ALKALMAZOTT VEKTORSZÁMÍTÁS 1. Vizsgazh 2010. 01. 04.

Név	EHA-kód	email-cím	min elf. jegy

Munkaidõ 4 óra. Használható: Bronstein, zsebszámológép, órai jegyzet.
Az 1.a/ és a 2. feladat megoldása mindenképp szükséges (de nem elégséges) a kettes jegy eléréséhez!

1. Értelmezzünk a valós számok halmazán egy új, *-gal jelölt műveletet: $x * y = x + y - x\, y$ A képlet jobb oldalán a közönséges szorzás és összeadás szerepel. Bemelegítésként: mennyi lesz $2 * 2$?

a/ Asszociatív-e a művelet? Van-e a halmazban semleges, illetve agresszív elem? *(A semleges elem "nem oszt, nem szoroz", mint a szorzásnál az 1, az agresszív elem mindenkit magához hasonlóvá tesz, mint a szorzásnál a 0.)*

Mutassuk meg, hogy ha egyetlen számot kihagyunk az egész számok halmazából, a maradék elemek a *-gal jelölt műveletre nézve kommutatív csoportot alkotnak! Mely elemet kell kihagynunk a halmazból? Melyik szám lesz a csoport egységeleme?

b/ Legyen a *-gal jelölt művelet a szorzás megfelelője, és keressünk hozzá egy új, $\oplus$ -tel jelölt műveletet, amely az összeadásnak felel meg, azaz a *-os szorzással a szokásos disztributív viszonyban áll! Adjuk meg az új "összeadás" képletét a szokásos műveletekkel! Mutassuk meg, hogy e két műveletre nézve az egész számok halmaza kommutatív testet alkot!

2. Legyen $\mathbf{F_1}$ az $\boldsymbol{a} = (1, -1, 1)$ vektorral megadott tengely körüli 120 fokos, $\mathbf{F_2}$ pedig a $\boldsymbol{b} = (1, -1, -1)$ vektorral megadott tengely körüli 60 fokos forgatás operátora. Határozzuk meg, hogy az $\mathbf{F_3} = \mathbf{F_1}\, \mathbf{F_2}$, illetve $\mathbf{F_4} = \mathbf{F_2}\, \mathbf{F_1}$ forgásmátrixok mely tengelyek körül forgatnak, valamint számoljuk ki az eredő forgásszögek cosinusát! Ügyeljünk a vektorok normálására! NE HASZNÁLJUNK tizedes törteket, kizárólag valódi törteket, illetve szükség esetén gyökös kifejezéseket!

3. Legyen A és B egy absztrakt struktúra két eleme. Vezessünk be köztük egy asszociatív (de nem kommutatív) szorzást, majd tekintsük a két elem összes lehetséges szorzatainak valós együtthatós lineárkombinációit! (Ez az ún. **Clifford-algebrák** konstrukciójának menete.)

Legyenek érvényesek az A és B elemre a következő műveleti szabályok: AA = 0, BB = 0, ABA = A, BAB = B, ahol a 0 az algebra mint lineáris tér nullvektorát jelöli.

Mutassuk meg, hogy az A és B elemek által generált fenti algebra (mint lineáris tér) ekkor véges dimenziós lesz! Hány dimenziós? Keressünk egyszerűen kezelhető báziselemeket, írjuk fel szorzástáblázatukat, azaz határozzuk meg a struktúraállandókat! Bizonyítsuk be, hogy AB + BA = 1! Mit jelent ebben a képletben az 1?

A báziselemek szorzástáblázata alapján keressük meg az algebra legegyszerűbb, lehető legkisebb dimenziós mátrixábrázolását! (Csodálkozni fogunk, hogy milyen egyszerű...)

(*Megjegyzés:* a most konstruált algebra nem puszta matematikai játék. A harmadik félévben találkozni fogtok vele az optikában, a lencse- és tükörrendszerek leírásakor, az ötödik félévben, a kvantummező-elméletben pedig a Pauli-elv matematikai megfogalmazásánál.)

4. Tekintsük az $\mathbf{S}(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok halmazát, ahol *a* és *b* valós számok! Mutassuk meg, hogy a mátrixok összeadása és szorzása sem vezet ki ebből a halmazból! Értelmezhető-e az osztás? Határozzuk meg egy $\mathbf{S}(a,b)$ mátrix inverzét! Milyen struktúrát alkotnak ezek a mátrixok? Vannak-e nullosztók a halmazban?

FOLYTATÁS KÖVETKEZIK A MÁSIK OLDALON !!!

5. Mutassuk meg, hogy tetszőleges **A** négyzetes mátrix esetén a **G**(*t*) = exp (**A***t*) alakú mátrixok egyparaméteres kommutatív csoportot alkotnak (itt *t* tetszőleges valós szám)! Legyen most $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Ekkor a **G**(*t*) mátrixok egy kétdimenziós sík *(x, y)* koordinátájú pontjait transzformálják egy *(x', y')* pontba. Határozzuk meg a transzformáció **orbitjait**, azaz egy adott (x_0, y_0) kezdőpont különböző *t* paraméterekkel eltranszformált képpontjainak mértani helyét! Milyen görbék ezek az orbitok? Vázoljuk fel a különböző orbitokat! (*Tanács:* forgassuk el a koordinátarendszert, majd küszöböljük ki a *t* paramétert!) Ismételjük meg a számítást a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ mátrixból kiindulva is! Vázoljuk fel az orbitokat!

(Csak ötösért!) Próbálkozzunk hasonló konstrukcióval az $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix alapján! Az exponenciális mátrixfüggvényt közvetlenül a hatványsor alapján számoljuk ki! Milyen lineáris transzformációt ír le a **G**(*v*) = exp (**N** *v*) mátrix, ha az *(x, t)* sík pontjaira hattatjuk? Milyen görbék az orbitok? Kinek a nevére utalhat a mátrix **G**(*v*) jelölése?

6. Legyen **a** és **b** az *n*-dimenziós tér két nem párhuzamos, nem nulla vektora! Vezessük be a következő operátort:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{a} \circ \mathbf{b} - \mathbf{b} \circ \mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2\, \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}\,\mathbf{b})^2}} \quad !$$

Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{P} = -\mathbf{R}^2$ operátor az **a** és **b** vektorok síkjára vetítő projektor! (*Tanács:* bontsunk fel egy tetszőleges **v** vektort **a** és **b** többszörösei, valamint egy mindkettőjükre merőleges **u** vektor összegére, és vizsgáljuk meg, mit tesz vele a **P** operátor!)

Legyen most a tér 3 dimenziós! Mi az **R** operátor geometriai jelentése? (*Segítség*: vezessük be a **c** = **a** x **b** vektort!) És mi az **R** operátor geometriai jelentése az *n > 3* dimenziós térben?

7. ***(Csak ötösért!)*** Értelmezzünk a háromdimenziós vektorok halmazán egy új, szorzás jellegű műveletet a következő képlet alapján:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}}{1 - \mathbf{a}\mathbf{b}}$$

A formula számlálójában a vektorok szokásos összeadása és vektoriális szorzása, a nevezőben pedig a skaláris szorzása szerepel. *(Ne törődjünk azzal, hogy a nevező bizonyos vektorok esetén nulla is lehet, ezért a csillagos szorzás eredménye ilyenkor „végtelen hosszú" vektor lesz. Ez a nehézség megfelelő óvatossággal végrehajtott határátmenet – egy kis légy perturbatív segítsége – útján kiküszöbölhető. Hasonló óvatos határátmenettel a „végtelen hosszú" vektorok szorzása is értelmezhető. Így a struktúra zárt lesz a műveletre nézve.)*

Explicit számolással mutassuk meg, hogy a fenti képlettel értelmezett művelet asszociatív, azaz számoljuk ki három vektor csillagos szorzatát mindkét lehetséges zárójelezéssel! Lássuk be, hogy ha a nevező okozta nehézségektől eltekintünk, akkor a a háromdimenziós tér vektorai erre a műveletre nézve csoportot alkotnak! Kommutatív-e ez a csoport? Mi a csoport egységeleme? Mi lesz egy vektor inverze a csillagos szorzásra nézve?

A fentiek szerint jól megválasztott művelet esetén egy vektorral akár osztani is lehet. Ez meglepő. Miért nem találkoztál eddigi vektoralgebrai tanulmányaid során ezzel a szorzással?