ALKALMAZOTT VEKTORSZÁMÍTÁS 1. Vizsgazh 2012. 01. 06.

Név	EHA-kód	email-cím	min elf. jegy

Munkaidõ 4 óra. Használható: Bronstein, zsebszámológép, saját, kézírásos órai jegyzet.
Az 1.a/, b/ és a 2. feladat megoldása szükséges (de nem elégséges) a kettes jegy eléréséhez!

1. Értelmezzünk az egész számok halmazán egy **új**, *-gal jelölt **műveletet**: $x * y = x + y + (x\,y/4)$ A képlet jobb oldalán a közönséges szorzás, osztás és összeadás szerepel. Bemelegítésként: mennyi lesz $2 * 2$?

a/ Asszociatív-e a művelet? Van-e a halmazban semleges, illetve agresszív elem? Van-e inverze az egyes elemeknek? **Milyen struktúrát alkotnak** az egész számok erre a műveletre nézve?

b/ Terjesszük ki a műveletet (ugyanezzel a műveleti szabállyal) a valós számok halmazára! Vizsgáljuk meg újra a fenti kérdéseket! Milyen struktúrát alkotnak a valós számok erre a műveletre nézve?

c/ Mutassuk meg, hogy ha egyetlen számot kihagyunk a valós számok halmazából, a maradék elemek a *-gal jelölt műveletre nézve kommutatív csoportot alkotnak! Mely elemet kell kihagynunk a halmazból? Melyik szám lesz a csoport egységeleme? (***Ötösért***: Milyen ismert csoporttal izomorf ez a csoport? Adjuk meg az izomorf leképezés képletét!)

d/ Legyen a *-gal jelölt művelet a szorzás megfelelője, és keressünk hozzá egy új, $\oplus$-tel jelölt műveletet, amely az összeadásnak felel meg, azaz a *-os szorzással a szokásos disztributív viszonyban áll! Adjuk meg az új "összeadás" képletét a szokásos műveletekkel! Mutassuk meg, hogy e két műveletre nézve az egész számok halmaza kommutatív gyűrűt alkot! Terjesszük ki műveleteinket a valós számok halmazára, és vizsgáljuk meg, hogy testet kapunk-e!

2. Legyen $\mathbf{F_1}$ az $\boldsymbol{a} = (1, 1, -1)$ vektorral megadott tengely körüli 60 fokos, $\mathbf{F_2}$ pedig a $\boldsymbol{b} = (0, 3, 4)$ vektorral megadott tengely körüli 90 fokos forgatás operátora! Írjuk fel a **forgásmátrixokat** (ügyeljünk a vektorok normálására)! Számítsuk ki, hogy az $\mathbf{F_3} = \mathbf{F_1}\,\mathbf{F_2}$, illetve $\mathbf{F_4} = \mathbf{F_2}\,\mathbf{F_1}$ forgásmátrixok mely tengelyek körül forgatnak, valamint számoljuk ki az eredő forgásszögek cosinusát! NE HASZNÁLJUNK tizedes törteket, kizárólag valódi törteket, illetve szükség esetén gyökös kifejezéseket!

3. ***(Ötösért!)*** Ismételjük meg a fenti feladat számolásait a specin bemutatott "térbeli tangenstétel", azaz a **forgatások vektorreprezentációja** segítségével! Hasonlítsuk össze az eredményeket és az eljárások hosszadalmasságát!

4. Tekintsük az $\mathbf{S}(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok halmazát, ahol *a* és *b* valós számok! Mutassuk meg, hogy a mátrixok összeadása és szorzása sem vezet ki ebből a halmazból! Értelmezhető-e az osztás? Határozzuk meg egy $\mathbf{S}(a,b)$ mátrix inverzét! Milyen struktúrát alkotnak ezek a mátrixok? Vannak-e nullosztók a halmazban? Válasszunk bázist a struktúrában, és írjuk fel a szorzástáblázatukat, határozzuk meg a struktúraállandókat! Miért nem ezt a struktúrát használjuk a komplex számok helyett?

5. Tudjuk, hogy tetszőleges **A** négyzetes mátrix esetén a $\mathbf{G}(t) = \exp(\mathbf{A}t)$ alakú mátrixok egyparaméteres kommutatív csoportot alkotnak (itt *t* tetszőleges valós szám)! **a**/ Legyen most $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -9 & 32 \end{pmatrix}$. Ekkor a $\mathbf{G}(t)$ mátrixok egy kétdimenziós sík *(x, y)* koordinátájú pontjait transzformálják egy *(x', y')* pontba. Határozzuk meg a transzformáció **orbitjait**, azaz egy adott (x_0, y_0) kezdőpont különböző *t* paraméterekkel eltranszformált képpontjainak mértani helyét! Milyen görbék ezek az orbitok? Vázoljuk fel a különböző orbitokat! (*Tanács:* forgassuk el a koordinátarendszert, majd küszöböljük ki a *t* paramétert!) **b**/ Ismételjük meg a számítást a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 12 & -31 \end{pmatrix}$ mátrixból kiindulva is! Vázoljuk fel az orbitokat az eredeti koordináta-rendszerben! **c**/ ***(Ötösért!)***

Adjuk hozzá az **A** mátrixhoz az egységmátrix többszörösét úgy, hogy a kapott **C** mátrix egyik sajátértéke nulla legyen. Keressük meg most a transzformációcsoport orbitjait!

6. Legyen **a** és **b** az *n*-dimenziós tér két nem párhuzamos, nem nulla vektora! Vezessük be a következő operátort:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{a} \circ \mathbf{b} - \mathbf{b} \circ \mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2\,\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}\,\mathbf{b})^2}}$$

Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{P} = -\mathbf{R}^2$ operátor az **a** és **b** vektorok síkjára vetítő projektor! (*Tanács:* bontsunk fel egy tetszőleges **v** vektort **a** és **b** többszörösei, valamint egy rájuk merőleges **u** vektor összegére, és vizsgáljuk meg, mit tesz vele a **P** operátor!)

Legyen most a tér 3 dimenziós! Mi az **R** operátor geometriai jelentése? (*Segítség*: vezessük be a **c** = **a** x **b** vektort!) És mi az **R** operátor geometriai jelentése az *n > 3* dimenziós térben?