ALKALMAZOTT VEKTORSZÁMÍTÁS 1. Vizsgazh 2005. 01. 06.

Név	azonosító	email-cím	min jegy

Munkaidő 4 óra. Használható: Bronstein, órai jegyzet, zsebszámológép.
A feladatok egymásra épülnek, célszerű sorrendben foglalkozni velük!

1. Legyen **A** egy konstans n * n-es mátrix, t pedig egy folytonos valós paraméter. Definiáljuk a $\mathbf{G}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ mátrixok halmazát. Bizonyítsuk be, hogy a **G**(t) mátrixok a mátrixszorzásra nézve kommutatív csoportot alkotnak! Melyik t paraméter felel meg az egységelemnek? Mi lesz a **G**(t) mátrix inverze? A mátrixok egy $\mathbb{V}$ lineáris téren hatnak. Legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ ennek egy pontja. Az $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{G}(t)\,\mathbf{x}$ pontok halmazát az **x** pont *orbit*jának nevezik (eközben a t paraméter befutja a valós számok halmazát – gondoljunk a t paramétert az időnek, ekkor az $\mathbf{x}'(t)$ pontok egy részecske pályáját jelentik). Bizonyítsuk be, hogy a különböző pontokhoz tartozó orbitok vagy egybeesnek, vagy diszjunktak, és együttesen lefedik az egész $\mathbb{V}$ lineáris teret!

2. Az előbbi esetet konkrétizálva legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$! A folytonos paramétert jelöljük ezúttal v-vel! Számítsuk ki (az exponenciális függvény hatványsora segítségével) a **G**(v) mátrixokat! Írjuk fel explicit módon, komponensenként az $\mathbf{x} \to \mathbf{x}'(t)$ transzformáció képleteit! Milyen görbék lesznek a pontok orbitjai? Pótkérdés: milyen betűkkel célszerű jelölni a kétdimenziós $\mathbb{V}$ tér koordinátáit? És kiről nevezzük el magát a transzformációt, illetve a csoportot?

3. Legyen most $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, a folytonos paraméter pedig ω ! A csoportot alkotó mátrixokat jelöljük $\mathbf{L}(\omega)$ -val. Ismételjük meg az előző feladatban leírt vizsgálatokat! (Az exponenciális mátrixfüggvényt most a szokásos módon számítsuk ki, lévén a mátrix egyszerű struktúrájú!) Keressük meg az összes különböző típusú orbitot a síkon!

4. Definiáljunk három darab 3 * 3-as konstans mátrixot, jelük legyen $\mathbf{B}^{(k)}$, ahol k = 1, 2, 3 lehet. E mátrixok l-ik sorának m-ik oszlopában álló mátrixelem legyen $\mathbf{B}^{(k)}_{lm} = -\varepsilon_{klm}$, ahol ε_{klm} a Levi-Civita szimbólum.

a/ Írjuk fel explicit formában a $\mathbf{B}^{(k)}$ mátrixokat! Számítsuk ki páronként a szorzatukat és a kommutátorukat! Ellenőrízzük e számításokat általános, indexes formában is (azaz számítsuk ki a $\mathbf{B}^{(k)}\mathbf{B}^{(l)}$ mátrixszorzat pq-ik elemét! Írjuk fel általános formában a $\left[\mathbf{B}^{(k)}, \mathbf{B}^{(l)}\right]$ kommutátort! Milyen ismert formulára (más ismert mátrixok kommutátorára) emlékeztet a formula?

b/ Lássuk be, hogy a három $\mathbf{B}^{(k)}$ mátrix valós együtthatós lineárkombinációi (azaz a $\mathbf{b} = v_k \mathbf{B}^{(k)}$ alakú mátrixok, ahol a v_k együtthatók tetszőleges valós számok, k-ra automatikus szummázás működik) lineáris teret alkotnak! Milyen típusú mátrixok terét kapjuk így meg?

c/ Tegyük algebrává ezt a lineáris teret, algebrai szorzásként a mátrixok kommutátorát bevezetve! Zárt-e a tér a szorzásra nézve? Milyen típusú algebrát kaptunk? Melyik ismert algebrával izomorf ez az algebra?

d/ Tekintsük ennek az algebrának egy tetszőleges **b** elemét! A v_k együtthatókat tekinthetjük egy háromdimenziós valós $\mathbf{v}$ vektor komponenseinek is. Írjuk ezt a vektort $\mathbf{v} = \varphi\,\mathbf{n}$ alakba, ahol $\mathbf{n}$ egységvektor, φ pedig nemnegatív valós szám! Számítsuk ki a $\mathbf{b} = \varphi\,\mathbf{c}$ mátrix exponenciális függvényét, azaz az $\mathbf{F}(\varphi, \mathbf{n}) = e^{\varphi \mathbf{c}} = e^{\varphi n_k \mathbf{B}^{(k)}}$ mátrixot, majd ennek F_{kl} mátrixelemét! (Használjuk az e^x függvény hatványsoros definícióját, először a **c** mátrix négyzetét és köbét számítsuk ki, indexes formában!) Honnan ismerős a képlet?

A **4**. számú feladat **helyett** (vagy **mellett**) a kevésbé absztrakt vénájúak megoldhatják az alábbi **két** feladatot is:

5. Vizsgáljuk meg a következő másodrendű felületet! Hozzuk az egyenletet kanonikus alakra, határozzuk meg a felület fő jellemzőit (milyen típusú felület, tengelyeinek hossza stb), jellegzetes pontjainak koordinátáit, vázoljuk fel elhelyezkedését az eredeti koordinátarendszerben!

$$4x^2 + 5z^2 - 8xy - 12xz + 4yz + 18x - 24y + 30z - 3 = 0$$

6. Tekintsük az előző feladatban vizsgált felület egyenletének kanonikus alakját (azaz üljünk bele az elforgatott és eltolt koordinátarendszerbe)! Messük el a felületet az $R = 1$ sugarú, origó középpontú gömbbel! Számítsuk ki a metszetgörbe görbületét és torzióját tetszőleges pontjában! Ügyeljünk a megfelelő paraméterezésre! Mely pontokban legnagyobb, illetve legkisebb a görbület értéke?