $D_f$ sorozatkompakt $\Rightarrow f$ egyenletesen folytonos. (Heine tétele.)

Bizonyítás: tfh $f$ folytonos, $D_f$ sorozatkompakt. Indirekt bizonyítunk: $\exists\varepsilon > 0 \forall\delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in D_f, \rho(x_1, x_2) < \delta$, de $\rho(f(x_1), f(x_2)) \geq \varepsilon$. Legyen $\delta := \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, ekkor tehát $\exists x_k, \widetilde{x_k} \in D_f : \rho(x_k, \widetilde{x_k}) < \frac{1}{k}$ de $\rho(f(x_k), f(\widetilde{x_k})) \geq \varepsilon$. Tudjuk, hogy $D_f$ sorozatkompakt, így $\exists\left(x_{k_l}\right) \subset D_f : \lim\left(x_{k_l}\right) = x_0 \in D_f$. Mivel $\rho\left(x_{k_l}, \widetilde{x_{k_l}}\right) < \frac{1}{k}, \lim\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \Rightarrow \lim\left(\widetilde{x_{k_l}}\right) = \lim\left(x_{k_l}\right) = x_0 \in D_f$. Mivel $f \in C[x_0]$, az átviteli elv alapján $\Rightarrow \lim\limits_{l\to\infty} f\left(x_{k_l}\right) = f(x_0), \lim\limits_{l\to\infty} f\left(\widetilde{x_{k_l}}\right) = f(x_0)$, de ez meg ellentmondás a feltevésünkkel, miszerint $\rho(f(x_k), f(\widetilde{x_k})) \geq \varepsilon$.

**Példák:**

1. $D_f = [0,\infty)$ ez zárt, de nem korlátos, $f(x) := x^2$ nem egyenletesen folytonos
2. $D_f = (0,1]$ ez korlátos, de nem zárt, $f(x) := \frac{1}{x}$ nem egyenletesen folytonos.

**<u>Tétel</u>**: legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \in C[a,b], f(a) \neq f(b)$, ekkor tetszőleges $\eta \in (f(a), f(b))$ számhoz $\exists\xi \in (a,b) : f(\xi) = \eta$. (Bolzano tétel)

Bizonyítás: tekintsük a következő halmazt: $M := \{x \in [a,b] : f(x) < \eta\} \subset [a,b] \Rightarrow M \neq \emptyset$ mivel $a \in M$, továbbá $M$ korlátos. Legyen $\xi := \sup M$. Belátjuk, hogy $f(\xi) = \eta$. Indirekt bizonyítunk: $f(\xi) < \eta$ vagy $f(\xi) > \eta$ nem lehetséges. Első eset: ha $f(\xi) < \eta$ lenne, akkor $f(b) > \eta \Rightarrow \xi \neq b$, ezért $\xi$ -nek megadható olyan jobboldali környezete, ahol a függvényértékek $\eta$-nál kisebbek, mert $f \in C[\xi]$, vagyis $\exists\delta > 0 : x \in [\xi, \xi + \delta] \Rightarrow f(x) < \eta$, ez pedig ellentmond annak, hogy $\xi = \sup M$.

Második eset: ha $f(\xi) > \eta$ lenne, akkor $f(a) < \eta \Rightarrow \xi \neq a$ és $f \in C[a,b] \Rightarrow \exists \delta > 0: x \in [\xi - \delta, \xi] \Rightarrow f(x) > \eta$. Ez is ellentmond annak, hogy $\xi = \sup M = \sup\{x \in [a,b]: f(x < \eta)\}$. Tehát mivel $f(\xi) \not> \eta, f(\xi) \not< \eta \Rightarrow f(\xi) = \eta$.

Következmények: legyen $I \subset \mathbb{R}$ valamilyen intervallum (véges vagy végtelen, nyílt vagy zárt), és tfh $f: I \to \mathbb{R}, f \in C(I)$. Ekkor $\forall x_1, x_2 \in I, y \in (f(x_1), f(x_2))$ esetén $\exists x_0 \in (x_1, x_2): f(x_0) = y$.

Megjegyzés: az ilyen tulajdonságú függvényeket Darboux tulajdonságúaknak nevezzük. A Bolzano-tétel kimondja, hogy ha $f: I \to \mathbb{R}, f \in C(I) \Rightarrow f$ Darboux tulajdonságú.

**Példa:** $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$. Ez a függvény Darboux tulajdonságú, de nem folytonos 0-ban.

Állítás: egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz intervallum $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, \forall x \in (x_1, x_2)$ esetén $x \in A$.

Ezen állítás segítségével a Bolzano tétel így is megfogalmazható:

**Tétel**: ha $I$ intervallum, és $f: I \to \mathbb{R}, f \in C(I) \Rightarrow R_f$ is intervallum.

Alkalmazás:

1. $I := [0,\infty), f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$! Ekkor a tétel szerint mivel $f$ folytonos, $R_f$ valamilyen intervallum, $f$ szigorúan monoton nő, $f(0) = 0, \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \Rightarrow R_f = [0,\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = [0,\infty)$
2. $I = \mathbb{R}, f: I \to \mathbb{R}, f(x) = e^x \Rightarrow f(x) \in C(I), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $f$ szigorúan monoton nő, $R_f = (0,\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} \equiv D_{\ln} = (0,\infty)$.

## Bolzano-tétel metrikus terekben 10.13

**Definíció**: Legyen $X$ metrikus tér, $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}, \varphi: [\alpha,\beta] \to X, \varphi \in C[\alpha,\beta]$. Ekkor azt mondjuk, hogy $\varphi$ folytonos ívet, görbét határoz meg az $X$-ben. $R_\varphi = \{\varphi(t): t \in [\alpha,\beta]\} \subset X$. Ekkor $\varphi(\alpha)$ és $\varphi(\beta)$ -t a görbe végpontjainak nevezzük. (Megj: van, amikor $\varphi$ -t nevezzük görbének, nem pedig a „képét”.)

**Definíció**: azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ halmaz ívszerűen összefüggő, ha az $A$ halmaz bármely két pontja összeköthető az $A$-ban haladó folytonos görbével, ívvel, vagyis $\forall a, b \in A \exists \varphi: [\alpha,\beta] \to X, \varphi \in C[\alpha,\beta]$, hogy $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, t \in (\alpha,\beta) \Rightarrow \varphi(t) \in A$

**Tétel**: legyenek $X$, $Y$ metrikus terek, $f: X \rightarrowtail Y, f \in C(D_f)$! Ha $D_f$ ívszerűen összefüggő, akkor $R_f$ is.

Bizonyítás: legyenek $y_1, y_2 \in R_f$. Belátjuk, hogy $y_1, y_2$ összeköthető $R_f$ -ben haladó folytonos ívvel. Mivel $y_1, y_2 \in R_f \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in D_f: f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Mivel $D_f$ ívszerűen összefüggő $\Rightarrow \exists \varphi: [\alpha,\beta] \to X, \varphi \in C[\alpha,\beta]$, hogy $\varphi(\alpha) = x, \varphi(\beta) = x_2, t \in (\alpha, \beta) \Rightarrow \varphi(t) \in D_f$. Legyen $\psi: [\alpha, \beta] \to Y, \psi: = f \circ \varphi$ ekkor $\psi$ folytonos (kompozíció függvény tulajdonságából), továbbá $t \in (\alpha, \beta) \Rightarrow \psi(t) = f(\varphi(t)) \in R_f$, sőt,

$\psi(\alpha) = f(\varphi(\alpha)) = f(x_1) = y_1, \psi(\beta) = f(\varphi(\beta)) = f(x_2) = y_2$.

**Definíció**: azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ összefüggő (topológiai értelemben), ha nem adható meg $G_1$ és $G_2$ diszjunkt nyílt halmaz úgy, hogy $G_1 \cup G_2 \supset A, A \cap G_1 \neq \emptyset, A \cap G_2 \neq \emptyset$.

Megjegyzés: belátható, hogy ha $A$ ívszerűen összefüggő, akkor összefüggő.

**Tétel**: legyenek $X$, $Y$ metrikus terek, $f: X \rightarrowtail Y, f \in C(D_f)$! Ha $D_f$ összefüggő $\Rightarrow R_f$ is. (Bolzano-tétel metrikus térben.)

## Függvénysorok és sorozatok egyenletes konvergenciája

**Definíció**: legyenek $X$, $Y$ metrikus terek, $M \subset X$, és $\forall j \in \mathbb{N}$-re $f_j: M \to Y$. Azt mondjuk, hogy $f_j$ függvények függvénysorozatot alkotnak, jelölése $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

**Definíció**: azt mondjuk, hogy az $f_j: M \to Y$ függvényekből álló sorozat pontonként tart egy $f: M \to Y$ függvényhez, ha $\forall x \in M, \lim\limits_{j \to \infty} f_j(x) = f(x)$.

Kérdés: feltéve, hogy $f_j \in C(M)$ minden $j$-re, $\Rightarrow f \in C(M)$? Általában nem. Pl: $f_j(x) = x^j, 0 \leq x \leq 1, j \in \mathbb{N}$, ekkor $\forall f_j \in C(M)$, de $\lim\limits_{j \to \infty} f_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$.

**Definíció**: azt mondjuk, hogy az $f_j: M \to Y$ függvényekből álló sorozat egyenletesen tart az $f: M \to Y$ függvényhez, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \in \mathbb{N}: j > j_0 \Rightarrow \rho(f_j(x), f(x)) < \varepsilon, \forall x \in M$.

Megjegyzés: $j_0$ csak $\varepsilon$-tól függ, és nem függ $x$-től. (Pontonkénti konvergencia esetén függhet $x$-től.)

**Példa:** $f_j(t) := t^j, 0 < a < 1, 0 \leq t \leq a$, ekkor $f_j$ egyenletesen tart 0-hoz a $[0,a]$ -n. Ugyanis legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, $0 \leq t^j < \varepsilon$ esetén $0 \leq t^j < \varepsilon$ mikor teljesül? Válasszuk meg $j_0$ számot úgy, hogy $j > j_0$ esetén $a^j < \varepsilon$. Ezt mindig megtehetjük, ugyanis $0 < a < 1$, így $0 \leq t \leq a$ esetén $t^j \leq a^j \leq \varepsilon$.

**Tétel**: legyen $f_j: M \to Y, M \subset X, f_j \in C(D_f)$. Ha $(f_j)$ függvénysorozat egyenletesen tart egy $f: M \to Y$ függvényhez, akkor $f$ folytonos.

Bizonyítás: legyen $x_0 \in M$. Belátjuk, hogy $f \in C[x_0]$. Tetszőleges $x \in M$ esetén $\rho(f(x), f(x_0)) \leq \rho(f(x), f_j(x)) + \rho(f_j(x), f_j(x_0)) + \rho(f_j(x_0), f(x_0))$. Legyen $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ tetszőleges, ezért mivel $(f_j)$ egyenletesen tart $f$-hez, $\exists j_0: j > j_0 \Rightarrow \rho(f(x), f_j(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \rho(f(x_0), f_j(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Választhatunk egy rögzített $j > j_0$ -t, mondjuk $j = j_0 + 1$. Továbbá tudjuk, hogy $f_j \in C[x_0] \Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in M, \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho\left(f_j(x), f_j(x_0)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$, tehát

$$\rho(f(x), f(x_0)) \leq \underbrace{\rho\left(f(x), f_j(x)\right)}_{<\varepsilon/3 \text{ mivel } j > j_0} + \underbrace{\rho\left(f_j(x), f_j(x_0)\right)}_{<\varepsilon/3 \text{ ha } x \in B_\delta(x_0)} + \underbrace{\rho\left(f_j(x_0), f(x_0)\right)}_{<\varepsilon/3 \text{ mivel } j > j_0} < \varepsilon.$$

Megjegyzés: $f_j(t) := t^j, 0 \leq t \leq 1$ függvények esetén $\left(f_j\right)$ függvénysorozat nem tart egyenletesen az $f$ függvényhez.

**Definíció**: legyen $X$ metrikus tér, $Y = \mathbb{R}, M \subset X, g_k : M \to \mathbb{R}$ ( $\mathbb{R}$ helyett lehetne $\mathbb{C}$ is). Ekkor tekintsük a következő függvénysorozatot: $f_j := \sum_{k=1}^{j} g_k$. Az ilyen módon értelmezett $\left(f_j\right)$ sorozatot a $g_k$ tagokból álló függvénysornak nevezzük.

**Definíció**: azt mondjuk, hogy a $g_k$ tagokból álló sor pontonként konvergens és összege $f : M \to \mathbb{R}$ függvény, ha $\forall x \in M$ esetén $g_k(x)$ tagokból álló számsor konvergens $\mathbb{R}$ -ben, és a sor összege $f(x)$, és ezt így jelöljük: $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = f(x)$ jelöljük.

Megjegyzés: $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \equiv \lim_{j \to \infty} f_j(x) = \lim_{j \to \infty} \sum_{k=1}^{j} g_j(x)$.

**Definíció**: azt mondjuk, hogy a $(g_k)$ tagokból álló függvénysor egyenletesen konvergál egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha $f_j = \sum_{k=1}^{j} g_k$ esetén $\left(f_j\right)$ függvénysorozat egyenletesen tart $f$-hez.

**Tétel**: tfh $g_k : M \to \mathbb{R}$ folytonos és a $g_k$ tagokból álló sor egyenletesen konvergál egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvényhez $\Rightarrow f \in C\left(D_f\right)$.

Bizonyítás: $f_j = \sum_{k=1}^{j} g_k$ folytonos, $\lim \left(f_j\right) = f$ -hez egyenletesen konvergál $\Rightarrow f \in C\left(D_f\right)$.

**Tétel**: tfh $g_k : M \to \mathbb{R}$ függvényekre teljesül, hogy $|g_k| \leq a_k, a_k \in \mathbb{R}$ és $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$. Ekkor a $(g_k)$ tagokból álló függvénysor egyenletesen konvergens.

Bizonyítás: legyen $x \in M$ tetszőleges, rögzített pont. Először belátjuk, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| < \infty$. Legyen $f_j(x) := \sum_{k=1}^{j} g_k(x)$, ekkor $\exists j_0 : j > l > j_0 \Rightarrow \left|f_j(x) - f_l(x)\right| = \left|\sum_{k=l+1}^{j} g_k(x)\right| \leq \sum_{k=l+1}^{j} |g_k(x)| \leq \sum_{k=l+1}^{j} a_k < \varepsilon$, mivel

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$, vagyis $\left(f_j(x)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ számsorozatra teljesül a Cauchy-kritérium. Mivel $\mathbb{R}$ teljes tér

$\Rightarrow \exists f(x) \in \mathbb{R}$: $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$, vagyis a $|g_k(x)|$ és a $g_k(x)$ tagokból álló függvénysor konvergens.

Belátjuk, hogy a sor, illetve a vele ekvivalens $\left(f_j\right)$ függvénysorozat egyenletesen konvergál *f*-hez. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, a fentiek szerint, $j \to \infty$ határátmenetben a fenti egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $|f(x) - f_l(x)| \leq \sum_{k=l+1}^{\infty} a_k < \varepsilon, \forall x \in M$, ha $l > j_0$. De hisz ez pont az jelenti, hogy $f_k$ egyenletesen tart *f*-hez.

# Hatványsorok

**Definíció**: egy $c_j x^j, x \in \mathbb{R}, c_j \in \mathbb{R}, j = 0,1,2...$ tagokból álló függvénysort hatványsornak nevezünk.

Megjegyzés: a hatványsor tagjai folytonos függvények.

Kérdés: a hatványsor mely $x$-ekre konvergens, illetve egyeneltesen konvergens?

**Definíció**: legyen $a_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$. Az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat limesz szuperiorját illetve limesz inferiorját így értelmezzük: $\limsup\,(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = \limsup_{k\to\infty} a_k$ jelenti azt a legnagyobb valós számot (vagy végtelent), amelyhez az $(a_k)$ egy alkalmas részsorozata konvergál. Ezzel analóg a $\liminf\,(a_k)$.

Megjegyzés:

1. mindig létezik limesz inferior és limesz szuperior
2. ha $\exists \lim\,(a_k) \Rightarrow \lim\,(a_k) = \limsup\,(a_k) = \liminf\,(a_k)$
3. $\limsup\,(a_k) = \lim_{k\to\infty} [\sup\,\{a_k, a_{k+1},...\}]$

**Tétel**: legyen $R := \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|c_k|}}$. Ha a nevező nulla lenne, akkor $R := \infty$, ha végtelen, akkor $R := 0$. Ekkor $|x| < R$ esetén a hatványsor konvergens, $|x| > R$ esetén pedig divergens.

Bizonyítás: a gyökkritérium alapján…

**Tétel**: legyen $0 < R_0 < R$, ekkor a hatványsor egyenletesen konvergens az $R_0$ sugarú intervallumban (vagy körben).

Bizonyítás: Weierstrass kritériummal bizonyítjuk. Legyen $g_j(x) = c_j x^j$, $j = 0,1,...$, ekkor $|g_j(x)| = |c_j x^j| = |c_j||x^j| \leq |c_j| R_0^j$. Azt kellene belátni, hogy $|c_j| R_0^j$ tagokból álló sor konvergens. Alkalmazzuk erre a gyökkritériumot! $\sqrt[j]{|c_j| R_0^j} = R_0 \sqrt[j]{|c_j|}$, $\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|c_j| R_0^j} = R_0 \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|c_j|} = \frac{R_0}{R} < 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |c_j| R_0^j$ konvergens (ez a gyökkritérium).

Következmény: a hatványsor összege folytonos a konvergenciakör belsejében. Például $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$, ennek a

konvergencia-sugara végtelen, mert $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1/n!}} = \limsup \sqrt[n]{n!} = \infty$.

# Differenciálhatóság 10.20

**Definíció**: egy $f:\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvényt az $x_0$ pontban differenciálhatónak nevezünk, ha $x_0 \in \operatorname{int} D_f$ és $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ és véges $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon}$ és véges.

Megjegyzés: Hogy egy ilyen definíciót továbbvihessünk "többváltozós" függvényekre, szükségünk van a lineáris leképezések vizsgálatára.

## Lineáris leképezések

**Definíció**: legyen $X$ vektortér, azt mondjuk, hogy az $M \subset X$ halmaz elemei lineárisan függetlenek, ha bármely $M$-beli véges sok elemre $\sum_i \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$. Gyakran $M$-et nevezzük lineárisan függetlennek, nem pedig az elemeit.

Állítás: egy vektortér lineárisan független elemeinek maximális száma egyértelmű.

**Definíció**: az $X$ vektortér dimenziójának nevezzük az $X$-beli lineárisan független elemek maximális számát (véges vagy végtelen is lehet).

**Definíció**: legyenek $X$ és $Y$ vektorterek, $M \subset X$! Egy $A:M \to Y$ leképezést lineárisnak nevezünk, ha

1. $x_1, x_2 \in M \Rightarrow x_1 + x_2 \in M$, és $x \in M, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in M$
2. $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$ (additivitás)
3. $A(\lambda x_1) = \lambda A(x_1)$ (homogenitás)

Megjegyzés: az első feltétel $M$-től megköveteli, hogy lineáris altér legyen, azonban gyakran $A$-t egy $X$-ről $Y$-ba képező függvényként definiáljuk, így $M$-re nincs is szükség.

**Példák:** $X: = \mathbb{R}^n, Y: = \mathbb{R}^m, A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $\mathcal{A}$ mátrix, hogy $\mathcal{A}x = Ax$, és $\mathcal{A}$ ilyen alakú: $\mathcal{A}: = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

**Definíció**: jelölje a $\operatorname{lin}(X, Y) = L(X, Y)$ az összes $X \to Y$ lineáris leképezések halmazát!

**Definíció**: legyen $X, Y$ vektorterek, $A \in \text{lin}\,(X,Y), B \in \text{lin}\,(X,Y)$, ekkor $A+B$ -t így értelmezzük:

$(A+B)(x) = \underbrace{Ax+Bx}_{\in Y}$, $\forall x$ -re.

Állítás: $(A+B) \in \text{lin}\,(X,Y)$

**Definíció**: az $A \in \text{lin}\,(X,Y)$ -nek $\lambda \in \mathbb{R}$ számmal való szorzatát így értelmezzük: $(\lambda A)(x) = \lambda(Ax)$.

Megjegyzés: a homogenitás miatt a zárójelet elhagyhatjuk, a művelet egyértelmű marad.

Állítás: $\lambda A \in \text{lin}\,(X,Y)$

**Tétel**: $\text{lin}\,(X,Y)$ vektorteret alkot az előbbi két művelettel (vagyis az $A+B$ között értelmezett összeadással és $\lambda A$ -val értelmezett szorzással).

**Definíció**: legyenek $Y = X$ vektorterek! Egy $A \in \text{lin}\,(X,X), B \in \text{lin}\,(X,X)$ szorzatát így értelmezzük: $(AB)(x) = A(B(x))$, vagyis mint kompozíció, tehát $AB \equiv A \circ B$.

Állítás: $AB \in \text{lin}\,(X,X)$.

**Definíció**: legyen

- $I: X \to X,\ Ix = x\ \forall x \in X$ és
- $0: X \to X,\ 0x = 0 \in X\ \forall x \in X$

Ekkor $I \in \text{lin}\,(X,X)$ és $0 \in \text{lin}\,(X,X)$. Így igaz a következő

**Tétel**: $\text{lin}\,(X,X)$ -ben érvényesek a következők:

1. $(A+B)C = AC+BC$
2. $C(A+B) = CA+CB$
3. $\lambda_{\in\mathbb{R}}(AB) = (\lambda A)B$
4. $\exists\,!0 \in \text{lin}(X,X): 0A = A0 = 0\ \forall A$
5. $\exists\,!I \in \text{lin}(X,X): IA = AI = A\ \forall A$

**Definíció**: egy $A \in \text{lin}\,(X,X)$ hatványait így értelmezzük: $A^0 = I, A^1 = A, A^2 = AA\ \ldots$ $A^n = \underbrace{AA...A}_{n\ \text{db}} = AA^{n-1} = A^{n-1}A$.

Állítás: legyen $X := \mathbb{R}^n$ és $A, B \in \text{lin}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ha $\mathscr{A} \Leftrightarrow A, \mathscr{B} \Leftrightarrow B$, akkor $\mathscr{A}\mathscr{B} \Leftrightarrow AB$. (Itt $\mathscr{A} \Leftrightarrow A$ azt jelenti, hogy $Ax = \mathscr{A}x$; $\mathscr{A}\mathscr{B}$ mátrixszorzást jelent).

**Definíció**: legyen $X$ vektortér, $A \in \text{lin}(X, X)$! Azt mondjuk, hogy $\lambda \in \mathbb{R}$ szám az $A$ leképezés sajátértéke és $x \in X, x \neq 0$ pedig a sajátvektora, ha $Ax = \lambda x$.

**Definíció**: a $\psi$ sajátérték rangjának (vagy geometriai multiplicitásának) a $\psi$ -hoz tartozó lineárisan független sajátelemek (sajátvektorok) maximálás számát nevezzük.

Megjegyzés: a $\psi$ -hoz tartozó sajátvektorok alteret alkotnak.

Speciális eset: $X := \mathbb{R}^n, A \Leftrightarrow \mathscr{A}, I \Leftrightarrow \mathscr{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ddots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \ddots & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\det(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{E}) = 0$ egyenlet megoldásai adják a $\psi$ sajátértékeket.

### Lineáris leképezések inverze

Legyen $X$ vektortér! Egy $A \in \text{lin}(X, X)$ leképezésnek mikor van inverze? (Tudjuk, hogy az inverz csak akkor értelmezhető, ha a függvény injektív).

**Tétel**: egy $A \in \text{lin}(X, X)$ leképezésnek pontosan akkor van inverze, ha $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$, vagyis ha $\ker A = \{0\}$.

Bizonyítás: belátjuk, hogy $A$ injektív, ha $\ker A = 0$, illetve $\ker A = 0$ ha $A$ injektív. Első része: legyen $x_1, x_2 \in X$ és $Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = 0$, mivel $\ker A = 0$, ezért $\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$, tehát $A$ injektív, ha $\ker A = 0$.

Most belátjuk, hogy $\ker A = 0$ ha $A$ injektív, vagyis $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$. $A0 = 0$ és $A$ injektív $\Rightarrow x = 0$.

Állítás: $A \in \text{lin}(X, X)$ injektív $\Rightarrow A^{-1} \in \text{lin}(X, X)$

Állítás: legyen $A \in \text{lin}(X, X)$ olyan, hogy $\exists B \in \text{lin}(X, X): AB = BA = I$, ekkor $\exists A^{-1}$ és $A^{-1} = B$.

## Lineáris és folytonos operátorok

Legyen a továbbiakban $X$, $Y$ normált tér, $A \in \text{lin}(X, Y)$.

Kérdés: következik-e ebből, hogy $A$ folytonos is? Általában nem.

Állítás: legyen $A \in \text{lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, ekkor $A$ folyonos.

Bizonyítás: legyen $\mathscr{A}$ mátrix, melyre $\mathscr{A}x = Ax$. Becsüljük meg ~~amink van~~ $|Ax|$ -t!

$$|Ax|^2 = |\mathscr{A}x|^2 = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 \leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = |x|^2 \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2$$ (lásd a megjegyzést), vagyis

$|Ax|^2 \leq c^2|x|^2 \Rightarrow |Ax| \leq c|x|$, így $|Ax - Ax_0| \leq c|x - x_0|$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, $\delta := \frac{\varepsilon}{c} > 0$. Ha $|x - x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{c} \Rightarrow |Ax - Ax_0| < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$.

Megjegyzés: az első számítás során felhasználtuk, hogy $y_j = (\mathscr{A}x)_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}x_k \Rightarrow y_j^2 \le \left(\sum_{k=1}^{m} a_{jk}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\right)$.

(Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség).

**Definíció**: legyen $X$, $Y$ normált tér, $A \in \operatorname{lin}(X, Y)$! Az $A$ leképezést korlátosnak nevezzük, ha $\exists c \ge 0, c \in \mathbb{R}: \|Ax\| \le c\|x\|, \forall x \in X$ -re.

**Tétel**: legyen $A \in \operatorname{lin}(X, Y)$. Ekkor $A$ folytonos $\Leftrightarrow$ $A$ korlátos.

Bizonyítás: $\Leftarrow$ irányban: tfh $A$ korlátos, vagyis $\exists c \ge 0: \|Ax\| \le c\|x\|$. Legyen $x_0 \in X$. Azt szeretnénk belátni, hogy $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$. Tudjuk, hogy $\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \le c\|x - x_0\|$, ezért legyen $\delta := \frac{\varepsilon}{c} > 0$, így $\|Ax - Ax_0\| < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$.

$\Rightarrow$ irányban indirekt: tfh $A$ nem korlátos, de folytonos, vagyis a nem korlátosságból adódóan $\forall c > 0 \exists x: \|Ax\| > c\|x\|$. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$ számhoz $\exists x_n \in X: \|Ax_n\| > n\|x_n\|, c := n$. Legyen $\widetilde{x_n} := \frac{x_n}{n\|x_n\|}$, ekkor $\|\widetilde{x_n}\| = \frac{1}{n}\frac{\|x_n\|}{\|x_n\|} = \frac{1}{n}$, vagyis $\lim(\widetilde{x_n}) = 0$. Mivel $A$ folytonos, így az átviteli elv segítségével $\lim\|A\widetilde{x_n}\| = 0$, de tudjuk, hogy $\|A\widetilde{x_n}\| = \left\|A\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right\| > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$, tehát azt kaptuk, hogy $\|A\widetilde{x_n}\| > 1 \, \forall n$ -re, de ez meg ellentmond annak, hogy $\lim\|A\widetilde{x_n}\| = 0$

**Definíció**: egy $f$ függvényt akkor nevezünk folytonosan differenciálhatónak egy $[\alpha, \beta]$ -n, ha folytonos az $[\alpha, \beta]$ -n, differenciálható a $(\alpha, \beta)$ -n és a deriváltjának létezik folytonos kiterjesztése az $[\alpha, \beta]$ -ra. Ezt a tényt így jelöljük: $f \in C^1[0,1]$ .

**Példa** lineáris, nem korlátos operátorra: $X := C[0,1]$, művelet a szokásos összeadás és skalárral való szorzás, a norma $\|f\| = \sup|f|$. Legyen $f \in D_A = C^1[0,1] \subset X$, ahol $A$ a differenciáloperátor, vagyis $Af := f' \in X$. Vegyük észre, hogy $A \in \operatorname{lin}(X, X)$, de nem folytonos. Ugyanis: az $f_j(t) = \frac{1}{j}e^{-jt}, j \in \mathbb{N}, t \in [0,1]$ függvények folytonosan differenciálhatóak, normájuk $\|f_j(t)\| = \frac{1}{j} \Rightarrow \lim_j\|f_j\| = 0$ . Továbbá $f_j'(t) = -e^{-jt} \Rightarrow \|f_j'(t)\| = 1 \Rightarrow \lim_j\|f_j'\| = \lim_j\|Af_j\| = 1$ . Eszerint az $Af = f'$ , $f$ folytonosan differenciálható, $C[0,1] \rightarrowtail C[0,1]$ operátor nem folytonos, de lineáris (az $A$ operátor a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvények halmazából képez a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvények halmazába).

Adott vektortérhez többféleképp is értelmezhető norma. Folytonos függvényekre (amik vektorteret alkotnak) 11.04
egy lehetséges norma a következő: $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ vagy akár a következő: $\|f\|_\infty = \sup\{|f| : t \in [0,1]\}$. Ez utóbbira lássuk be a norma tulajdonságait!

1. $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ láthatóan teljesül

2. $\|\lambda f\| = \sup\{|\lambda f(t)|: t \in [0,1]\} = \sup\{|\lambda| |f(t)|: t \in [0,1]\} = |\lambda| \sup\{|f(t)|: t \in [0,1]\} = |\lambda| \cdot \|f\|$
3. $\|f+g\| = \sup\{|f+g|(t): t \in [0,1]\} \leq \sup\{|f(t)| + |g(t)|: t \in [0,1]\} \leq \; \leq \sup\{|f(t)|: t \in [0,1]\} + \sup$ $\{|g(t)|: t \in [0,1]\}$

**Definíció**: legyen $X$, $Y$ normált tér, $A \in \operatorname{lin}(X, Y)$ és korlátos. Értelmezzük az $A$ operátor normáját!

$\|A\| := \sup\{\|Ax\|: \|x\| = 1\}$. Belátandó, hogy a norma tulajdonságai teljesülnek. Mivel $A$ korlátos,

$\exists c \in \mathbb{R}: \|Ax\| \leq c\|x\| = c$, ha $\|x\| = 1$.

1. Nyilván $\|A\| \geq 0$ és $A = 0 \Rightarrow \|A\| = 0$. Fordítva: $\|A\| = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \forall x \in X, \|x\| = 1$. Bizonyítandó, hogy ekkor $A = 0 \Leftrightarrow Az = 0 \forall z \in X$. Ekkor $Az = A\left(\frac{z}{\|z\|}\|z\|\right) = \|z\| A \underbrace{\left(\frac{z}{\|z\|}\right)}_{\text{normája } 1} = \|z\| 0 = 0, \forall z \in X \Leftrightarrow A = 0$.
2. $\|\lambda A\| = \sup\{\|(\lambda A)x\| \| \|x\| = 1\} = \sup\{|\lambda| \|Ax\| \| \|x\| = 1\} = |\lambda| \sup\{\|Ax\| \| \|x\| = 1\} = \lambda \|A\|$.
3. $\|A+B\| = \sup\{\|(A+B)x\|: \|x\| = 1\} \leq \sup\{\|Ax\| + \|Bx\|: \|x\| = 1\} \leq$
   $\leq \sup\{\|Ax\|: \|x\| = 1\} + \sup\{\|Bx\|: \|x\| = 1\} = \|A\| + \|B\|$.

**Tétel**: legyen $X$, $Y$ normált tér! Tekintsük a korlátos, $\operatorname{lin}(X, Y)$ -beli operátorokat az összeadással és számmal való szorzással és az előbb értelmezett normával. Ez normált teret alkot és $L(X, Y)$ -nak jelöljük.

Megjegyzés: az $X$-en értelmezett $Y$-ba képező korlátos lineáris operátorok a szokásos műveletekkel vektorteret alkotnak, mert 2 korlátos, folytonos operátor összege is folytonos, korlátos és skalár szorosa is korlátos (utóbbi ekvivalens a folytonossággal, mint bizonyítottuk).

Állítás: legyen $A \in L(X, Y)$! Ekkor $\|A\| = \min\{c \geq 0: \|Ax\| \leq c\|x\|, \forall x \in X\}$.

Bizonyítás: $\alpha := \inf\{c \geq 0: \|Ax\| \leq c\|x\| \forall x \in X\}$. Mivel $\|A\| = \sup\{\|Ax\| \| \|x\| = 1\} \Rightarrow \forall z \in X \backslash \{0\}$ elemet véve $z = \frac{z}{\|z\|}\|z\|$. Ekkor $\|Az\| = \left\|A \frac{z}{\|z\|}\|z\|\right\| = \|z\| \cdot \left(A\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\right) \leq$

$\leq \|z\| \cdot \|A\| \Rightarrow \|A\| \in \{c \geq 0: \|Ax\| \leq c\|x\|, \forall x \in X\} \Rightarrow \alpha \leq \|A\|$. Belátjuk, hogy $\alpha < \|A\|$ nem lehet, ha ugyanis $\alpha < \|A\|$ lenne, akkor $\exists c: 0 \leq c < \|A\|, \|Ax\| \leq c\|x\|$, de ekkor $\|A\| = \sup\{\|Ax\| \| \|x\| = 1\} \leq \sup\{c\|x\| \| \|x\| = 1\} = c$ lenne, ami ellentmond $c < \|A\|$ -nak.

**Tétel**: legyen $X$ normált, $Y$ teljes normált tér, ekkor $L(X, Y)$ normált tér is teljes.

Bizonyítás: legyen $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az $L(X, Y)$ normált térben, vagyis $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0: j, k > k_0 \Rightarrow \|A_j - A_k\| < \varepsilon$. Be kellene látni, hogy $\exists A \in L(X, Y): \lim_j \|A_j - A\| = 0$. Legyen $x \in X$ tetszőleges rögzített elem! Tekintsük az $(A_j x)_{j \in \mathbb{N}}$ $Y$-beli sorozatot! Belátjuk, hogy erre teljesül a Cauchy-kritérium. $\|A_j x - A_k x\| = \|(A_j - A_k)x\| \leq \|A_j - A_k\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$. Mivel $Y$ tér teljes, $\exists \lim_{j \to \infty} (A_j x) = A(x) \in Y$. $\lim_{j \to \infty} \|A_j x - A(x)\| = 0, \forall x \in X$ rögzített elemre. Nem nehéz belátni, hogy $A \in \operatorname{lin}(X, Y)$. Belátandó, hogy korlátos is. $\|A_j x\| \leq \|A_j\| \cdot \|x\|$. Mivel $(A_j)$ Cauchy sorozat, $\forall \varepsilon > 0 \exists j_0: j, k > j_0 \Rightarrow \|A_j - A_k\| < \varepsilon$. Legyen $\varepsilon := 1, k := j_0 + 1$, ekkor $\|A_j - A_{j_0+1}\| < 1$ ha $j > j_0$. $A_1, A_2 \ldots A_{j_0}, A_k$ véges sok operátor, ezek korlátosak. Ebből következik, hogy

$\exists c: \|A_j\| \leq c, \forall j$, továbbá a $\|A_j x - A_k x\| \leq \varepsilon\|x\|$ egyenlőtlenségből követkeik $k \to \infty$ esetben, hogy $\|A_j x - Ax\| \leq \varepsilon\|x\|$, tehát $\|A_j x\| \to \|Ax\| \leq c\|x\|$ és $\lim_j \|A_j - A\| = 0$.

Emlékeztető kalkulusról: $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény differenciálható egy $x_0$ pontban, ha $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} := f'(x_0)$. Legyen $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$, ekkor egy $f$ differenciálható, ha $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Ha $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$ teljesül úgy, hogy $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \Rightarrow f$ differenciálható.
Módosítás: $\eta(x) := \varepsilon(x)(x - x_0)$, ekkor $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \eta(x)$, ahol $\lim_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{x - x_0} = 0$. Ezt, az eredetivel ekvivalens meghatározást tovább lehet általánosítani normált terekre.

**Definíció**: legyenek $X$, $Y$ normált terek, $f : X \rightarrowtail Y$, $x_0 \in \operatorname{int} D_f$! Azt mondjuk, hogy $f$ differenciálható az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\exists A \in L(X, Y) : f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \eta(x)$ és $\lim_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{\|x - x_0\|} = 0 \in Y$.

Megjegyzés: $X = Y = \mathbb{R}$ esetben visszaadja a klasszikus definíciót.

Állítás: ha $f$ differenciálható az $x_0$ -ban, akkor $A$ egyértelmű.
Bizonyítás: tfh $A, \widetilde{A} \in L(X, Y) : f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \eta(x)$ és $f(x) - f(x_0) = \widetilde{A}(x - x_0) + \widetilde{\eta}(x)$ ahol $\lim_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{\|x - x_0\|} = 0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\widetilde{\eta}(x)}{\|x - x_0\|}$. Belátjuk, hogy $A - \widetilde{A} = 0$.
Legyen $z \in X$ tetszőleges és $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ekkor $x = x_0 + a \cdot z$ benne van az $x_0$ kis környezetében, ha $|a|$ elég kicsi.
Ekkor $0 = \left(A - \widetilde{A}\right)(az) + (\eta - \widetilde{\eta})(x_0 + az)$. Osszuk mindkét oldalt $a$-val! $0 = \left(A - \widetilde{A}\right)z + (\eta - \widetilde{\eta})(x_0 + az)/a$, így
$\left\|\frac{(\eta - \widetilde{\eta})(x_0 + az)}{a}\right\| = \frac{\|(\eta - \widetilde{\eta})(x_0 + az)\|}{|a|} = \frac{\|(\eta - \widetilde{\eta})(x_0 + az)\|}{\|x - x_0\|}\|z\| = \underbrace{\frac{\|(\eta - \widetilde{\eta})x\|}{\|x - x_0\|}}_{\to 0 \text{ ha } x \to x_0}\|z\| \to 0$, ezért $\left(A - \widetilde{A}\right)z = 0, \forall z$

**Definíció**: ha $f$ differenciálható az $x_0$ -ban, akkor az $A \in L(X, Y)$ korlátos lineáris operátort az $f$ függvény $x_0$ beli deriváltjának nevezzük, és $f'(x_0)$ -nak jelöljük.
Megjegyzés: $f'(x_0) \in L(X, Y)$, továbbá erre igaz, hogy $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \eta(x)$, ahol $\lim_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{x - x_0} = 0$.

Speciális eset: $A = f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, ennek megfeleltethető egy $\mathscr{A}$ mátrix: $\mathscr{A}x = Ax : \mathscr{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Állítás: ha $f$ differenciálható $x_0$ -ban, akkor $f$ folytonos $x_0$ -ban.
Bizonyítás: $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \eta(x)$. Belátjuk, hogy $\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$. Egyrészt $\|f'(x_0)(x - x_0)\| \leq \|f'(x_0)\|\|x - x_0\| \to 0$ ha $x \to x_0$. Másrészt $\|\eta(x)\| = \frac{\|\eta(x)\|}{\|x - x_0\|}\|x - x_0\| \to 0$ ha $x \to x_0$. Tehát

$\lim_{x\to\infty}\|f(x)-f(x_0)\| = \lim_{x\to\infty}\|f'(x_0)(x-x_0)+\eta(x)\| \le \lim_{x\to\infty}\|f'(x)(x-x_0)\| + \lim_{x\to\infty}\|\eta(x)\| = 0.$

## A deriválás művelete, műveleti szabályok

11.18

**Tétel**: tfh $f$ és $g$ differenciálható $x_0$ -ban $\Rightarrow f+g$ is, és $(f'+g')(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$. Továbbá tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda f$ is differenciálható $x_0$ -ban és $(\lambda f)'(x_0) = \lambda(f'(x_0))$.

Bizonyítás: mivel $f$ differenciálható $x_0$ -ban $\Rightarrow f$ értelmezve van $B_{r_1}(x_0)$ -n is, ha $r_1$ elég kicsi. Legyen $x \in B_{r_1}(x_0)$! Ekkor $f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)+\eta_1(x)$, ahol $\lim_{x\to x_0}\frac{\eta_1(x)}{\|x-x_0\|} = 0$. Mivel $g$ differenciálható $x_0$ -ban $\Rightarrow g$ értelmezve van az $B_{r_2}(x_0)$ -n is, ha $r_2$ elég kicsi. Legyen $x \in B_{r_2}(x_0)$, ekkor $g(x)-g(x_0) = g'(x_0)(x-x_0)+\eta_2(x)$, ahol $\lim_{x\to x_0}\frac{\eta_2(x)}{\|x-x_0\|} = 0$. Ezekből következik, hogy $r = \min\{r_1, r_2\}$ esetén, $x \in B_r(x_0)$ -re:

$[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)] = f'(x_0)(x-x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\eta_1(x)+\eta_2(x) =$

$= [f'(x_0)+g'(x_0)](x-x_0)+[\eta_1(x)+\eta_2(x)]$. Továbbá mivel $\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)}{\|x-x_0\|} = \underbrace{\frac{\eta_1(x)}{\|x-x_0\|}}_{\to 0 \text{ ha } x\to x_0} + \underbrace{\frac{\eta_2(x)}{\|x-x_0\|}}_{\to 0 \text{ ha } x\to x_0} \to 0$ ha $x \to x_0$,

$\lim_{x\to x_0}\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)}{\|x-x_0\|} = 0.$

**Tétel** (a kompozíció függvény deriválási szabálya): tfh $X, Y, Z$ normált terek, $f: X \rightarrowtail Y$, $g: Y \rightarrowtail Z$, ekkor $(g\circ f): X \rightarrowtail Z$. Tfh $f$ differenciálható $x_0 \in X$ -ban és $g$ differenciálható $y_0 \in Y$ -ban úgy, hogy $y_0 = f(x_0)$. Ekkor $g\circ f$ is differenciálható $x_0$ -ban és $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \in L(X,Z)$.

Bizonyítás: mivel $f$ differenciálható $x_0$ -ban, így $f$ értelmezve van egy $B_r(x_0)$ környezetben. Legyen $x \in B_{r_1}(x_0)$, ekkor $f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)+\eta_1(x)$ ahol $\lim_{x\to x_0}\frac{\eta_1(x)}{\|x-x_0\|} = 0$. Mivel $g$ differenciálható $y_0 = f(x_0)$ -ban, ezért értelmezve van $y_0$ egy $B_{r_2}(y_0)$ környezetében. Legyen $y \in B_{r_2}(y_0)$, ekkor $g(y)-g(y_0) = g'(y_0)\cdot(y-y_0)+\eta_2(y)$ és $\lim_{y\to y_0}\frac{\eta_2(y)}{\|y-y_0\|} = 0$. Mivel $f \in C(x_0) \Rightarrow B_{r_2}(y_0) = B_{r_2}(f(x_0))$ környezethez $\exists B_{\widetilde{r_1}}(x_0): x \in B_{\widetilde{r_1}}(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_{r_2}(f(x_0))$. Legyen $r_{1*} := \min\{r_1, \widetilde{r_1}\}$. $x \in B_{r_{1*}}(x_0)$ esetén $y$ helyébe $f(x)$ -t írhatunk a $g$-re vonatkozó egyenletben

$\Rightarrow g(f(x))-g(f(x_0)) = g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))+\eta_2(f(x)) \Rightarrow (g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0) =$

$= g'(f(x_0))[f'(x_0)(x-x_0)+\eta_1(x)]+\eta_2(f(x)) = g'(f(x_0))[f'(x_0)(x-x_0)] + \underbrace{[g'(f(x_0))\eta_1(x)+\eta_2(f(x))]}_{\eta(x)}$. Azt kellene megmutatni, hogy $\lim_{x\to x_0}\frac{\eta(x)}{\|x-x_0\|} = 0$. Tekintsük először $\eta(x)$ első tagját:

$\frac{\|g'(f(x_0))\eta_1(x)\|}{\|x-x_0\|} \le \frac{\|g'(f(x_0))\|\|\eta_1(x)\|}{\|x-x_0\|} = \|g'(f(x_0))\|\frac{\|\eta_1(x)\|}{\|x-x_0\|} \to 0$, mert az utolsó tag $\to 0$. Tehát már elegendő csak $\frac{\eta_2(f(x))}{\|x-x_0\|} \to 0$ állítást belátni. Ehhez használjuk a következő jelölést: $\varepsilon(y) := \begin{cases} \frac{\|\eta_2(y)\|}{\|y-y_0\|} & \text{ha } y \ne y_0, y \in B_{r_2}(y_0) \\ 0 & \text{ha } y = y_0 \end{cases}$.

Láthatjuk, hogy ekkor $\varepsilon : Y \to \mathbb{R}, \varepsilon \in C(y_0)$. Átrendezve:

$\|\eta_2(y)\| = \varepsilon(y)\|y - y_0\| \quad \forall y \in B_{r_2}(y_0) \Rightarrow \frac{\|\eta_2(f(x))\|}{\|x-x_0\|} = \varepsilon(f(x))\frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|} = \underbrace{\varepsilon(f(x))}_{\to 0}\underbrace{\frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|}}_{\text{bizbe: korlátos}}$, a szorzat $\to 0$, ha

az utolsó tényező korlátos, ugyanis $\varepsilon$ definíciójából következik, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(f(x)) = \varepsilon(f(x_0)) = 0$, mert

$f \in C(x_0), \varepsilon \in C(y_0) \Leftrightarrow \varepsilon \in C(f(x_0))$. A második tényező valóban korlátos, ugyanis

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \eta_1(x) \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \le \|f'(x_0)(x - x_0)\| + \|\eta_1(x)\| \le$

$\le \|f'(x_0)\| \cdot \|x - x_0\| + \|\eta_1(x)\| \Rightarrow \frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|} \le \underbrace{\|f'(x_0)\|}_{\text{rögz}} + \underbrace{\frac{\eta_1(x)}{\|x-x_0\|}}_{\to 0}$.

**Tétel** (a valós függvény inverzének deriválási szabálya): legyen $I$ egy $\mathbb{R}$ -beli nyílt intervallum! Legyen $f : I \to R$ szigorúan monoton függvény és $f \in C(D_f)$. Ha $f$ differenciálható $a \in D_f$ -ban és $f'(a) \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ differenciálható $f(a)$ -ban és $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$.

Bizonyítás: mivel $f$ szigorúan monoton (növő), ezért $f$ injektív, tehát létezik $f^{-1}$. Mivel $D_f = I$ intervallum, ezért $R_f = J$ is intervallum (Bolzano tétel), sőt, nyílt is, mivel $f$ szigorúan monoton. Ekkor $b = f(a)$ -t tekintve $b \in \operatorname{int} D_{f^{-1}} = R_f$. $f^{-1}$ értelmezve van $b$ egy környezetében, ebből véve egy $y$ pontot

$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{\frac{f\left(f^{-1}(y)\right)-f\left(f^{-1}(b)\right)}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}}$. $h_a(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{ha } x \neq a \\ f'(a) & \text{ha } x = a \end{cases}$ Ebből láthatjuk, hogy $h_a \in C(a)$.

Ekkor $\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{h_a\left(f^{-1}(y)\right)}$. $\lim\limits_{y\to b} f^{-1}(y) = a$ mert $f^{-1} \in C\left(R_f\right), f^{-1}(b) = a$. Ha $y \neq b \Rightarrow f^{-1}(y) \neq a$ (mert $f$ szigorúan monoton). Másrészt $h_a \in C(a) \Rightarrow \lim\limits_{y\to b} h_a\left(f^{-1}(y)\right) = h_a(a) = f'(a)$.

**Példák**:

- $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R} = I$, $f$ szigorúan monoton nő, mindenhol deriválható, $f'(x) = e^x$, $R_f = (0,\infty) = J$ $b > 0, b \in J$ esetén $\ln'(b) = \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{e^{\ln b}} = \frac{1}{b}$
- $f(x) = \sin x, I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ez szigorúan monoton nő, differenciálható, $f'(x) = \cos x$. $\arcsin'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

# Differenciálhatóság $\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ -ben

A továbbiakban legyen $X := \mathbb{R}^n, Y := \mathbb{R}^m$. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$. Mit jelent az, hogy $f$ differenciálható egy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban?

Definíció szerint $\exists A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \eta(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\eta(x)}{\|x-x_0\|} = 0, \forall x \in B_r(x_0)$. Tudjuk, hogy

$A$-hoz egyértelműen megfeleltethető egy $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mátrix, melyre $A(x - x_0) = \mathscr{A}(x - x_0)$, így

$f(x) - f(x_0) = \mathscr{A}(x - x_0) + \eta(x)$.

Kérdés: mik a mátrixelemek, vagyis $a_{ij} = ?$ Először legyen $m = 1$, azaz $f:\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$. $f$ differenciálhatósága azt jelenti,

hogy $\mathbb{R} \ni f(x) - f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(x_j - x_{0j}) + \eta(x)$ ahol $\lim_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{\|x - x_0\|} = 0$. Legyen speciel

$x = (x_{0,1}, x_{0,2} \dots x_{0,j-1}, x_j, x_{0,j+1} \dots x_{0,n})$. Ekkor $f(x) - f(x_0) = a_{1j}(x_j - x_{0,j}) + \eta(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{f(x_{0,1}, x_{0,2} \dots x_{0,j-1}, x_j, x_{0,j+1} \dots x_{0,n}) - f(x_{0,1}, x_{0,2} \dots x_{0,j-1}, x_{0,j}, x_{0,j+1} \dots x_{0,n})}{x_j - x_{0,j}} = a_{1j} + \frac{\eta(x)}{x_j - x_0}$, ahol $\left|\frac{\eta(x)}{x_j - x_{0,j}}\right| = \frac{|\eta(x)|}{|x_j - x_{0,j}|} = \frac{|\eta(x)|}{|x - x_0|} \to 0$.

Ezért a függvény $j$-edik változó szerinti parciális deriváltja $x_0$ -ban $\partial_j f(y_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = a_{1j}$. Tehát $a_{1j} = \partial_j f(x_0)$. Ez volt az $m = 1$ eset. Általánosan, $f:\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$, $f(x) \in \mathbb{R}^m$ esetre mi lesz? $f(x) = (f_1(x), f_2(x) \dots f_m(x))$. $f_k$ -t nevezhetjük a függvény koordináta-függvényének. $f$ differenciálhatósága azt jelenti, hogy

$f(x) - f(x_0) = \mathscr{A}(x - x_0) + \eta(x)$, $\lim_{x \to x_0} \frac{|\eta(x)|}{|x - x_0|} \to 0$, $\quad \eta = (\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n)$. Ugyanez koordinátánként kiírva:

$f_k(x) - f_k(x_0) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x_j - x_{0,j}) + \eta_k(x)$, az előbbiek szerint $a_{kj} = \partial_j f_k(x_0)$. Tehát a mátrixot ilyen alakban írhatjuk:

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \cdots & \partial_n f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \cdots & \partial_n f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \partial_2 f_m(x_0) & \cdots & \partial_n f_m(x_0) \end{pmatrix}.$$

**Tétel**: ha $f = (f_1, f_2 \dots f_n):\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható egy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor $\forall k$ -ra $f_k$ parciálisan differenciálható minden változójában, továbbá $f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a fenti mátrixszal adható meg. Az $\mathscr{A}$ mátrixelemei a koordináta függvények első parciális deriváltjai.

Megjegyzés: ha $f:\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ parciálisan differenciálható $x_0$ -ban minden változója szerint, abból nem következik, hogy $f$ differenciálható is.

## Egyváltozós kitérés

### Lokális növekedés, fogyás – lokális szélsőérték

**Definíció**: legyen $f:\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} D_f$! Azt mondjuk, hogy

- $f$ lokálisan nő $a$-ban, ha $\exists B_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$ környezet, hogy $a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) \le f(a)$ és

$a < x < a + \delta \Rightarrow f(a) \leq f(x)$

- $f$ lokálisan szigorúan nő $a$-ban, ha $\exists B_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$ környezet, hogy $a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$ és $a < x < a + \delta \Rightarrow f(a) < f(x)$ (A különbség a két függvényérték relációjában van.)
- $f$ lokálisan csökken $a$-ban, ha $\exists B_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$ környezet, hogy $a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$ és $a < x < a + \delta \Rightarrow f(a) \geq f(x)$
- $f$ lokálisan szigorúan csökken $a$-ban, ha $\exists B_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$ környezet, hogy $a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > f(a)$ és $a < x < a + \delta \Rightarrow f(a) > f(x)$

**Tétel**: legyen $f$ differenciálható $a$ pontban! Ha $f$ függvény $a$-ban lokálisan nő $\Rightarrow f'(a) \geq 0$, és ha $f'(a) > 0 \Rightarrow f$ $a$-ban szigorúan lokálisan nő, illetve ha lokálisan fogy $\Rightarrow f'(a) \leq 0$ és ha $f'(a) < 0 \Rightarrow f$ $a$-ban szigorúan lokálisan fogy.

Bizonyítás: a) tfh $f$ függvény $a$-ban lokálisan nő és $f$ differenciálható $a$-ban. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$. Mivel $f$ függvény $a$-ban lokálisan nő $\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ ha $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$, azaz $f'(a) \geq 0$.

b) tfh $f'(a) > 0 \Rightarrow f$ értelmezve $a$ egy környezetében. Mivel $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) > 0$, ezért

$\exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ tehát $f$ függvény $a$-ban szigorúan lokálisan nő.

Megjegyzés: fordítva nem igaz, tehát ha $f$ szigorúan lokálisan nő $\not\Rightarrow f' > 0$.

**Példa**: $f(x) = x^3$, ekkor $f'(x) = 3x^2$. Ez 0-ban szigorúan lokálisan nő, de $f'(0) = 0$.

**Definíció**: legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} D_f$. Azt mondjuk, hogy $f$-nek $a$-ban

- lokális minimuma van, ha $\exists B_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) : x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \geq f(a)$
- szigorú lokális minimuma van, ha $x \in B_\delta(a) \backslash \{a\} \Rightarrow f(x) > f(a)$.

**Tétel**: ha $f$ differenciálható $a$-ban és $a$-ban lokális szélsőértéke van $\Rightarrow f'(a) = 0$.

Bizonyítás: indirekt, $f'(a) \neq 0$. Ha pl $f'(a) > 0 \Rightarrow a$ -ban szigorúan lokálisan nő, vagy ha $f'(a) < 0 \Rightarrow a$ -ban szigorúan lokálisan fogy.

Megjegyzés: $f'(a) = 0 \not\Rightarrow f$ -nek $a$-ban lokális szélsőértéke van. Pl $f(x) = x^3, a = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$, pedig $f$ 0-ban szigorúan lokálisan nő.

## Monoton növekedés és fogyás 11.25

**Definíció**: azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy $I$ intervallumon

- monoton nő, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ esetén $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- monoton csökken, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ esetén $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- szigorú monoton nő, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ esetén $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- szigorú monoton csökken, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ esetén $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Rolle **Tétel**: tfh $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $(a,b)$ -n differenciálható, $f(a) = f(b)$. Ekkor $\exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$.

Bizonyítás: a) ha $f(x) = f(a) = f(b)$, $\forall x$, akkor $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

b) ha létezik $x \in (a, b)$: $f(x) \neq f(a) = f(b)$, pl $f(x) < f(a)$, akkor mivel $f \in C[a, b] \Rightarrow [a, b]$ sorozatkompakt halmaz $\mathbb{R}$ -ben (ami korlátos és zárt) ezért $R_f$ sorozatkompakt $\Rightarrow$ korlátos és zárt. $\exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = \inf f = \min f$. Mivel $\exists f(x): f(x) < f(a)$, ezért $\xi \in (a, b)$. Ezért *f*-nek $\xi$-ben lokális minimuma van. *f* differenciálható $\xi$-ben, tehát $f'(\xi) = 0$.

Lagrange-féle középérték **Tétel**: tfh $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C(D_f)$ és *f* differenciálható $(a, b)$ -n. Ekkor $\exists \xi \in (a, b): f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Bizonyítás: visszavezetjük a Rolle tételre. Értelmezzük a $g$ függvényt a következő módon: $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Ekkor $g \in C[a, b]$ és $g$ differenciálható $(a, b)$ -n. $g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a)$, de a definícióból látható, hogy $g(a) = f(a) \Rightarrow g(b) = g(a)$. Alkalmazzuk Rolle tételét! $\exists \xi: g'(\xi) = 0$, azaz $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

**Tétel**: legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum! $f: I \to \mathbb{R}$, $f \in C(I)$, továbbá *f* differenciálható $\operatorname{int} I$ -ben. Ekkor *f* monoton nő az $I$-n $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in \operatorname{int} I$.

Bizonyítás: a) ha *f* monoton nő $\Rightarrow \forall x \in \operatorname{int} I$ -re $f'(x) \geq 0$

b) tfh $f'(x) \geq 0 \forall x \in \operatorname{int} I$. Legyen $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$! Azt kellene belátni, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Alkalmazzuk a Lagrange-féle középérték tételt! $[x_1, x_2] \subset I \Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2) \subset I: f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. A feltétel szerint

$f'(\xi) \geq 0, x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.

Megjegyzés: azt hihetnénk, hogy *f* szigorúan monoton növekedése $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \forall x \in \operatorname{int} D_f$, pedig nem.

**Példa**: $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Ekkor *f* szigorúan monoton nő, de $f'(0) = 0$.

**Tétel**: legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f: I \to \mathbb{R}$, $f \in C(I)$ és *f* differenciálható $\operatorname{int} I$ -ben! Ekkor *f* szigorúan monoton nő $I$-n $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ és $I$-nek nincs olyan $J$ részintervalluma, ahol $f'(x_j) = 0, \forall x_j \in J$

Bizonyítás: $\Rightarrow$ irányban: tfh *f* szigorúan monoton nő az $I$-n $\Rightarrow$ monoton nő $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in \operatorname{int} I$. Indirekt tfh $\exists (c, d) \subset I: f'(x) = 0 \forall x \in (c, d) \Rightarrow$ Lagrange-féle középérték tétel felhasználásából $\Rightarrow f =$ állandó $(c, d)$ -n. Ez ellentmond annak, hogy *f* szigorúan monoton nő.

$\Leftarrow$ irányban: tfh $f'(x) \geq 0 \forall x \in \operatorname{int} I$ és $\nexists J \subset I$ részintervallum, ahol $f'(x_j) = 0 \forall x_j \in J$. Mivel $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ monoton nő. Ha *f* nem szigorúan monoton növő lenne, akkor $\exists x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ (mivel *f* monoton nő) $f(x_1) = f(x) = f(x_2) \forall x \in (x_1, x_2) \Rightarrow f'(x) = 0$, ha $x \in (x_1, x_2)$.

**Tétel**: tfh $f: \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$, és ennek az összes elsőrendű parciális deriváltja létezik $x_0 \in \mathbb{R}^n$ valamely teljes környezetében, és ezek folytonosak $x_0$ -ban. Ekkor *f* differenciálható $x_0$ -ban.

Bizonyítás: a feltétel szerint egy $x_0$ bizonyos környezetében fekvő $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$ pontra $f(x) - f(x_0) =$

$= [f(x_1, x_2 \ldots x_n) - f(x_{1,0}, x_2 \ldots x_n)] + [f(x_{1,0}, x_2 \ldots x_n) - f(x_{1,0}, x_{2,0} \ldots x_n)] + \ldots + [f(x_{1,0}, x_{2,0} \ldots x_{n-1,0}, x_n) - f(x_{1,0} \ldots x_{n,0})$

, alkalmasan választott $\xi_i \in (x_i, x_{i,0})$ segítségével folytatva (Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával):

$f(x) - f(x_0) =$

$= \partial_1 f(\xi_1, x_2 \ldots x_n)(x_1 - x_{1,0}) + \partial_2 f(x_{1,0}, \xi_2, x_3 \ldots x_n)(x_2 - x_{2,0}) + \ldots + \partial_n f(x_{1,0}, x_{2,0} \ldots x_{n-1,0}, \xi_n)(x_n - x_{n,0}) =$

$= \partial_1 f(x_0)(x_1 - x_{1,0}) + \partial_2 f(x_0)(x_2 - x_{2,0}) + \ldots + \partial_n f(x_0)(x_n - x_{n,0}) + \underbrace{[\partial_1 f(\xi_1, x_2 \ldots x_n) - \partial_1 f(x_0)](x_1 - x_{1,0})}_{\eta_1(x)} +$

$+\underbrace{[\partial_2 f(x_{1,0}, \xi_2, x_3 \ldots x_n) - \partial_2 f(x_0)](x_2 - x_{2,0})}_{\eta_2(x)} + \ldots + \underbrace{[\partial_n f(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{n-1,0} \xi_n) - \partial_n f(x_0)](x_n - x_{n,0})}_{\eta_n(x)}$. Azt kellene

belátni, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{|x - x_0|} = 0$ ahol $\eta(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i(x)$. Hasonló egyenlőség érvényes $\eta(x)$ minden tagjára, pl. az 1-re:

$\frac{|[\partial_1 f(\xi_1, x_2 \ldots x_n) - \partial_1 f(x_0)](x_1 - x_{1,0})|}{|x - x_0|} \le \underbrace{[\partial_1 f(\xi_1, x_2 \ldots x_n) - \partial_1 f(x_0)]}_{x \to x_0 \text{ és } \partial_1 f \in C(x_0) \Rightarrow \text{ ez } \to 0} \underbrace{\frac{|x_1 - x_{1,0}|}{|x - x_0|}}_{\le 1}$

Megjegyzés: a tétel feltétele elegendő, de nem szükséges *f* differenciálhatóságához.

**Tétel**: legyen $f: \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m (m > 1)$. $f = (f_1, f_2 \ldots f_n)$. Az, hogy *f* differenciálható $x_0$ -ben $\Leftrightarrow$ $\forall j$ -re $f_j$ differenciálható $x_0$ -ban, $f_j: \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$. Következmény: ha $\partial_k f_j$ létezik $x_0$ egy környezetében és folytonos $x_0$ -ban $\forall j, k$ -ra, akkor *f* differenciálható $x_0$ -ban.

Bizonyítás: *f* differenciálható $x_0$ -ban $\Rightarrow$ $f(x) - f(x_0) = \mathscr{A}(x - x_0) + \eta(x)$ ahol $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{|x - x_0|} = 0$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots \eta_n)$.

„Koordinátás” alakban így is írhattuk volna: $f_j(x) - f_j(x_0) = \mathscr{A}_j(x - x_0) + \eta_j(x)$ $\forall j$ -re, ahol

$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ illetve $\mathscr{A}_k = (a_{k1}, a_{k2} \ldots a_{kn})$. Ez pontosan azt jelenti, hogy $f_j$ koordinátafüggvény differenciálható $x_0$ -ban.

**Definíció**: legyen *X, Y* normált terek, $f: X \rightarrowtail Y, \Omega \subset X$ tartomány (vagyis nyílt és összefüggő). Ha az *f* az *Ω* minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy *f* differenciálható *Ω*-n.

**Definíció**: legyen $f: \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}$! Ha $\forall j$ -re $\exists\, \partial_j f(x)$, $\forall x \in \Omega$, akkor *f* egyszer parciálisan differenciálható *Ω*-ban. Ha $\partial_j f$ folytonos is *Ω* minden pontjában $\forall j$ -re, akkor *f* egyszer folytonosan differenciálható *Ω*-n, $f' \in C(\Omega)$.

# Magasabbrendű differenciálhatóság

**Definíció**: legyenek *X, Y* normált terek, $f: X \rightarrowtail Y$. Tekintsük az összes $x \in X$ pontot, melyben *f* differenciálható! Azt a függvényt, amely az ilyen $x \in X$ ponthoz az $f'(x) \in L(X, Y)$ deriváltat rendeli, $f$ (első) derivált függvényének nevezzük, jele $f'$ .

**Definíció**: legyenek $X$, $Y$ normált terek, $f: X \rightarrowtail Y$. Ha $f'$ differenciálható $x_0$ -ban (tehát értelmezve is van $x_0$ egy környezetében), akkor azt mondjuk, hogy $f$ kétszer differenciálható $x_0$ -ban és definíció szerint $f''(x_0) := (f')'(x_0)$.
Megjegyzés: $f''(x_0): X \rightarrowtail L(X, Y)$, $f''(x_0)$ lineáris folytonos operátor, így $f''(x_0) \in L(X, L(X, Y))$.

**Definíció**: ha $f'$ függvény értelmezve van és folytonos valamely $\Omega \subset X$ tartományon, akkor azt mondjuk, hogy $f$ egyszer folytonosan differenciálható $\Omega$-n.
Megjegyzés: ez a definíció $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$ esetén ekvivalens a korábbi definícióval.

**Definíció**: ha $f''$ függvény értelmezve van és folytonos valamely $\Omega \subset X$ tartományon, akkor azt mondjuk, hogy $f$ kétszer folytonosan differenciálható $\Omega$-n.

**Definíció**: legyen $f: \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ képező függvény! Ha valamely $j$-re a $\partial_j f$ függvény a $k$-adik változója szerint parciálisan differenciálható egy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pontjában, akkor $\partial_k \partial_j f(x_0) := \left[\partial_k \left(\partial_j f\right)\right] x_0$. Hasonlóan értelmezhető $f$ függvény magasabb rendű parciális deriváltjaira.
Kérdés: igaz-e, hogy $\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f$, $\forall j, k$ -ra? Általában nem (de azért a fizikában előforduló példákra általában igaz, mint ahogy látni is fogjuk).
Pl: $f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)} & \text{ha } (x, y) \neq (0{,}0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0{,}0) \end{cases}$ . Ekkor $\partial_1 \partial_2 f(0{,}0) = 0$ de $\partial_2 \partial_1 f(0{,}0) = 1$. Az eredmények nem triviálisak, segítségképp: $\partial_1 f = \begin{cases} \dfrac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0{,}0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0{,}0) \end{cases}$ illetve $\partial_2 f = \begin{cases} \dfrac{3x^3y^2 + xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0{,}0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0{,}0) \end{cases}$ .

Young **Tétel** $\mathbb{R}^2$ -ből $\mathbb{R}$ -be képező függvényekre: legyen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$, melyre $(x_0, y_0) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$ pont környezetében létezik $\partial_1 \partial_2 f$ és $\partial_2 \partial_1 f$ is és folytonosak $(x_0, y_0)$ pontban. Ekkor $\partial_1 \partial_2 f(x_0, y_0) = \partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0)$.
Bizonyítás: $\left.\begin{aligned} F(x) &:= f(x, y) - f(x, y_0) \\ G(y) &:= f(x, y) - f(x_0, y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(x) - F(x_0) = G(y) - G(y_0)$. Alkalmazzuk először a Lagrange középérték-tételt $F$ és $G$ függvényekre! $\exists \xi$ az $x, x_0$ között, hogy
$F(x) - F(x_0) = F'(\xi)(x - x_0) = [\partial_1 f(\xi, y) - \partial_1 f(\xi, y_0)](x - x_0)$ és $\exists \eta$ az $y, y_0$ között, hogy
$G(y) - G(y_0) = G'(\eta)(y - y_0) = [\partial_2 f(x, \eta) - \partial_2 f(x_0, \eta)](y - y_0)$, ezért a fenti egyenlőség miatt
$[\partial_1 f(\xi, y) - \partial_1 f(\xi, y_0)](x - x_0) = [\partial_2 f(x, \eta) - \partial_2 f(x_0, \eta)](y - y_0)$. Még 2x alkalmazzuk a Lagrange-féle középérték tételt: $y \mapsto \partial_1 f(\xi, y)$ függvényre és $x \mapsto \partial_2 f(x, \eta)$ függvényre.

$\exists \tilde{\xi}, \tilde{\eta}: \partial_2 (\partial_1 f)(\xi, \tilde{\eta})(y - y_0)(x - x_0) = \partial_1 (\partial_2 f)\big(\tilde{\xi}, \eta\big)(x - x_0)(y - y_0)$, ahol $\tilde{\xi}$ egy $x, x_0$ között, $\tilde{\eta}$ pedig egy $y, y_0$ között van. $\partial_2 (\partial_1 f)(\xi, \tilde{\eta}) = \partial_1 (\partial_2 f)\big(\tilde{\xi}, \eta\big)$. $(x, y) \to (x_0, y_0)$ esetén, mivel $\partial_1 \partial_2 f$ és $\partial_2 \partial_1 f$ folytonosak $(x_0, y_0)$ -ban, $\Rightarrow \partial_2 (\partial_1 f)(x_0, y_0) = \partial_1 (\partial_2 f)(x_0, y_0)$.

Következmény: ha $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ -be képez és az $f$-nek az összes második parciális deriváltja létezik $x_0$ egy környezetében és folytonos $x_0$ -ban $\Rightarrow \partial_j \partial_k f(x_0) = \partial_k \partial_j f(x_0)$.

**Definíció**: azt mondjuk, hogy egy $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $k$-szor ( $k \geq 1$ ) folytonosan differenciálható $\Omega$-n, ha 12.02
minden legfeljebb $k$-ad rendű parciális derivált létezik és folytonos az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon.

**Tétel**: ha $f: \Omega \to \mathbb{R}$ függvény $k$-szor folytonosan differenciálható, akkor $f$ minden legfeljebb $k$-adrendű parciális deriváltjában a deriválások sorrendje tetszőlegesen felcserélhető.

Jelölés: feltéve, hogy $f$ függvény $k$-szor folytonosan differenciálható, a továbbiakban használandó a következő jelölés a legfeljebb $k$-adrendű parciális deriváltakra: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n), \alpha_j \geq 0, \alpha_j \in \mathbb{N}$ esetén $\partial^\alpha f: = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha 2} ... \partial_n^{\alpha n} f$. A deriválás rendje $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leq k$.

Megjegyzés: ha $f: \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény $k$-szor folytonosan differenciálható $\Omega$-n $\Rightarrow f$ minden legfeljebb $(k-1)$ -edrendű parciális deriváltja differenciálható.

# Bilineáris operátorok

Azért kellenek, mert $f''(x_0) \in L(X, L(X, Y))$, és ezt összefüggésbe akarjuk hozni az $X \times X$-ből $Y$-ba képező operátorokkal.

**Definíció**: legyenek $X$, $Y$ vektorterek, ekkor $X \times Y: \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ és $X \times Y$-n értelmezzük az összeadást és a valós számmal való szorzást: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$.

Állítás: az $X \times Y$ a fenti tulajdonságokkal vektorteret alkot.

**Definíció**: legyenek $X$, $Y$ normált terek. Ekkor az $X$, $Y$ vektortérben vezessük be a következő normát:
$\|(x, y)\|: = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$!
(Megj: más normát is lehetne definiálni, pl $\|x, y\|: = \|x\| + \|y\|$ ).

Állítás: $X \times Y$ a fenti normával normált tér.

**Definíció**: legyenek $X$, $Y$, $Z$ normált terek, tekintsük az $X \times Y$ vektorteret! Egy $\widetilde{A}: X \times Y \to Z$ operátort bilineárisnak nevezünk, ha minden rögzített $\forall x \in X$ esetén $y \mapsto \widetilde{A}(x,y)$, $y \in Y$ lineáris és minden rögzített $y \in Y$ esetén $x \mapsto \widetilde{A}(x,y)$, $x \in X$ lineáris.

Megjegyzés: az $X \times Y$-ből $Z$-be képező bilineáris operátorok vektorteret alkotnak a következő művelettel: $\underbrace{\left(\widetilde{A}+\widetilde{B}\right)}_{\in L(X\times Y,Z)} \underbrace{(x,y)}_{\in X\times Y} = \underbrace{\widetilde{A}(x,y)}_{\in Z} + \underbrace{\widetilde{B}(x,y)}_{\in Z}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\left(\lambda\widetilde{A}\right)(x,y) = \lambda \cdot \widetilde{A}(x,y) \in Z$.

Kérdés: legyenek $X$, $Y$, $Z$ normált terek (tehát vektorterek is). Továbbá legyen $\widetilde{A}: X \times Y \to Z$ bilineáris operátor. Következik-e ebből, hogy $\widetilde{A}$ folytonos? Általában nem.

**Tétel**: az $\widetilde{A}: X \times Y \rightarrowtail Z$ bilineáris operátor folytonos $\Leftrightarrow \exists c \geq 0: \|\widetilde{A}(x,y)\| \leq c\|x\| \cdot \|y\|$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ -ra.

Megjegyzés: ha az utóbbi teljesül, akkor $\widetilde{A}$ bilineáris operátort korlátosnak nevezzük.

Bizonyítás $\Leftarrow$ irányban: tfh $\widetilde{A}$ korlátos. Belátjuk, hogy $\widetilde{A}$ folytonos $(x_0, y_0) \in X \times Y$ rögzített elemnél.

$$\|\widetilde{A}(x,y) - \widetilde{A}(x_0,y_0)\| = \left\| \left[\widetilde{A}(x,y) - \widetilde{A}(x_0,y)\right] + \left[\widetilde{A}(x_0,y) - \widetilde{A}(x_0,y_0)\right] \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \left[\widetilde{A}(x,y) - \widetilde{A}(x_0,y)\right] + \left[\widetilde{A}(x_0,y) - \widetilde{A}(x_0,y_0)\right] \right\| \leq \|\widetilde{A}(x-x_0,y)\| + \|\widetilde{A}(x_0,y-y_0)\| \leq c\|x-x_0\|\|y\| + c\|x_0\|\|y-y_0\|$$

ezért nyílván

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \|(x,y)-(x_0,y_0)\| = \sqrt{\|x-x_0\|^2 + \|y-y_0\|^2} < \delta \Rightarrow c\|x-x_0\| \cdot \|y\| + c\|x_0\| \cdot \|y-y_0\| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ irányban: tfh folytonos, de nem korlátos (indirekt): $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X, y_n \in Y: \|\widetilde{A}(x_n,y_n)\| > n^2\|x_n\| \cdot \|y_n\|$.

Legyen $\widetilde{x_n} := \frac{x_n}{n \cdot \|x_n\|} \to 0$ és $\widetilde{y_n} := \frac{y_n}{n \cdot \|y_n\|} \to 0$. Ebből már látszik az állítás.

**Definíció**: legyenek $X$, $Y$, $Z$ normált terek, $\widetilde{A}: X \times Y \rightarrowtail Z$ korlátos, folytonos bilineáris operátor. Ekkor $\widetilde{A}$ normáját így értelmezzük: $\|\widetilde{A}\| := \sup\left\{\|\widetilde{A}(x,y)\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1\right\}$.

Állítás: $\|\widetilde{A}\| = \min\left\{c \|\widetilde{A}(x,y)\| \leq c\|x\| \cdot \|y\|, \forall (x,y) \in X \times Y\right\}$. (A bizonyítása hasonló lineáris korlátos operátorok esetéhez.)

**Tétel**: tekintsük az $X \times Y \to Z$ képező korlátos bilineáris operátorokat az előbb bevezetett összeadással és skalárral való szorzással, és vegyük hozzá a fenti normát. Ekkor egy normált teret kapunk.

Észrevétel: legyenek $X$, $Y$, $Z$ normált terek, $A \in L(X, L(Y,Z))$. Értelmezzük az $\widetilde{A}: X \times Y \to Z$ operátort: $\widetilde{A}(x,y) := \underbrace{(Ax)y}_{\in Z}$. Ekkor $\widetilde{A}: X \times Y \to Z$ korlátos bilineáris operátor.

Bizonyítás: a) a fentiek szerint $\widetilde{A}: X \times Y \to Z$

b) belátjuk először, hogy $\widetilde{A}$ bilineáris operátor

$$\widetilde{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = [A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)]y = (\lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2)y = \lambda_1[(Ax_1)y] + \lambda_2[(Ax_2)y] = \lambda_1\widetilde{A}(x_1,y) + \lambda_2\widetilde{A}(x_2,y)$$

$$\widetilde{A}(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = (Ax)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1(Ax)y_1 + \lambda_2(Ax)y_2 = \lambda_1\widetilde{A}(x,y_1) + \lambda_2\widetilde{A}(x,y_2).$$

c) belátjuk, hogy $\widetilde{A}$ korlátos: $\|\widetilde{A}(x,y)\| = \|(Ax)y\| \leq \|Ax\| \cdot \|y\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \Rightarrow \widetilde{A}$ korlátos, továbbá $\|\widetilde{A}\| \leq \|A\|$.

**Tétel**: legyenek $X, Y, Z$ normált terek, $A \in L(X, L(Y, Z))$. Ekkor az $\widetilde{A}(x, y) := (Ax)y, x \in X, y \in Y$ képlettel értelmezett $\widetilde{A}: X \times Y \to Z$ bilineáris operátor. Fordítva: minden $\widetilde{A}: X \times Y \to Z$ bilineáris operátort ilyen alakú: $\exists! A: L(X, L(Y, Z)): \widetilde{A}(x, y) = (Ax)y$.

Bizonyítás: az első állítást beláttuk. Fordítva: tfh $\widetilde{A}: X \times Y \to Z$ korlátos bilineáris operátor. Tekintsük tetszőleges, rögzített $x \in X$ esetén a következő $A(x)$ operátort: $y \mapsto \widetilde{A}(x, y)$. Ez egyrészt lineáris, másrészt korlátos, hiszen a feltétel szerint $\widetilde{A}$ korlátos:

$\|[A(x)](y)\| = \|\widetilde{A}(x, y)\| = \left\| \|x\| \cdot \|y\| \cdot \widetilde{A}\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \le \|\widetilde{A}\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| = \left(\|\widetilde{A}\| \cdot \|x\|\right)\|y\| \Rightarrow$ a fenti operátor korlátos operátor és normája $\le \|\widetilde{A}\| \cdot \|x\|$. Jelölje $A(x)$ ezt az $L(Y, Z)$ -beli operátort $\Rightarrow \widetilde{A}(x, y) = (A(x))y$. Nem nehéz belátni, hogy $A(x)$ $x$-től lineárisan függ. $A$ korlátos is, hisz $\|A(x)\| \le \|\widetilde{A}\| \cdot \|x\|, \forall x \in X \Rightarrow A$ korlátos is, sőt $\|A\| \le \|\widetilde{A}\| \Rightarrow \|\widetilde{A}\| = \|A\|$. (lásd az előbbi tételt)

Megjegyzés: $\widetilde{A}(x, y) = (Ax)y$ képlet lineáris normatartó leképezést definiál a bilineáris operátorok és $L(X, L(Y, Z))$ között.

# Multilineáris leképezések

**Definíció**: legyenek $X_1, X_2 \ldots X_n, Z$ vektorterek. Egy $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Z$ leképezést multilineárisnak nevezünk, ha minden koordinátájában lineáris (midőn a többit rögzítjük).

**Definíció**: legyenek $X_1, X_2 \ldots X_n, Z$ normált terek! Egy $\widetilde{A}: X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Z$ multilineáris leképezés korlátos $\exists c \ge 0: \|\widetilde{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \le c \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\| \forall x_j \in X_j$.

**Tétel:** $\widetilde{A}$ folytonos $\Leftrightarrow \widetilde{A}$ korlátos.

**Tétel**: egy $\widetilde{A}$ multilineáris folytonos operátor általános alakja $\widetilde{A}(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) = (((Ax_1)x_2)x_3 \ldots x_n), A \in L(X_1, L(X_2 \ldots L(X_n, Z)))$.

## Alkalmazás a magasabbrendű deriváltak értelmezésére

Legyenek $X$, $Y$ normált terek, $f: X \rightarrowtail Y$. Ha $f$ differenciálható $x_0 \in X$ -ben, akkor $f'(x_0) \in L(X, Y)$. $f'$ függvény $X$-ből $L(X, Y)$ -ba képező függvény. Ezért $f''(x_0) = (f')'(x_0) \in L(X, L(X, Y))$. Az $f''(x_0) \in L(X, L(X, Y))$ -beli operátornak a fentiek szerint egyértelmű módon megfelel egy $X \times X \to Y$ bilineáris folytonos operátor: $A := f''(a) \in L(X, L(X, Y)), \widetilde{A}(x_1, x_2) := (Ax_1)x_2 = ((f''(a))x_1)x_2, (x_1, x_2) \in X \times X$.

Speciális eset: $X := \mathbb{R}^n, Y := \mathbb{R}$. Ekkor $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \ni f'(a) \leftrightarrow (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \ldots, \partial_n f(a)) \in \mathbb{R}^n$ (a $\leftrightarrow$ jel a megfeleltethetőséget jelenti). $f': \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Ez úgy is felfogható, hogy $f': \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. $f''(a) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$

tekinthető $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilineáris operátornak, de tekinthető $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ -beli operátornak is, ennek megfelel egy

$n\times n$-es mátrix. $f' = (\partial_1 f, \partial_2 f, ..., \partial_n f)$, $f''(a) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(a) & \partial_2 \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n \partial_1 f(a) \\ \partial_1 \partial_2 f(a) & \partial_2^2 f(a) & \cdots & \partial_n \partial_2 f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \partial_n f(a) & \partial_2 \partial_n f(a) & \cdots & \partial_n^2 f(a) \end{pmatrix} = \mathscr{A}.$

$[f''(a)](x_1, x_2) = \langle \mathscr{A} x_1, x_2 \rangle = \sum_{j=1}^{n} \left[ \sum_{k=1}^{n} \partial_j \partial_k f(a) x_{1k} \right] x_{2j}.$

Speciális eset: $X := \mathbb{R}$, $Y$ tetszőleges normált tér, $f : X \to Y$, $L(\mathbb{R}, Y) \ni f'(a) \leftrightarrow y \in Y$ (a nyíl a megfeleltethetőséget jelenti) a következő képlettel: $\mathbb{R} \ni t \mapsto yt \in Y$, $\mathbb{R}$ -ből $Y$-ba képező lineáris operátor. Ekkor $f'(a)$ azonosítható $y \in Y$ elemmel.

Magyarázat: ebben az esetben az $Y \ni f'(a) \leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $f''(a) \Leftrightarrow b \in Y$, ugyanis $f'$ is tekinthető $\mathbb{R} \to Y$ függvénynek, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $[f''(a)](x_1, x_2) = [f''(a)x_1]x_2 = (bx_1)x_2$.

**A Lagrange középértéktétel többváltozós függvényekre**

Legyen $X$ normált tér, $Y := \mathbb{R}$.

**Tétel**: legyen $a, b \in X, L(a,b) := \{a + t(b-a) : t \in [0,1]\}$. Tfh $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos $L(a,b)$ -n és differenciálható $\operatorname{int}(L(a,b))$. Ekkor $\exists \xi \in \operatorname{int}(L(a,b)) : \underbrace{f(b)}_{\in Y} - \underbrace{f(a)}_{\in Y} = \overbrace{\underbrace{f'(\xi)}_{\in L(X,Y)} \underbrace{(b-a)}_{\in X}}^{\in Y}.$

Bizonyítás: visszavezetjük az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre. $\phi(t) := a + t(b-a), t \in [0,1]$. Ekkor $\phi : [0,1] \to X$, $\phi \in C(0,1)$ és itt differenciálható is. $\phi'(t) = (b-a) \in X$, $g(t) = f(\phi(t)) = (f \circ \phi)(t), t \in [0,1]$, ekkor $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Mivel $f \in C(L(a,b)) \Rightarrow f \circ \phi \in C[0,1]$, továbbá $f \circ \phi$ differenciálható $(0,1)$ -n, $g'(t) = (f \circ \phi)'(t) = f'(\phi(t))\phi'(t) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g$ függvényre alkalmazzuk a Lagrange-féle középérték-tételt: $\exists \tau \in (0,1) : g(1) - g(0) = g'(\tau)(1-0)$, $g(1) = f(\phi(1)) = f(b)$, $g(0) = f(a)$, $g'(\tau) = f'(\phi(\tau))\phi'(\tau) = f'(\phi(\tau))(b-a)$. $\xi := \phi(\tau) = a + \tau(b-a)$.

Kérdés: mi a helyzet akkor, ha $Y \neq \mathbb{R}$. Egyszerű példa: $X := \mathbb{R}$, $Y := \mathbb{R}^2$. Ebben az esetben a fenti állítás általában nem igaz. $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2$, $f_1(t) := \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, $f_2(t) := \cos t$. Ekkor $f(0) = f(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f'(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\tau \\ -\sin\tau \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(2\pi) - f(0) = f'(\tau) 2\pi \neq 0$ ( $0 = a$, $2\pi = b$ ).

**Tétel**: legyenek $X$, $Y$ normált terek, $f : X \rightarrowtail Y$, $a, b \in X$, $f \in C[L(a,b)]$ és $f$ differenciálható $\operatorname{int}(L(a,b))$. Ekkor

$\|f(b)f(a)\| \leq \sup\limits_{\xi \in L(a,b)} \|f'(\xi)(b-a)\|$. Ez a Lagrange egyenlőtlenség.

## Alkalmazás

12.09

Állítás: legyenek $X$, $Y$ normált terek, $\Omega \subset X$ tartomány (azaz nyílt és összefüggő) $\Leftrightarrow$ $\Omega$ nyílt és bármely két pontja összeköthető egy $\Omega$-ban haladó törött vonallal. Tfh $f: \Omega \to Y$ és $f$ differenciálható $\Omega$ minden pontjában és $f'(x) = 0, \forall x \in \Omega \Rightarrow f$ állandó.

Bizonyítás: legyen $x_1 \in \Omega, x_2 \in \Omega$ tetszőleges. Belátjuk, hogy $f(x_1) = f(x_2) \in Y$. Kössük össze az $x_1$ és $x_2$ pontokat egy $\Omega$ -ban haladó törött vonallal! A töréspontok legyenek $x_1, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, x_2$. Először alkalmazzuk a Lagrange-egyenlőtlenséget $L(x_1, \xi_1)$ -re! $\|f(\xi_1) - f(x_1)\| \leq \sup\limits_{\eta_1 \in L(x_1, \xi_1)} \|f'(\eta_1)(\xi_1 - x_1)\| = 0 \Rightarrow f(\xi_1) = f(x_1)$.

Alkalmazva $L(\xi_1, \xi_2)$ -re, $L(\xi_2, \xi_3)$ -ra,…, $L(\xi_k, x_2)$ -re, kapjuk, hogy
$f(\xi_1) = f(\xi_2), f(\xi_2) = f(\xi_3), ..., f(\xi_k) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

## Függvénysorok és sorozatok integrálása és deriválása

Legyenek $f_k: [a,b] \to \mathbb{R}$, egyszerűség kedvéért folytonos függvények, $k \in \mathbb{N}$. Tfh $\forall x \in [a,b]$ esetén $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$. Ekkor mondtuk, hogy $(f_k)$ függvény sorozat pontonként tart egy $f$ függvényhez.

Kérdés: ebből következik-e, hogy $\lim\limits_{k \to \infty} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx$? Általában nem. Pl.:

$$f_k(x) := \begin{cases} x/(1/2k) \text{ ha } 0 \leq x \leq 1/2k \\ -x/(1/2k) + 2k \text{ ha } 1/2k < x \leq 1/k \\ 0 \text{ egyébként} \end{cases}$$

**Tétel**: egy $f_k: [a,b] \to \mathbb{R}, f_k \in C[a,b]$ és $(f_k) \to f$ egyenletesen ( $\Rightarrow f \in C[a,b]$ ). Ekkor $\lim\limits_{k \to \infty} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Bizonyítás: $\lim\limits_{k \to \infty} \left| \int_a^b f_k(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = 0$ ezt kellene belátni.

$\left| \int_a^b f_k(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b [f_k(x) - f(x)]dx \right| \leq \int_a^b |f_k(x) - f(x)|dx$. Mivel $(f_k) \to f$ egyenletesen

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a,b]$. Így $\int_a^b |f_k(x) - f(x)| dx < \varepsilon \cdot (b-a)$, ebből következik a tétel állítása.

**Tétel**: legyen $g_j : [a,b] \to \mathbb{R}, g_j \in C[a,b]$, $\sum_{j=1}^{\infty} g_j = f$ sor egyenletesen konvergens (vagyis ha a részletösszegek sorozata egyenletesen konvergál $f$-hez, ekkor amúgy $f$ folytonos) $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \int_a^b g_j(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

**Tétel**: tfh $f_k : (a,b) \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, továbbá $(f_k') \to g$ egyenletesen $(a,b)$ -n, továbbá egy alkalmas $c \in (a,b)$ helyre $\lim_{k \to \infty} f_k(c) = \alpha$ véges. Ebből következik, hogy $(f_k) \to f$ egyenletesen $(a,b)$ -n, $f$ folytonosan differenciálható és $f'(x) = \lim_{k \to \infty} [f_k'(x)]$.

Bizonyítás: alkalmazzuk a Newton-Leibniz formulát az $f_k$ folytonosan differenciálható függvényekre, $x \in (a,b)$ rögzített. $f_k(x) - f_k(c) = \int_c^x f_k'(t) dt \Rightarrow f_k(x) = \int_c^x f_k'(t) dt + f_k(c) \to \int_c^x g(t) dt + \alpha$, mert $f_k'(t) \to g(t)$ egyenletesen, $t \in [x,c]$ vagy $t \in [c,x]$. Továbbá $f_k$ egyenletesen tart $\underbrace{\left[ \int_c^x g(t) dt + \alpha \right]}_{f(x)}$-hoz, ugyanis

$$|f_k(x) - f(x)| = \left| \left[ \int_c^x f_k'(t) dt + f_k(c) \right] - \left[ \int_c^x g(t) dt + \alpha \right] \right| \leq \left| \int_c^x (f_k'(t) - g(t)) dt \right| + \underbrace{|f_k(c) - \alpha|}_{< \varepsilon \text{ ha } k > k_0} \leq$$

$\leq |x-c| \cdot \underbrace{\sup(|f_k'(t) - g(t)|)}_{< \varepsilon \text{ ha } k > k_1} + \varepsilon \leq (b-a)\varepsilon + \varepsilon$ és $k \geq \max\{k_0, k_1\} \Rightarrow (f_k) \to f$ egyenletesen $(a,b)$ -n. Kellett, hogy $(b-a)$ véges legyen! $f(x) = \int_c^x g(t) dt + \alpha \Rightarrow f'(x) = g(x), \forall x \in (a,b)$.

**Tétel**: tfh $\phi_j : (a,b) \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j' = g$ egyenletesen konvergens $(a,b)$ -n, továbbá $\exists c \in (a,b)$: $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(c) = \alpha$ véges. Ekkor $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j$ egyenletesen konvergens $(a,b)$ -n, $f := \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j$ függvény differenciálható $(a, b)$ -n és $f'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j'(x), \forall x \in (a, b)$.

Bizonyítás: $f_k = \sum_{j=1}^{k} \phi_j \ldots$

Cauchy-féle középérték **Tétel**: tfh $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$, folytonosak, $(a, b)$ -n differenciálhatóak és $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Ekkor $\exists \xi \in (a, b): \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. (Ha $g(x) = x$, akkor ez a Lagrange középérték tétel)

Bizonyítás: $g(b) - g(a) \neq 0$, ugyanis ha $g(b) - g(a) = 0$ lenne, akkor a Rolle tétel szerint $g$ függvényre $\exists \eta \in (a, b): g'(\eta) = 0$. Legyen $F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)]$. Ekkor $F$ folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható $(a, b)$ -n, $F(a) = f(a)$, $F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(b) - g(a)] = f(a)$. $F(a) = F(b) \Rightarrow$ Rolle tétel segítségével $\exists \xi \in (a, b): F'(\xi) = 0$, azaz $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$.

**L' Hôpital szabály**

**Tétel** (alapeset): tfh $f$, $g$ értelmezve van és differenciálható $a \in \mathbb{R}$ egy környezetében ($a$-ban nem is kell), továbbá $\lim_{x \to a} f(x) \equiv \lim_a f = 0$ és $\lim_b g = 0$. Ekkor $\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f'}{g'}$, ha létezik ez utóbbi.

Bizonyítás: értelmezzük az $f$ és $g$ függvényt $a$-ban! $f(a) := 0$, $g(a) := 0$. Ezért $f$, $g$ folytonosak $a$ egy környezetében és deriválhatók is $x$ kivételével, $g'(x) \neq 0$. Alkalmazzuk a Cauchy-féle középérték-tételt: $a$ környezetében levő $x$ pont és $a$ által meghatározott intervallumra $\exists \xi \in (a, b): \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow x \to a$ esetén $\xi \to a \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, ha ez utóbbi létezik.

Általánosítások: a) $a := \pm\infty$ és $\lim_a f = 0, \lim_a g = 0$, ekkor is igaz, hogy $\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f'}{g'}$, ha ez utóbbi létezik

b) $\lim_a f = \pm\infty$ és $\lim_a g = \pm\infty$ esetén hasonló állítás.

## Hatványsorok integrálása és deriválása

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$, $a, x \in \mathbb{R}$ ezt nevezzük $x$-nek $a$ körüli hatványsornak. Ez egy speciális függvénysor. Legyen ennek a konvergencia sugara $R$! Tudjuk, hogy $|x - a| < R$ esetén a hatványsor konvergens $x$-ben. Azt is tudjuk, hogy $\forall \delta > 0$ esetén a hatványsor egyenletesen konvergens $[a - R + \delta, a + R - \delta]$ intervallumon.

**Tétel**: legyen a hatványsor konvergencia sugara $R > 0$ és $R \leq \infty$. Ekkor egyrészt tetszőleges $[c, d] \subset (a - R, a + R)$ esetén a hatványsor tagonként integrálható, vagyis $\int_c^d \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_c^d c_k (x-a)^k dx$.

**Tétel**: legyen a hatványsor konvergencia sugara $R > 0$ és $R \leq \infty$. Ekkor $|x-a| < R$ esetén a hatványsor $x$-ben tagonként deriválható: $\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_n (x-a)^k\right)'$.

Bizonyítás: alkalmazzuk a függvénysorok tagonkénti deriválásáról szóló tételt! Világos, hogy a hatványsor tagjai folytonosak, akárhányszor differenciálhatóak. Kérdés: mi a tagok deriváltjaiból alkotott hatványsor konvergencia sugara? Látható, hogy ugyanaz. A derivált sor $k$-adik tagja: $c_k k(x-a)^{k-1}$, erre ugyanaz a konvergencia sugár adódik. Tehát a deriváltakból álló sor egyenletesen konvergens $[c,d]$ -n ha $[c,d] \subset (a-R, a+R)$, $|x-a| < R$, $[c,d]$ -t megválaszthatjuk úgy, hogy $x \in [c,d]$.

**Taylor formula**

tfh egy hatványsor konvergencia sugara $> 0$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$, $|x-a| < R > 0$. (Definíció szerint itt $0^0 = 1$.)

Az előbbiek szerint $|x-a| < R$ esetén

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k k(x-a)^{k-1}$$

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k k(k-1)(x-a)^{k-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k k(k-1)(k-2)...(k-j+1)(x-a)^{k-j}$$

Ekkor $f^{(j)}(a) = c_j \cdot j(j-1)(j-2)...2 \cdot 1 = c_j j! \Rightarrow c_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}$.

**Állítás**: ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k, |x-a| < R > 0 \Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Speciális eset, ha $f$ polinom, azaz $f = P_N$ ($N$-edfokú polinom), vagyis $f = \sum_{k=0}^{N} c_k (x-a)^k$, ekkor $c_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$, más szóval $P(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$.

**Taylor formula Lagrange- féle maradéktaggal**

**Tétel**: tfh $f$ függvény $N$+1-szer differenciálható $a$ egy környezetében. Ebben a környezetben fekvő tetszőleges $x$

pontjára $f(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$, alkalmasan választott $\xi\in(x,a)$ elemre.

Megjegyzés: $N=0$ esetén megkapjuk a Lagrange-féle középértéktételt.

Bizonyítás: jelölje $g(x):=f(x)-\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=f(x)-P(x)$. Ekkor $g(a)=f(a)-P(a)$, de $P(a)=f(a)$, így

$g(a)=0$. Továbbá $g'(a)=f'(a)-P'(a)$, node $f'(a)=P'(a)$, így $g'(a)=0\ \dots\ g^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)-P^{(n)}(a)=0$.

Tekintsük: $\frac{g(x)}{(x-a)^{N+1}}=\frac{g(x)-g(a)}{(x-a)^{N+1}-(a-a)^{N+1}}=\frac{g'(\xi)}{(n+1)(\xi_1-a)^N}$, felhasználva a Cauchy-féle középérték tételt. További alkalmazása segítségével

$$\frac{g(x)}{(x-a)^{N+1}}=\frac{g'(\xi_1)-g'(a)}{(N+1)(\xi_1-a)^N-(N+1)(a-a)^N}=\frac{g''(\xi_2)}{(N+1)N(\xi_2-a)}=\dots=\frac{f^{(N+1)}(\xi_{N+1})}{(N+1)!}\Rightarrow\frac{g(x)}{(x-1)^{N+1}}=\frac{f^{(N+1)}(\xi_{N+1})}{(N+1)!}$$

Következmény: ha $f$ akárhányszor differenciálható $a$ egy környezetében, akkor (ha tudom, hogy $\xi\in(a,x)$: $\lim_{N\to\infty}\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}=0$ $\xi$-ben egyenletesen) $\Rightarrow f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, ez $f$ Taylor sorfejtése.

Egyszerű, elegendő (de nem szükséges) feltétel, ha $\xi\in(a,x)$, $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$ egyenletesen korlátos, ugyanis $\lim_{n\to\infty}\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}=0$.

**Definíció**: tfh egy $f$ függvény $a$ egy környezetében akárhányszor differenciálható! Ekkor $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ hatványsort az $f$ függvény Taylor sorának nevezünk.

Megjegyzés: lehetséges, hogy $f$ akárhányszor differenciálható, de a Taylor sora az $a$ pont kivételével nem állítja elő a függvényt. pl: $f(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x=0\\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{egyébként}\end{cases}$. Ennek $\lim_{x\to0}f(x)=0,\lim_{x\to0}f'(x)=0\dots\lim_{x\to0}f^{(k)}(x)=0,\forall k\Rightarrow f$ akárhányszor deriválható az $a=0$ helyen. $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=0$, tehát $f'(0)=0, f''(0)=0\dots\Rightarrow f$ Taylor sora 0, pedig $f(x)>0$ ha $x\neq0$.