# ALKALMAZOTT VEKTORSZÁMÍTÁS 1. Vizsgazh 2013. 01. 08.

| Név | NEPTUN-kód | email-cím | min elf. jegy |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Munkaidõ 4 óra. Használható: Bronstein, zsebszámológép, saját órai jegyzet.**

**1.** Értelmezzünk a valós számok halmazán egy új, *-gal jelölt műveletet: $x * y = x + y + (x\,y/4)$ A képlet jobb oldalán a közönséges szorzás és összeadás szerepel. Bemelegítésként: mennyi lesz $2 * 2$ ?

Asszociatív-e a művelet? Van-e a halmazban semleges, illetve agresszív elem? (A semleges elem “nem oszt, nem szoroz”, mint a szorzásnál az 1, az agresszív elem mindenkit magához hasonlóvá tesz, mint a szorzásnál a 0.)

Mutassuk meg, hogy ha egyetlen számot kihagyunk a valós számok halmazából, a maradék elemek a *-gal jelölt műveletre nézve kommutatív csoportot alkotnak! Mely elemet kell kihagynunk a halmazból? Melyik szám lesz a csoport egységeleme!

***(ötösért)*** Legyen a *-gal jelölt művelet a szorzás megfelelője, és keressünk hozzá egy új, $\oplus$ -tel jelölt műveletet, amely az összeadásnak felel meg, azaz a *-os szorzással a szokásos disztributív viszonyban áll! Adjuk meg az új “összeadás” képletét a szokásos műveletekkel! Mutassuk meg, hogy e két műveletre nézve az egész számok halmaza kommutatív gyűrűt alkot! Terjesszük ki műveleteinket a valós számok halmazára, és vizsgáljuk meg, hogy testet kapunk-e!

**2.** Legyen A és B egy absztrakt struktúra két eleme. Vezessünk be köztük egy asszociatív (de nem kommutatív) szorzást, majd tekintsük a két elem összes lehetséges szorzatainak valós együtthatós lineárkombinációit! (Ez az ún. **Clifford-algebrák** konstrukciójának menete.)

Legyenek érvényesek az A és B elemre a következő műveleti szabályok: AA = 0, BB = 0, ABA = A, BAB = B, ahol a 0 az algebra mint lineáris tér nullvektorát jelöli.

Mutassuk meg, hogy az A és B elemek által generált fenti algebra (mint lineáris tér) ekkor véges dimenziós lesz! Hány dimenziós? Keressünk egyszerűen kezelhető bázisvektorokat, írjuk fel szorzástáblázatukat, azaz határozzuk meg a struktúraállandókat! Bizonyítsuk be, hogy AB + BA = 1! Mit jelent ebben a képletben az 1?

A báziselemek szorzástáblázata alapján keressük meg az algebra legegyszerűbb, lehető legkisebb dimenziós mátrixábrázolását! (Csodálkozni fogunk, hogy milyen egyszerű...)

(*Megjegyzés:* a most konstruált algebra nem puszta matematikai játék. A harmadik félévben találkozni fogtok vele az optikában, a lencse- és tükörrendszerek leírásakor, az ötödik félévben, a kvantummező-elméletben pedig a Pauli-elv matematikai megfogalmazásánál.)

**3.** Legyen $\mathbf{F_1}$ az $\boldsymbol{a} = (1, 1, -1)$ vektorral megadott tengely körüli 60 fokos, $\mathbf{F_2}$ pedig a $\boldsymbol{b} = (1, -1, 1)$ vektorral megadott tengely körüli 120 fokos forgatás operátora. Határozzuk meg, hogy az $\mathbf{F_3} = \mathbf{F_1}\ \mathbf{F_2}$, illetve $\mathbf{F_4} = \mathbf{F_2}\ \mathbf{F_1}$ forgásmátrixok mely tengelyek körül forgatnak, valamint számoljuk ki az eredő forgásszögek cosinusát! Ügyeljünk a vektorok normálására! NE HASZNÁLJUNK tizedes törteket, kizárólag valódi törteket, illetve szükség esetén gyökös kifejezéseket!

**4.** Oldjuk meg a **3.** feladatot a forgatások Rodriguez-reprezentációja segítségével! (A két feladat csak együtt érvényes!)

**5.** Tekintsük az $\mathbf{S}(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok halmazát, ahol *a* és *b* valós számok! Mutassuk meg, hogy a mátrixok összeadása és szorzása sem vezet ki ebből a halmazból! Értelmezhető-e az osztás? Határozzuk meg egy $\mathbf{S}(a,b)$ mátrix inverzét! Milyen struktúrát alkotnak ezek a mátrixok? Vannak-e nullosztók a halmazban? Magyarázzuk meg a tapasztalatokat az algebrákra vonatkozó ismereteink segítségével!

**6.** Tudjuk, hogy tetszőleges **A** mátrix esetén a **G**(*t*) = exp (**A***t*) alakú mátrixok egyparaméteres kommutatív csoportot alkotnak (itt *t* tetszőleges valós szám)! Legyen most $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$. Ekkor a **G**(*t*) mátrixok egy kétdimenziós sík (x, y) koordinátájú pontjait transzformálják egy (x’, y’) pontba. Határozzuk meg a transzformáció **orbitjait**, azaz egy adott ($x_0$, $y_0$) kezdőpont különböző *t* paraméterekkel eltranszformált képpontjainak mértani helyét! Milyen görbék ezek az orbitok? Vázoljuk fel a különböző orbitokat! (*Tanács:* forgassuk el a koordinátarendszert, majd küszöböljük ki a *t* paramétert!) Ismételjük meg a számítást a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ mátrixból kiindulva is! Vázoljuk fel az orbitokat!