ALKALMAZOTT VEKTORSZÁMÍTÁS 1. Vizsgazh 2009. 01. 07.

Név	EHA-kód	email-cím	min elf. jegy

Munkaidõ 4 óra. Használható: Bronstein, zsebszámológép, órai jegyzet.

1. Értelmezzünk a valós számok halmazán egy új, *-gal jelölt műveletet: $x * y = x\,y + c\,x + c\,y + 1 - 4c$

A képletben szereplő *c* állandó értéke legyen $c = \left(\sqrt{13} - 3\right)/2$. Bemelegítésként: mennyi lesz $2 * 2$?

Mutassuk meg, hogy ha egyetlen számot kihagyunk a valós számok halmazából, a maradék elemek a *-gal jelölt műveletre nézve kommutatív csoportot alkotnak! Mely elemet kell kihagynunk a halmazból? Melyik szám lesz a csoport egységeleme!

Csak ötösért! Legyen a *-gal jelölt művelet a szorzás megfelelője, és keressünk hozzá egy új, $\oplus$-tel jelölt műveletet, amely az összeadásnak felel meg, azaz a *-os szorzással a szokásos disztributív viszonyban áll! Adjuk meg az új “összeadás” képletét a szokásos műveletekkel! Mutassuk meg, hogy e két műveletre nézve a valós számok halmaza kommutatív testet alkot!

2. Legyen A és B egy absztrakt struktúra két eleme. Vezessünk be köztük egy asszociatív (de nem kommutatív) szorzást, majd tekintsük a két elem összes lehetséges szorzatainak valós együtthatós lineárkombinációit! (Ez az ún. Clifford-algebrák konstrukciójának menete.)

Legyenek érvényesek az A és B elemre a következő műveleti szabályok: AA = 0, BB = 0, ABA = A, BAB = B, ahol a 0 az algebra mint lineáris tér nullvektorát jelöli.

Mutassuk meg, hogy az A és B elemek által generált fenti algebra (mint lineáris tér) ekkor véges dimenziós lesz! Keressünk egyszerűen kezelhető bázisvektorokat, írjuk fel szorzástáblázatukat, azaz határozzuk meg a struktúraállandókat! Bizonyítsuk be, hogy AB + BA = 1! Mit jelent ebben a képletben az 1?

A báziselemek szorzástáblázata alapján keressük meg az algebra legegyszerűbb, lehető legkisebb dimenziós mátrixábrázolását! (Csodálkozni fogunk, hogy milyen egyszerű...)

(*Megjegyzés:* a most konstruált algebra nem puszta játék. A harmadik félévben találkozni fogtok vele az optikában, a lencse- és tükörrendszerek leírásakor, az ötödik félévben, a kvantummező-elméletben pedig a Pauli-elv matematikai megfogalmazásánál.)

3. Legyen $\mathbf{F_1}$ az $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)$ vektorral megadott tengely körüli 120 fokos forgatás, $\mathbf{F_2}$ pedig a $\boldsymbol{b} = (1, 1, -1)$ vektorral megadott tengely körüli 60 fokos forgatás operátora. Határozzuk meg, hogy az $\mathbf{F_3} = \mathbf{F_1}\,\mathbf{F_2}$, illetve $\mathbf{F_4} = \mathbf{F_2}\,\mathbf{F_1}$ forgásmátrixok mely tengelyek körül forgatnak, valamint számoljuk ki az eredő forgásszögek cosinusát! Ügyeljünk a vektorok normálására! NE HASZNÁLJUNK tizedes törteket, kizárólag valódi törteket, illetve szükség esetén gyökös kifejezéseket!

4. Bizonyítsuk be általánosan is, hogy két forgásmátrix $\mathbf{F_3} = \mathbf{F_1}\,\mathbf{F_2}$, illetve $\mathbf{F_4} = \mathbf{F_2}\,\mathbf{F_1}$ szorzata (általában) más tengelyek körül, de mindig ugyanakkora szögekkel forgat!

5. Legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 34 & -12 \\ -12 & 41 \end{pmatrix}$. Tudjuk, hogy a $\mathbf{G}(t) = \exp(\mathbf{A}t)$ alakú mátrixok egyparaméteres kommutatív csoportot alkotnak (itt *t* tetszőleges valós szám). Ezek a mátrixok egy kétdimenziós sík (x, y) koordinátájú pontjait transzformálják egy (x’, y’) pontba. Határozzuk meg a transzformáció orbitjait, azaz egy adott (x_0, y_0) kezdőpont különböző *t* paraméterekkel eltranszformált képpontjainak mértani helyét! Milyen görbék ezek az orbitok? Vázoljuk fel a különböző orbitokat! (*Tanács:* küszöböljük ki a *t* paramétert!)