Analízis I.

Fizika BSc (fizikus szakirány), 2013. ősz

Vizsgaidőpontok. Dec. 18., jan. 7., 9., 14., 16., 21., UV jan. 28. A vizsgák 8:30-kor kezdődnek a Déli tömb 3-719-es termében. A felkészülési idő 1 óra, egyszerre mindig 4 hallgató fog felkészülni (amíg még van annyi), ezért reggel is legyenek ott legalább ennyien. Ha a hallgatók elfogynak, akkor a vizsga véget ér, további esetlegesen későn érkező hallgatókra nem várok. Konzultációt szívesen tartok, az időpontot emailben célszerű egyeztetni, de rövidebb kérdésekre emailben is tudok válaszolni.

Tudnivalók. Megjelenés hétköznapi öltözetben. A vizsgán a részletes tematika nem használható, csak annak a címszavas változata. Ezt vizsgára nem kell hozni, én adok belőle. Üres lap viszont legyen mindenkinél. A tematikából mindenki két tételt húz, de a felelet során a húzott tételektől eltérő kérdéseket is fel fogok tenni. A közepes és elégséges jegyekért a fogalmakat és tételeket tudni és legfőképpen *érteni kell*, ezt konkrét (egyszerű) példákon való alkalmazásokkal tesztelni fogom (például $f(x, y) = xy$ bilineáris függvény-e, $[0, 1] \cup \{2\}$ halmaznak a 2 határpontja-e stb.). A jeles és jó érdemjegyekért a fogalmak és tételek mellett az elhangzott bizonyítások főbb lépéseit is ismerni kell (legalábbis minél többet a minél jobb jegyért).

Részletes vizsgatematika.

1. **Vektorterek és euklidészi terek definíciója és alaptulajdonságai példákkal.**
   - vektorterek: definíció (axiómák), példák ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times m}$, $H \to \mathbb{R}$, függvények, $\mathcal{P}(H)$ a $\mathbb{Z}_2$ felett);
   - euklidészi terek: valós bilineáris függvények, szimmetria, kvadratikus alakok, definitség, példák, hermitikus bilineáris függvények, skalárszorzat, példák ($\mathbb{R}^n$, $C([0, 1])$), Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenőtlenség (biz., középiskolai szemlélet), háromszög-egyenlőtlenség (biz., szemlélet);
2. **Normált terek és metrikus terek definíciója és alaptulajdonságai példákkal.**
   - normált terek: norma és normált tér definíciója, példák (supnorma, integrálnorma), indukált norma;
   - metrikus terek: metrika és metrikus terek definíciója, példák (norma által indukált, diszkrét metrika, korlátos metrika);
3. **Metrikus terek topológiája.**
   - metrikus terek topológiája: gömbök metrikus terekben (nyílt, zárt, kipontozott, gömbfelület);
   - pont és halmaz viszonya: halmaz belső, külső, határ- és torlódási pontja, halmaz belseje, külseje, határa, példák;
   - nyílt és zárt halmazok: definíció, példák, belső és külső pontok halmaza nyílt (biz.), határ zárt, nyílt halmazok tetszőleges uniója nyílt (biz.), véges metszet nyílt (biz.), zártak tetszőleges metszete zárt (biz.), véges uniója nyílt (biz.), ellenpéldák;
4. **Sorozatok konvergenciája metrikus terekben és zárt halmazok jellemzése sorozathatárérték segítségével.**
   - sorozatok konvergenciája: definíció, tulajdonságok, limesz egyértelműsége (biz.), részsorozat, átrendezés, összefésülés konvergenciája, konvergencia $\implies$ korlátosság (biz.), metrika és norma konvergenciája (biz., háromszög-egyenlőtlenség egy változata), összegsorozat, konstansszoros sorozat konvergenciája normált térben (biz.), skalárszorzat konvergenciája (biz.), reciprok sorozat konvergenciája valós esetben (biz.).
   - zárt halmazok és konvergens sorozatok: zártság ekvivalens megfogalmazása sorozathatárértékkel (biz.);

5. **Korlátos, zárt, sorozatkompakt halmazok és konvergencia, Cauchy-sorozatok.**
   - korlátos, zárt és sorozatkompakt halmazok: Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel $\mathbb{R}^p$-ben (biz.), sorozatkompakt halmaz definíciója, sorozatkompakt $\implies$ korlátos és zárt (biz.);
   - Cauchy-sorozatok: definíció, konvergens $\implies$ Cauchy (biz.), ellenpélda a fordított irányra, metrikus tér teljessége, $\mathbb{R}^p$ teljes (biz.);

6. **Függvényhatárérték és folytonosság metrikus terekben, átviteli elvek és műveleti tulajdonságok.**
   - függvényhatártérték és folytonosság: definíció, $\mathbb{R}$-ben bal ás jobb oldali határértékek definíciója, példák;
   - átviteli elvek: átviteli elv függvényhatárértékre és folytonosságra (biz.);
   - műveleti tulajdonságok: normált térbe képező függévnyek összegének, konstansszorosának határértéke (biz.), euklidészi térbe képező függvények skalárszorzatának határértéke és folytonossága (biz.), valós értékű függvények reciprokának határérétke és folytonossága (biz.);

7. **Kompozíciófüggvény és inverzfüggvény határértéke és folytonossága.**
   - kompozíciófüggvény: ellenpélda, $g \circ f$ határértéke létezik, ha g folytonos és f-nek van határértéke (biz.), $g \circ f$ folytonos, ha g és f is folytonos (biz.);
   - inverzfüggvény: injektivitás, inverz, szigorúan monoton $\implies$ injektív (biz.), intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény inverze folytonos (biz.), sorozatkompakt halmazon értelmezett folytonos injekció inverze folytonos (biz.);

8. **Weierstrass-tétel, Heine-tétel, Bolzano-tétel és általánosításaik.**
   - Weierstrass-tétel: valós eset, sorozatkompakt halmazon folytonos függvény értékkészlete sorozatkompakt (biz.);
   - Egyenletes folytonosság: definíció, példák, $1/x$, x, Heine tétele (biz.);
   - Bolzano-tétel és általánosításai: Bolzano-tétel egydimenzióban (biz.), példák, $\sin \frac{1}{x}$, útszerű összefüggőség, összefüggőség, példák („topológusok szinuszgörbéje”), útszerűen összefüggő halmaz folytonos képe is útszerűen összefüggő (biz.);

9. **Függvénysorozatok és sorok pontonkénti és egyenletes konvergenciája.**
   - függvénysorozatok pontonkénti és egyenletes konvergencia, példák, x^n, folytonosság és pontonkénti konvergencia, egyenletes konvergencia, példák, x^n a $[0, 1)$-en és $[0, a)$-n, folytonosság és egyenletes konvergencia (biz.), egyenletesen Cauchy-sorozatok, kapcsolat az egyenletes konvergenciával (biz.);
   - függvénysorok konvergenciája: függvénysor definíciója, pontonkénti és egyenletes konvergencia, példa, x^n, összegfüggvény folytonossága (biz.), Cauchy-kritérium, Weierstrass-kritérium (biz.), alkalmazás, x^n;

10. **Hatványsorok konvergenciája, valós differenciálhatóság ekvivalens definíciói.**
    - hatványsorok: limsup és liminf, definíció, ekvivalens megfogalmazások, példák, $(-1)^n$, hatványsor konvergenciahalmaza, Cauchy–Hadamard-tétel (biz.), példák, $\sum n!x^n$, $\sum \frac{x^n}{n!}$, $\sum \frac{x^n}{n}$, egyenletes konvergencia egy szűkebb intervallumon (biz.);
    - valós differenciálhatóság: az egyváltozós differenciálhatóság ekvivalens definíciói, differenciahányados, maradéktag (kétféle);

11. **Lineáris és folytonos lineáris leképezések.**
    - lineáris leképezések: lineáris leképezés definíciója, példák, véges dimenzióban mátrixszal reprezentélhatóak, algebrai műveletek, $\mathrm{lin}(X, Y)$, kompozíció, hatványozás, sajátértékek, véges dimenzióban karakterisztikus polinom;

- folytonos lineáris leképezések: véges dimenzióban minden lineáris leképezés folytonos (biz.), korlátosság definíciója, norma, folytonosság és korlátosság ekvivalenciája (biz.), pontosan akkor folytonos minden pontban, ha egy pontban folytonos (biz.), példák, deriválás $C^1([0,1])$-en a sup normával nem folytonos, norma ekvivalens definíciója (infimumos, biz.), $L(X,y)$ teljes, ha Y teljes (biz.);

12. **Differenciálszámítás normált terekben, ekvivalens definíciók, műveleti tulajdonságok, láncszabály, iránymenti derivált.**
    - differenciálhatóság normált terekben: a differenciálhatóság háromféle ekvivalens definíciója (kétféle maradéktag, törtes), derivált egyértelmű (biz.);
    - műveleti tulajdonságok: algebrai műveletek (összeg és konstansszoros deriváltja, (biz.), láncszabály (biz.);
    - iránymenti derivált: definíció és kiszámítása a derivált segítségével (biz.), példák, $C([0,1])$-en $F(f)=f^2$;

13. **Totális és parciális differenciálhatóság $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvényekre és alaptulajdonságaik.**
    - $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvények: koordinátafüggvények, totális differenciálhatóság, koordinátafüggvények differenciálhatósága és totális differenciálhatóság ekvivalenciája (biz.), iránymenti derivált, parciális derivált, Jacobi-mátrix és elemei, gradiens vektor, iránymenti derivált maximalitása (biz.), példák, $\frac{xy}{x^2+y^2}$ nem differenciálható, hiába léteznek a parciális deriváltjai az origóban, példa olyan függvényre, amelynek egy adott pontbeli összes iránymenti deriváltja létezik, mégsem differenciálható ott.

14. **Középértéktételek egy- és több dimenzióban.**
    - egyváltozós középértéktételek: Rolle-tétel (biz.), Lagrange-középértéktétel (biz. és szemlélet), az integrálszámítás alaptétele (biz.), Cauchy-középértéktétel (biz.), L'Hospital-szabály (biz.);
    - Lagrange-középértéktétel általánosításai: $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényekre (biz.), ellenpélda, Lagrange-becslés $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvényekre (biz.);

15. **Folytonos bilineáris és multilineáris operátorok, kétszeres és többszörös differenciálhatóság.**
    - folytonos bilineáris operátorok: szorzattér, norma, bilineáris operátor, algebrai műveletek, korlátosság, ekvivalenciája a folytonossággal (biz.), operátornorma, $L(X, L(Y,Z))$ és $L^2(X\times Y, Z)$ elemeinek normatartó megfeleltetése (biz.);
    - folytonos multilineáris operátorok: szorzattér, norma, multilineáris operátor, korlátosság, kapcsolat $L(X_1, L(X_2, \dots L(X_k, Z))\dots)$-vel;
    - kétszeres differenciálhatóság: definíció, $f''(x_0)$ bilineáris operátor, véges dimenzióban Hesse-mátrix, Young-tétel (spec. eset biz.), többszörös differenciálhatóság, $f^{(k)}(x_0)$ multineáris operátor.

16. **Taylor-sorok, hatványsorok egyváltozóban.**
    - egyváltozós Taylor-sorok: Taylor-polinom, szemlélet, Taylor-sor, analitikusság, ellenpélda, Lagrange-maradéktag, elégséges feltétel analitikusságra, példák (sin, cos, exp), Peano-maradéktag;
    - függvénysorozatok és sorok: ellenpélda differenciálhatóságra és integrálhatóságra (sátorfüggvény, $\sqrt{x^2+\frac{1}{k}}$), tétewl az integrálhatóságról és differenciálhatóságról (biz.), következmények függvénysorokra;
    - hatványsorok: végtelen sokszor való tagonkénti differenciálhatóság (biz.), hatványsor Taylor-sora önmaga, példák ($\log(1+x)$, binomiális, $\arcsin x$).

17. **Taylor-sorok normált térben és lokális szélsőértékek.**

   - Taylor-polinom normált terekben: motiváció, definíció, maradéktagok (Lagrange és Peano);
   - Taylor-polinom $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényekre: definíció, differenciálok;
   - Lokális szélsőértékek: definíció, szükséges feltétel ($f'(x_0) = 0$, biz.), nem elegendő (példa), különböző definit bilineáris operátorok, véges dimenzióban pozitív definit $\implies$ szigorúan pozitíc definit (biz.), elégséges feltétel a második derivált segítségével (biz.).

18. **Inverz- és implicitfüggvény tételkör véges dimenzióban.**

   - Inverzfüggvények: inverz differenciálhatósága (biz.), lokális injektivitás, lokális szürjektivitás, inverzfüggvény tétel, példák;
   - Implicitfüggvény-tétel: motiváció, példák, egyváltozós implicitfüggvény-tétel (létezés biz.), többváltozós implicitfüggvény-tétel (biz.);
   - Feltételes szélsőérték: definíció, Lagrange-féle multiplikátor módszer (biz.), példa, szemlélet.