pontjára $f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$, alkalmasan választott $\xi \in (x, a)$ elemre.

Megjegyzés: $N = 0$ esetén megkapjuk a Lagrange-féle középértéktételt.

Bizonyítás: jelölje $g(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x) - P(x)$. Ekkor $g(a) = f(a) - P(a)$, de $P(a) = f(a)$, így $g(a) = 0$. Továbbá $g'(a) = f'(a) - P'(a)$, node $f'(a) = P'(a)$, így $g'(a) = 0 \ldots g^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) = 0$.

Tekintsük: $\frac{g(x)}{(x-a)^{N+1}} = \frac{g(x)-g(a)}{(x-a)^{N+1}-(a-a)^{N+1}} = \frac{g'(\xi)}{(n+1)(\xi_1-a)^N}$, felhasználva a Cauchy-féle középérték tételt. További alkalmazása segítségével

$$\frac{g(x)}{(x-a)^{N+1}} = \frac{g'(\xi_1)-g'(a)}{(N+1)(\xi_1-a)^N-(N+1)(a-a)^N} = \frac{g''(\xi_2)}{(N+1)N(\xi_2-a)} = \ldots = \frac{f^{(N+1)}(\xi_{N+1})}{(N+1)!} \Rightarrow \frac{g(x)}{(x-1)^{N+1}} = \frac{f^{(N+1)}(\xi_{N+1})}{(N+1)!}$$

Következmény: ha f akárhányszor differenciálható a egy környezetében, akkor (ha tudom, hogy $\xi \in (a, x)$: $\lim_{N\to\infty} \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1} = 0$ ξ-ben egyenletesen) $\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, ez f Taylor sorfejtése.

Egyszerű, elegendő (de nem szükséges) feltétel, ha $\xi \in (a, x)$, $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$ egyenletesen korlátos, ugyanis $\lim_{n\to\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Definíció: tfh egy f függvény a egy környezetében akárhányszor differenciálható! Ekkor $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ hatványsort az f függvény Taylor sorának nevezünk.

Megjegyzés: lehetséges, hogy f akárhányszor differenciálható, de a Taylor sora az a pont kivételével nem állítja elő a függvényt. pl: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{egyébként} \end{cases}$. Ennek $\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \lim_{x\to 0} f'(x) = 0 \ldots \lim_{x\to 0} f^{(k)}(x) = 0, \forall k \Rightarrow f$ akárhányszor deriválható az $a = 0$ helyen. $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = 0$, tehát $f'(0) = 0, f''(0) = 0 \ldots \Rightarrow f$ Taylor sora 0, pedig $f(x) > 0$ ha $x \neq 0$.