ALKALMAZOTT VEKTORSZÁMÍTÁS 1. Vizsgazh 2008. 01. 04.

Név	EHA-kód	email-cím	min elf. jegy

Munkaidõ 4 óra. Használható: Bronstein, zsebszámológép, órai jegyzet.

1. Értelmezzünk a valós számok halmazán egy új műveletet: $x * y = x\,y + x + y$

Mutassuk meg, hogy ha egyetlen számot kihagyunk a halmazból, a maradék elemek a *-gal jelölt műveletre nézve kommutatív csoportot alkotnak! Mely elemet kell kihagynunk a halmazból?

Csak ötösért! Legyen a *-gal jelölt művelet a szorzás megfelelője, és keressünk hozzá egy új, $\oplus$-tel jelölt műveletet, amely az összeadásnak felel meg, azaz a *-os szorzással a szokásos disztributív viszonyban áll! Adjuk meg az új "összeadás" képletét a szokásos műveletekkel! Mutassuk meg, hogy e két műveletre nézve a valós számok halmaza kommutatív testet alkot!

2. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{S}(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ alakú valós mátrixok kétdimenziós asszociatív algebrát alkotnak! Tekintsük ezeket a mátrixokat a komplex számok analógiájára értelmezett, $s = a + b\,\Omega$ alakú ún. Study-számok mátrix-reprezentációjának! Milyen összefüggést kell kielégítenie az Ω elemnek?

Vizsgáljuk meg a Study-számok algebráját! Mely elemeknek létezik reciprokuk, és mivel egyenlő ez? Számítsuk ki egy Study-szám n -ik hatványát (n pozitív egész)!

Csak ötösért! Tekintsük a $p(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k\, x^k$ valós együtthatós polinomot. Értelmezzük az $s = a + b\,\Omega$ Study-szám $p(s)$ polinomját, és adjunk rá zárt formulát! A konvergencia-problémákkal nem törődve értelmezzük az $e^s, \cos s, \sin s, e^{\Omega s}$ függvényeket! Fejezzük ki az $e^{\Omega s}$ függvényt a $\cos \Omega s$ és $\sin \Omega s$ függvények segítségével! Mely Study-számoknak értelmezhető a természetes logaritmusa, és mivel egyenlõ ez?

3. Legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$! Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A} = \alpha\ \mathbf{F}$, ahol α valós szám, **F** pedig egy valódi forgatást reprezentáló mátrix! Keressük meg, hogy mely tengely körül, és mekkora szöggel forgat az **F** mátrix! (Ügyeljünk az előjelekre!) Adjuk meg az **F** mátrix SU(2)-beli **U** megfelelőit is!

4. Legyen $\boldsymbol{a} = (3, 4, 12)$ és $\boldsymbol{b} = (2, -1, 2)$ két rögzített vektor, α és β pedig két szög, melyekre: $tg\ \alpha = 24/7$, $tg\ \beta = 120/119$. Adjuk meg az ***a*** vektor körül α szöggel történő forgatást leíró $\mathbf{F_1}$ SO(3)-beli forgásmátrixot, illetve a ***b*** vektor körül β szöggel történő forgatást leíró $\mathbf{F_2}$ forgásmátrixot, valamint a nekik megfelelő SU(2)-beli $\mathbf{U_1}$ és $\mathbf{U_2}$ mátrixokat! Ügyeljünk a normálásra! NE HASZNÁLJUNK tizedes törteket, kizárólag valódi törteket, illetve szükség esetén gyökös kifejezéseket (ezekre nem is lesz szükség)!

5. Számítsuk ki, hogy az előző feladatban szerepelt két forgásmátrix $\mathbf{F_3} = \mathbf{F_1 F_2}$, illetve $\mathbf{F_4} = \mathbf{F_2 F_1}$ szorzata mely tengelyek körül, mekkora szöggel forgat! Használjuk a térbeli tangenstételt!

6. ***Csak ötösért!*** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges két $\mathbf{F_1}$ és $\mathbf{F_2}$ forgatás szorzataként definiált új forgatás szöge nem függ az $\mathbf{F_1}$ és $\mathbf{F_2}$ forgatások sorrendjétől! (Az új forgástengely viszont függ a sorrendtől.)