ALKALMAZOTT VEKTORSZÁMÍTÁS 1.

Vizsgazh 2007. 01. 03.

Név	azonosító	email-cím	min jegy

Munkaidõ 4 óra. Használható: Bronstein, órai jegyzet.

1. Milyen algebrai struktúrát alkotnak az $\mathbf{M}(\alpha)=\mathbf{I}+\alpha\,\mathbf{c}\circ\mathbf{d}$ alakú mátrixok, ahol $\mathbf{c}\mathbf{d}=1$? (A képletben $\mathbf{I}$ a – tetszőleges dimenziós – egységmátrix, α valós skalárváltozó, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ ugyanolyan dimenziós rögzített valós vektorok.) Vizsgáljuk meg a szokásos mátrixmûveleteket (összeadás, skalárral szorzás, mátrixszorzás)! Ha szükséges, térjünk át más, egyszerűbben kezelhető paraméterre! Mely paraméter(ek) esetén nincs inverze az $\mathbf{M}(\alpha)$ mátrixnak? Számítsuk ki az inverzeket! Írjuk fel a mátrixcsaládot exponenciális mátrixfüggvény alakjában! (*Tanács* : keressük az inverz mátrixot is az $\mathbf{M}(\alpha)$ mátrixhoz hasonló $\mathbf{M}(\alpha')$ alakban, és adjuk meg az α' paramétert α függvényében! ~~Varázsige~~- izé: varázsfőnév: *projektorfelbontás*.)

2. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{S}(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ alakú valós mátrixok kétdimenziós asszociatív algebrát alkotnak! Tekintsük ezeket a mátrixokat a komplex számok analógiájára értelmezett, $s=a+b\,\Omega$ alakú ún. Study-számok mátrix-reprezentációjának! Milyen összefüggést kell kielégítenie az Ω elemnek?

Vizsgáljuk meg a Study-számok algebráját! Mely elemeknek létezik reciprokuk, és mivel egyenlő ez? Számítsuk ki egy Study-szám n -ik hatványát (n pozitív egész)!

Csak ötösért! Tekintsük a $p(x)=\sum_{k=0}^{N} c_k\, x^k$ valós együtthatós polinomot. Értelmezzük az $s=a+b\,\Omega$ Study-szám $p(s)$ polinomját, és adjunk rá zárt formulát! A konvergenciaproblémákkal nem törődve értelmezzük az $e^s, \cos s, \sin s, e^{\Omega s}$ függvényeket! Fejezzük ki az $e^{\Omega s}$ függvényt a $\cos \Omega s$ és $\sin \Omega s$ függvények segítségével! Mely Study-számoknak értelmezhető a természetes logaritmusa, és mivel egyenlõ ez?

3. Legyen $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ω pedig folytonos valós paraméter! Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{L}(\omega)=e^{\omega\mathbf{A}}$ alakú mátrixok csoportot alkotnak! (Számítsuk is ki az $\mathbf{L}(\omega)$ mátrixokat!) Hogyan fejezhető ki a csoport "szorzási szabálya" az ω paraméterek segítségével? Milyen lineáris transzformációt reprezentál az $\mathbf{L}(\omega)$ mátrix? Milyen alakzatba transzformálja ez a transzformáció az origó középpontú, a koordiátatengelyekel párhuzamos oldalú négyzetet?

4. Legyen $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, v pedig folytonos valós paraméter! Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{G}(v)=e^{v\mathbf{C}}$ alakú mátrixok csoportot alkotnak! (A $\mathbf{G}(v)$ mátrixot az exponenciális függvény hatványsora segítségével számíthatjuk ki, ugyanis a $\mathbf{C}$ mátrix nem egyszerű struktúrájú.) Hogyan fejezhető ki a csoport "szorzási szabálya" a v paraméterek segítségével? Milyen lineáris transzformációt reprezentál a $\mathbf{G}(v)$ mátrix? Milyen alakzatba transzformálja ez a transzformáció az origó középpontú, a koordiátatengelyekel párhuzamos oldalú négyzetet?

%

5. **Csak ötösért!** Definiáljunk három darab 3 * 3-as konstans mátrixot, jelük legyen $\mathbf{B}^{(k)}$, ahol k = 1, 2, 3 lehet. E mátrixok l-ik sorának m-ik oszlopában álló mátrixelem legyen $\mathbf{B}_{lm}^{(k)} = -\varepsilon_{klm}$, ahol ε_{klm} a Levi-Civita szimbólum.

a/ Írjuk fel explicit formában a $\mathbf{B}^{(k)}$ mátrixokat! Számítsuk ki páronként a szorzatukat és a kommutátorukat! Ellenőrízzük e számításokat általános, indexes formában is (azaz számítsuk ki a $\mathbf{B}^{(k)}\mathbf{B}^{(l)}$ mátrixszorzat *pq*-ik elemét! Írjuk fel általános formában a $\left[\mathbf{B}^{(k)},\mathbf{B}^{(l)}\right]$ kommutátort! Milyen ismert formulára (más ismert mátrixok kommutátorára) emlékeztet a formula?

b/ Lássuk be, hogy a három $\mathbf{B}^{(k)}$ mátrix valós együtthatós lineárkombinációi (azaz a $\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{3} v_k \mathbf{B}^{(k)}$ alakú mátrixok, ahol a v_k együtthatók tetszőleges valós számok) lineáris teret alkotnak! Milyen típusú mátrixok terét kapjuk így meg?

c/ Tegyük algebrává ezt a lineáris teret, algebrai szorzásként a mátrixok kommutátorát bevezetve! Zárt-e a tér a szorzásra nézve? Milyen típusú algebrát kaptunk? Melyik ismert algebrával izomorf ez az algebra?

d/ Tekintsük ennek az algebrának egy tetszőleges **b** elemét! A v_k együtthatókat tekinthetjük egy háromdimenziós valós $\mathbf{v}$ vektor komponenseinek is. Írjuk ezt a vektort $\mathbf{v} = \varphi\,\mathbf{n}$ alakba, ahol $\mathbf{n}$ egységvektor, φ pedig nemnegatív valós szám! Legyen $\mathbf{c} = \sum_{k=1}^{3} n_k \mathbf{B}^{(k)}$! Számítsuk ki a $\mathbf{b} = \varphi\,\mathbf{c}$ mátrix exponenciális függvényét, azaz az $\mathbf{F}(\varphi,\mathbf{n}) = e^{\mathbf{b}} = e^{\varphi \mathbf{c}} = e^{\varphi \sum_{k=1}^{3} n_k \mathbf{B}^{(k)}}$ mátrixot, majd ennek F_{kl} mátrixelemét! (Használjuk az e^x függvény hatványsoros definícióját, először a **c** mátrix négyzetét és köbét számítsuk ki, indexes formában!) Honnan ismerős a képlet?

e/ Mutassuk meg, hogy rögzített $\mathbf{n}$ egységvektor esetén az előbb definiált $\mathbf{F}(\varphi,\mathbf{n})$ mátrixok a mátrixszorzásra nézve csoportot alkotnak! Melyik csoport mátrixreprezentációját kaptuk így?