# ALKALMAZOTT VEKTORSZÁMÍTÁS 1. Vizsgazh 2014. 01. 06.

| Név | NEPTUN-kód | email-cím | min elf. jegy |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Munkaidõ 4 óra. Használható: Bronstein, zsebszámológép, saját órai jegyzet.**

**1.** Értelmezzünk az egész számok halmazán egy új, *-gal jelölt műveletet: $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$ A képlet jobb oldalán a közönséges szorzás és összeadás szerepel. a/ Bemelegítésként: mennyi lesz $2 * 2$ ?

b/ Asszociatív-e a művelet? c/ Van-e a halmazban semleges, illetve agresszív elem? (A semleges elem “nem oszt, nem szoroz”, mint a szorzásnál az 1, az agresszív elem mindenkit magához hasonlóvá tesz, mint a szorzásnál a 0.) Milyen struktúrát alkotnak az egész számok a *-gal jelölt művelettel ellátva?

d/ Terjesszük ki a művelet értelmezését a valós számok halmazára, és ismételjük meg az előző vizsgálatokat! Milyen struktúrát alkotnak a valós számok a *-gal jelölt művelettel ellátva? e/ Van-e inverz a *-gal jelölt műveletre nézve?

f/ Mutassuk meg, hogy ha egyetlen számot kihagyunk a valós számok halmazából, a maradék elemek a *-gal jelölt műveletre nézve egy jól ismert egyszerű struktúrát alkotnak! Mely elemet kell kihagynunk a halmazból?

g/ ***(ötösért)*** Legyen a *-gal jelölt művelet a szorzás megfelelője, és keressünk hozzá egy új, $\oplus$-tel jelölt műveletet, amely az összeadásnak felel meg, azaz a *-os szorzással a szokásos disztributív viszonyban áll! Adjuk meg az új “összeadás” képletét a szokásos műveletekkel! Mutassuk meg, hogy e két műveletre nézve a valós számok halmaza kommutatív testet alkot!

**2.** Számítsuk ki a következő kvaternió-hányadost: $q = \dfrac{1+2i+3j+4k}{1-2i+3j-4k}$ !

**3.** Legyen $\mathbf{F_1}$ az $\boldsymbol{a} = (1, -1, -1)$ vektorral megadott tengely körüli 60 fokos, $\mathbf{F_2}$ pedig a $\boldsymbol{b} = (0, 1, -1)$ vektorral megadott tengely körüli 90 fokos forgatás operátora! Számítsuk ki a megfelelő forgásmátrixokat! Határozzuk meg, hogy az $\mathbf{F_3} = \mathbf{F_1}\,\mathbf{F_2}$, illetve $\mathbf{F_4} = \mathbf{F_2}\,\mathbf{F_1}$ forgásmátrixok mely tengelyek körül forgatnak, valamint számoljuk ki az eredő forgásszögek cosinusát! Ügyeljünk a vektorok normálására! NE HASZNÁLJUNK tizedes törteket, kizárólag valódi törteket, illetve szükség esetén gyökös kifejezéseket!

**4.** Oldjuk meg a **3.** feladatot a forgatások Rodriguez-reprezentációja segítségével! (A két feladat csak együtt érvényes!)

**5.** Legyen $\mathbf{F_1}$ az $\boldsymbol{e}$ egységvektorral megadott tengely körüli $\alpha$ szögű forgatás, $\mathbf{F_2}$ pedig az $\boldsymbol{n}$ egységvektorral megadott tengely körüli $\beta$ szögű forgatás operátora! Valaki megsúgta, hogy az $\mathbf{F_3} = \mathbf{F_1}\,\mathbf{F_2}$, illetve $\mathbf{F_4} = \mathbf{F_2}\,\mathbf{F_1}$ forgatások tengelyei közötti szög is éppen $\beta$. Mekkora az $\boldsymbol{e}$ és $\boldsymbol{n}$ egységvektorok közötti $\varphi$ szög? Fejezzük ki a $\varphi$ szög koszinuszát $\alpha$ és $\beta$ szögfüggvényei segítségével!

**6.** Tudjuk, hogy tetszőleges **A** négyzetes mátrix esetén a $\mathbf{G}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ alakú mátrixok egyparaméteres kommutatív csoportot alkotnak (itt $t$ tetszőleges valós szám)! Legyen most $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Ekkor a $\mathbf{G}(t)$ mátrixok egy kétdimenziós sík (x, y) koordinátájú pontjait transzformálják egy (x’, y’) pontba. Határozzuk meg a transzformáció **orbitjait**, azaz egy adott $(x_0, y_0)$ kezdőpont különböző $t$ paraméterekkel eltranszformált képpontjainak mértani helyét! Milyen görbék ezek az orbitok? Vázoljuk fel a különböző orbitokat! Ismételjük meg a számítást a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$ mátrixból kiindulva is! Vázoljuk fel az orbitokat!

**7.** Számítsuk ki a lehető leggyorsabban a következő mátrixfüggvényt: $\mathbf{U}(t) = e^{26\mathbf{H}t}$, ahol $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 3 & 4-12i \\ 4+12i & -3 \end{pmatrix}$!

A számolás során NE a mátrixok projektorfelbontásán alapuló standard eljárást, hanem az Alkalmazott vektorszámítás specin tanult, a Pauli-mátrixokon és az SU(2) csoporton alapuló módszert alkalmazzuk!