ALKALMAZOTT VEKTORSZÁMÍTÁS

Vizsgazh. 2006. 01. 06.

Munkaidő 4 óra. Használható: Bronstein, órai jegyzet, zsebszámológép.

1. Legyen **A** egy konstans n * n-es mátrix, t pedig egy folytonos valós paraméter. Definiáljuk a $\mathbf{G}(t) = e^{\mathbf{A}\,t}$ mátrixok halmazát. Bizonyítsuk be, hogy a **G**(*t*) mátrixok a mátrixszorzásra nézve kommutatív csoportot alkotnak! Melyik *t* paraméter felel meg az egységelemnek? Mi lesz a **G**(*t*) mátrix inverze? A mátrixok egy $\mathbb{V}$ lineáris téren hatnak. Legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ ennek egy pontja. Az $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{G}(t)\,\mathbf{x}$ pontok halmazát az **x** pont *orbit*jának nevezik (eközben a *t* paraméter befutja a valós számok halmazát – gondoljunk a t paramétert az időnek, ekkor az $\mathbf{x}'(t)$ pontok egy részecske pályáját jelentik). Bizonyítsuk be, hogy a különböző pontokhoz tartozó orbitok vagy egybeesnek, vagy diszjunktak, és együttesen lefedik az egész $\mathbb{V}$ lineáris teret!

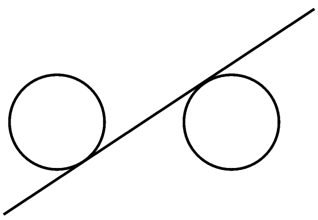
2. Az előbbi esetet konkrétizálva legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, ahol a és b valós állandók! A folytonos paramétert jelöljük *t*-vel! Számítsuk ki a **G**(*t*) mátrixokat! Írjuk fel explicit módon, komponensenként az $\mathbf{x} \to \mathbf{x}'(t)$ transzformáció képleteit! Mutassuk meg, hogy rögzített *a* és *b* esetén (bizonyos szinguláris eseteket, azaz speciális *a* és *b* értékeket kivéve) az összes pont orbitja egybevágó! Vizsgáljuk meg külön a szinguláris eseteket! Milyen görbék lesznek a pontok orbitjai a reguláris és a szinguláris esetekben?

3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges **M** négyzetes mátrixra igaz a $\det\left(e^{t\,\mathbf{M}}\right) = e^{t\,Sp\,\mathbf{M}}$ egyenlőség!

Tanács: ha a t paraméter túl nagy lenne, osszuk el egy elegendően nagy n számmal, majd korrigáljuk valahogy a lépés következményeit! Használjuk fel az **1**. feladat eredményeit! Alkalmazzuk a pongyola, de szemléletes "fizikus analízis" módszereit és érvelését!

4. Milyen algebrai struktúrát alkotnak az $\mathbf{N}(\beta) = \mathbf{I} + \beta\,\mathbf{c} \circ \mathbf{d}$ alakú mátrixok, ahol $\mathbf{c}\,\mathbf{d} = 0$? (A képletben $\mathbf{I}$ a – tetszőleges dimenziós – egységmátrix, β valós skalárváltozó, **c** és **d** ugyanolyan dimenziós rögzített valós vektorok.) Vizsgáljuk meg a szokásos mátrixműveleteket (összeadás, skalárral szorzás, mátrixszorzás)! Ha szükséges, térjünk át más, egyszerűbben kezelhető paraméterre! Mely paraméter(ek) esetén nincs inverze az $\mathbf{N}(\beta)$ mátrixnak? Számítsuk ki az inverzeket! Írjuk fel a mátrixcsaládot exponenciális mátrixfüggvény alakjában! (*Tanács* : keressük az inverzet is az $\mathbf{N}(\beta)$ mátrixhoz hasonló alakban!)

5. A speciális relativitáselméletben egy m tömegű részecske **p** impulzusa a következő formában fejezhető ki a részecske **v** sebességével: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}\Big/\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}$. Fogadjuk el továbbra is érvényesnek a részecskét gyorsító **F** erő és az impulzus Newton-féle $\mathbf{F} = d\,\mathbf{p}(t)/dt$ kapcsolatát! Írjuk fel az **F** erőt a részecske $\mathbf{a} = d\,\mathbf{v}(t)/dt$ gyorsulásával és **v** sebességével! Fejezzük ki az **a** gyorsulást az **F** erővel! Elfújja-e az erőt az éterszél? (*Tanács:* bontsuk fel a **v** sebességvektort $v = |\mathbf{v}|$ abszolút értéke és egy **n** egységvektor szorzatára! *Varázsige:* projektor!)



6. Messük el a tóruszt egy belülről kétszeresen érintő síkkal! Számítsuk ki a metszetgörbe görbületét és torzióját az érintési pontban, valamint a tórusz középpontjától legtávolabb eső pontjában! (*Varázsige:* paraméterezés!)