09.19.

Fuchs: Algebra
Út a modern algebrához
[algebrai topológia]

$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$
$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$

Descartes-szorzat: $A \times B$
$(a_1, b_1) \in A \times B$ $\quad a_1 \in A,\ b_1 \in B$

$S_1 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Pl.: $(1,2) \in S_1$; $(0,7) \in S_1$; $(7,0) \notin S_1$

→ ez itt egy "<" reláció

→ jelölés: $a R b$

$S_2 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Pl.: $(1,1) \in S_2$, $(2,2) \in S_2$, $(3,7) \notin S_2$ → "="

$S_3 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Pl.: $(2,4) \in S_3$, $(3,27) \in S_3$ → "osztója", jelölés: $a | b$

(A relációk egyik típusa:)

Ekvivalencia reláció

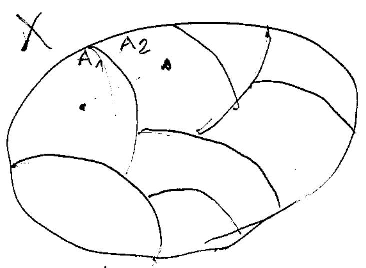
$\forall a: aRa$ → reflexív

$\boxed{\forall a, b: aRb \to bRa}$ → szimmetrikus

$\boxed{\forall a, b, c: aRb \land bRc \to aRc}$ → tranzitív

Pl.: $5 \equiv 17 \mod 3$
mindkét számot 3-mal osztva 2 a maradék → ekviv. rel.

Nem átfedő (diszjunkt) részhalmazok:



$A_1 \subset X$

$A_2 \subset X$ $\Rightarrow$ ekv. rel.

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\mapsto$ = ekvivalencia osztályokra bontjuk a halmazt
= pikkelyezés

(Másik típus:)

Def.: aRb, bRa és $a=b$ összefüggések közül pontosan egy teljesül

Rendezési reláció*

$\boxed{\{a<b \text{ vagy } b<a \text{ vagy } a=b\}}$ $\Rightarrow$ trichotómia
(a 3 közül 1 és csak 1 teljesül)

$\forall a: a \not< a$ $\rightarrow$ irreflexív

$\boxed{\forall a,b,c: a<b \wedge b<c \rightarrow a<c}$ $\rightarrow$ tranzitív

$\boxed{\forall a,b: a<b \wedge b<a \Rightarrow a=b}$ $\rightarrow$ antiszimmetrikus

Pl: $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Pl: $A \times B \times C$: (a,b,c)

$(2,1,3) \in S$; $(2,1,4) \notin S$ $\Rightarrow$ $a+b=c$ $(A \times B \longmapsto C)$
(a műveletek is relációk)

Pl: $A \times A \longmapsto B$ skaláris szorzás

Pl: $A \times B \longmapsto B$ skalárral való szorzás

*Egy relációt akkor nevezünk $\boxed{\text{rendezési reláció}}$nak, ha:

- $\forall a: aRa$ $\rightarrow$ reflexív
- $\boxed{\forall a,b: aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b}$ $\rightarrow$ antiszimmetrikus
- $\boxed{\forall a,b,c: aRb \wedge bRc \rightarrow aRc}$ $\rightarrow$ tranzitív

$\boxed{09.26.}$ Rózsa Pál: Bevezetés a mátrixelméletbe

skalárszorzat:

$(\vec{a}\vec{b})\vec{c} \neq \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$ → ez nem asszociativitás, mert: $s\cdot\vec{c} \neq \vec{a}\cdot s$, $s \in \mathbb{S}$

$aa = a$, pl: $A \cap A = A$ vagy $A \cup A = A$

$a^2 = a$ → idempotens művelet

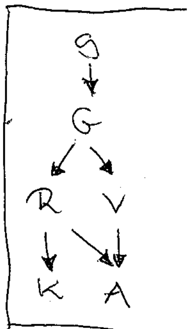
agresszív elem: $\exists a : \forall b : a \cdot b = a$ (pl. szorzásra: 0)(pl. $1^x = 1$)

Félcsoport (S, semigroup)

$(S, *)$: • asszociatív
• zárt

Pl: stringek konkatenálása
• egységelem: üres string

félcsoport: S
csoport: G
gyűrű: R
test: K
vektortér: V
algebra: A



Egységelemes félcsoport ↑

Kommutatív félcsoport: $(\mathbb{N}, +)$(pl.)

Csoport(G): ∃ egységelem, ∃ inverz (pl. $(\mathbb{Z}, +)$ vagy $(\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$)

M)
$\left.\begin{array}{l}(\mathbb{Z}, +) \text{ - kommutatív csoport} \\ (\mathbb{Z}, \cdot) \text{ - egységelemes félcsoport}\end{array}\right\} (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ - gyűrű

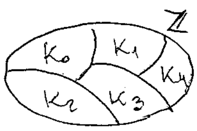
M) négyzetes mátrixok NEM kommutatív gyűrűt alkotnak

M) operátorok szintén gyűrűt alkotnak

$K_0 \subset \mathbb{Z}$: $K_0 = \{$öttel maradék nélkül osztható számok$\}$

$K_3 \subset \mathbb{Z}$: $K_3 = \{$5-tel osztva 3 maradékot adó számok$\}$

$\bigcup_{k=0}^{4} K_k = \mathbb{Z}$



Kongruencia: $3 + 4 \equiv 2 \mod 5$ ((3 maradékot ad + 4 m.a. ≡ 2 m.a.))

→ modulo 5 kongruencia, kongr. jelölése: ≡

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

⇒ ciklikus permutáció

⇒ C_5 csoport (izomorf a C_5 csoporttal)

⇒ jelölés: $(\mathbb{Z}_5, +)$

$(\mathbb{Z}_5, \cdot)$:

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

pl: $3 \cdot 4 = 7 \mod 5 = 2$

→ nem csoport, mert a csoportban ∀ sorban ~~egy~~ ∀ szám csak egyetlenegyszer szerepel

→ ha elhagyjuk a nullákat, akkor már csoportot alkot

→ ez egy TEST

$(\mathbb{Z}_6, +)$:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$(\mathbb{Z}_6, \cdot)$:

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

gyűrű, amelyben két nemnulla elem szorzata = 0

(M) az 5 prímszám, a 6 nem

Prímszámok esetén ez a struktúra véges testet alkot. Jelölés: $\mathbb{F}_5$ test.

A nemprímes maradékosztályok pedig gyűrűt.

(M) 2-vel való osztás maradékosztálya: $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

$(\mathbb{Z}_2, +)$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\Rightarrow C_2$

$(\mathbb{Z}_2, \cdot)$	0	1
0	0	0
1	0	1

ez a legkisebb test, neve: $\mathbb{F}_2$

$\mathbb{V}_S = \mathbb{V}$ vektortér az S skalártest fölött

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\vec{e}, \vec{f} \in \mathbb{V}$

$\vec{v} = \alpha\vec{e} + \beta\vec{f}$

Bevezetünk egy új műveletet:

$$\vec v = \alpha\vec e + \beta\vec f \in A$$

$*: A\times A \mapsto A$ (ez legyen kompatibilis a lineáris műveletekkel, azaz:)

$$\left.\begin{aligned}(\vec v+\vec u)*\vec w &= (\vec v*\vec w)+(\vec u*\vec w)\\ (\lambda\vec u)*\vec v &= \lambda(\vec u*\vec v)\end{aligned}\right\}$$

$$(\lambda\vec u+\beta\vec v)*\vec w = \lambda(\vec u*\vec w)+\beta(\vec v*\vec w)$$

$\rightarrow$ <u>algebra ~~test~~</u>

$$\vec u = \gamma\vec e + \delta\vec f$$

$$\vec u*\vec v = (\alpha\vec e+\beta\vec f)*(\gamma\vec e+\delta\vec f) = \alpha\gamma(\vec e*\vec e)+\beta\gamma(\vec f*\vec e)+\alpha\delta(\vec e*\vec f)+$$
$$+\beta\delta(\vec f*\vec f) = (**)$$

(M) Ilyen műveleteknél elég megmondani, hogy mi történik a bázisokkal, és így az összes vektorra el tudjuk végezni. n elemű bázisnál n^2 ilyen "szabályt" kell megadni. (***)

Pl:
$$\left.\begin{aligned}\vec e*\vec e &= \vec e\\ \vec e*\vec f &= \vec f\\ \vec f*\vec e &= \vec f\\ \vec f*\vec f &= -\vec e\end{aligned}\right\} 2^2 \text{ szabály} = \left\{\begin{aligned}\vec e*\vec e &= 1\cdot\vec e + 0\cdot\vec f\\ \vec e*\vec f &= 0\cdot\vec e + 1\cdot\vec f\\ \vec f*\vec e &= 0\cdot\vec e + 1\cdot\vec f\\ \vec f*\vec f &= (-1)\vec e + 0\cdot\vec f\end{aligned}\right.$$

$$(**) = \alpha\gamma\vec e + \beta\gamma\vec f + \alpha\delta\vec f - \beta\delta\vec e = (\alpha\gamma-\beta\delta)\vec e + (\beta\gamma+\alpha\delta)\vec f$$

(***)
ezeket úgy hívjuk, hogy az algebra struktúraállandói

$\vec e \to 1$

$\vec f \to i$

	$\vec e$	$\vec f$
$\vec e$	$\vec e$	$\vec f$
$\vec f$	$\vec f$	$-\vec e$

	1	i
1	1	i
i	i	-1

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d] & \\ & G \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ R \arrow[d] \arrow[drr] & & V \arrow[d] \\ K & & A \end{tikzcd}$$

(M) A komplex számok algebrát alkotnak a valós számok felett. (Testet is alkotnak egyben.) (Nem $\forall$ algebra test.)

(M) Az egyetlen (fontos) új szabály: $i\cdot i = -1$.

10.03. elmaradt

10.10.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$$
$$(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} = \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) - \vec{b}(\vec{a}\vec{c})$$
$$(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}(\vec{c}\vec{b}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

ennek a háromnak az összege $= \vec{0}$

Jacobi-féle azonosság:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} + (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} + (\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = \vec{0}$$
$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

Lie-algebra: $(V^3, \times)$

Komplex számok (kommutatív test)**

$\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}$ bázis:

$\vec{e}^{(1)} * \vec{e}^{(1)} = \vec{e}^{(1)}$ $\quad$ $\vec{e}^{(2)} * \vec{e}^{(1)} = \vec{e}^{(2)}$

$\vec{e}^{(1)} * \vec{e}^{(2)} = \vec{e}^{(2)}$ $\quad$ $\vec{e}^{(2)} * \vec{e}^{(2)} = -\vec{e}^{(1)}$

$\vec{v} = a\vec{e}^{(1)} + b\vec{e}^{(2)}$ $\Rightarrow$ (hiperkomplex rendszer)

** de tekinthetjük rá algebraként is

(M) A komplex számoknál be van ágyazva a valós sz. halmaza, ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), viszont a vegyes szorzat + vektoroknál NINCS, a vektortér a skalárok halmaza FÖLÖTT van.

(M) A vegyesszorzatnál nincs egységelem.

$\dim V = n$

$\vec{e}^{(0)}, \vec{e}^{(1)}, \dots, \vec{e}^{(n-1)}$

$\vec{e}^{(0)} * \vec{e}^{(k)} = \vec{e}^{(k)}$

hiperkomplex rendszerek

(ez egy meghatározott szabály, a többi $\vec{e}^{(l)} * \vec{e}^{(m)}$ szabályt mi határozzuk meg (és így alkothatunk saját hk. rendszert))

Komplex számok bővítése:

Triád: $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i + \gamma \cdot j$: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

(Hamilton 3 dimenziós algebrává bővítette a $\mathbb{C}$-t, de nem tudta testté bővíteni (nem működik a szorzás))

emiatt:

Kvaternió: ebből már lehet testet alkotni *

(M) nyolc elemből (októnió)** lehet még testet alkotni, több elemből már nem.

* ehhez fel kellett adni a szorzás kommutativitását

** ehhez pedig a szorzás asszociativitását

Kvaterniók: q

$$q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \quad ; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

(M) négydimenziós vektorteret alkotnak: összeadás, skalárral szorzás ennek megfelelően működik

kvaterniók összeszorzása:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	−1	k	−j
j	j	−k	−1	i
k	k	j	−i	−1

$\mathbb{C}$

nemkommutatív a szorzás: $ij \neq ji$

$\mathbb{C}$ be van ágyazva a kvaterniók halmazába

$q_1 = \alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k$

$q_2 = \alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k$

Szorzat:

$$q_3 = q_1 q_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k) =$$

$$= (\underbrace{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2}_{***}) + (\underbrace{\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2}_{***} + \underbrace{\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2}_{****}) i +$$

$$+ (\underbrace{\alpha_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2}_{***} + \underbrace{\delta_1\beta_2 - \beta_1\delta_2}_{****}) j + (\underbrace{\alpha_1\delta_2 + \delta_1\alpha_2}_{***} + \underbrace{\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2}_{****}) k$$

Konjugált:

$$\bar{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$$

Konjugálttal való szorzás:

$$q\bar{q} = (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k) =$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + (-\alpha\beta + \beta\alpha - \gamma\delta + \delta\gamma) i +$$

$$+ (\qquad\qquad) j + (\qquad\qquad) k =$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k =$$

$$q\bar{q} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = |q|^2$$ (négydim. Pithagorasz-tétel)

ez mindig pozitív

Reciprok: (M) a kvaterniókkal lehet osztani, ezért alkotnak testet.

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\bar{q}}{\bar{q}} = \frac{\bar{q}}{q \cdot \bar{q}} = \frac{\bar{q}}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}$$ (a nullának nincs reciproka!)

A kvaterniók ferdetestet alkotnak (a szorzás nem kommutatív)

1) Frobenius mutatta meg, hogy 8 elemnél többől nem lehet számtestet alkotni.

$z_1 = r_1 e^{i\varphi}$ $\quad r_1 = |z_1|$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$

$$\Downarrow \quad (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$$

Ez igaz a kvaterniókra és oktoniókra is.

$q_1 q_2 \neq q_2 q_1$ ezért ki lehet őket vonni egymásból:

$$\frac{1}{2}(q_1 q_2 - q_2 q_1) = (\gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2) i + (\delta_1 \beta_2 - \beta_1 \delta_2) j + (\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2) k$$

$\to$ szimmetrikusak $\to$ kiesnek

antiszimmetrikusak $\to$ nem esnek ki + negatív kombó

(M) $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2 \\ \delta_1 \beta_2 - \beta_1 \delta_2 \\ \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2 \end{bmatrix}$ $\to$ ez Lie-algebra

$\boxed{10.17.}$

$\mathbb{H} \ni q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$\mathbb{H}_v \ni q = \beta i + \gamma j + \delta k$

$\uparrow$ részhalmaz (3 dim. altér)

$\mathbb{H}_v \ni q_1, q_2 \qquad q_1 \cdot q_2 = \to$

$ii = jj = kk = -1$
$ij = k \quad ji = -k$
$jk = i \quad kj = -i$
$ki = j \quad ik = -j$

$$q_1 q_2 = (\beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k)(\beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k) =$$
$$= (-\beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2) + (\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2) i +$$
$$+ (\delta_1\beta_2 - \beta_1\delta_2) j + (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) k$$ ← kivezet $\mathbb{H}_v$-ből

$$q_2 q_1 = (-\beta_2\beta_1 - \gamma_2\gamma_1 - \delta_2\delta_1) + (\gamma_2\delta_1 - \delta_2\gamma_1) i +$$
$$+ (\delta_2\beta_1 - \beta_2\delta_1) j + (\beta_2\gamma_1 - \gamma_2\beta_1) k$$

$$\{q_1, q_2\} \overset{\text{Def.}}{=} \frac{q_1 q_2 + q_2 q_1}{2} = -(\beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2) \Leftrightarrow$$ skaláris szorzat

(-1)-szerese

$$[q_1, q_2] \overset{\text{Def.}}{=} \frac{q_1 q_2 - q_2 q_1}{2} = (\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2) i + (\delta_1\beta_2 - \beta_1\delta_2) j +$$
$$+ (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) k \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\beta_1\\ \gamma_1\\ \delta_1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\beta_2\\ \gamma_2\\ \delta_2\end{bmatrix}$$ (vektoriális szorzat)

$e^{(1)} \leftrightarrow i$
$e^{(2)} \leftrightarrow j$
$e^{(3)} \leftrightarrow k$

$$\vec{v}_1 = \beta_1 \vec{i} + \gamma_1 \vec{j} + \delta_1 \vec{k}$$

1) A kvaterniók szorzása magában foglalja a (háromdimenziós) skaláris és vektoriális szorzatot.

$[q_1, q_2]$ = kommutátor, két vektorhoz egy vektort rendel ($\mathbb{H}_v \times \mathbb{H}_v \to \mathbb{H}_v$)

$\{q_1, q_2\}$ = antikommutátor, —"— skalárt —"— ($\mathbb{H}_v \times \mathbb{H}_v \to \mathbb{R}$)

$$q = \alpha + \underbrace{v_1 i + v_2 j + v_3 k}_{\vec{v}} = \alpha + \vec{v} \longrightarrow \begin{array}{l}\alpha = \operatorname{Re} q\\ \vec{v} = \operatorname{Vec} q\end{array}$$

$$0 + \vec{v} \in \mathbb{H}_v$$

1) Kvaterniók: asszociatív (nemkommutatív) algebra
Szintén ilyen a négyzetes mátrixok halmaza
(...... ...ekkel érdemes)

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{K}} = -\underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = +\underline{\underline{K}}$$

$$\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{I}} = -\underline{\underline{K}}$$

$$\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{J}} = -\underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{J}}$$

$$\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{K}} = -\underline{\underline{J}} \qquad (***)$$

$$\underline{\underline{Q}} = \alpha \underline{\underline{E}} + \beta \underline{\underline{I}} + \gamma \underline{\underline{J}} + \delta \underline{\underline{K}} \longleftrightarrow q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$$

$$\underline{\underline{Q}} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - i\delta & -\gamma - i\beta \\ \gamma - i\beta & \alpha + i\delta \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{I}} &= \underline{\underline{B}}^{(1)} \\ \underline{\underline{J}} &= \underline{\underline{B}}^{(2)} \\ \underline{\underline{K}} &= \underline{\underline{B}}^{(3)} \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{B}}^{(k)} \underline{\underline{B}}^{(l)} = \sum_m \varepsilon_{klm} \underline{\underline{B}}^{(m)} - \delta_{kl} \underline{\underline{E}}$$

$$\left(\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{B}}^{(0)}\right)$$

$\Downarrow$

(A fenti szorzási szabályokat (***) így lehet röviden kifejezni).

$\downarrow$

(M) Az ezek a mátrixok által alkotott lineáris tér a komplex számok felett 4 dimenziós, a valós számok felett 8 dimenziós.

$$\mathbb{C}: \quad \alpha[\;] + \beta[\;] + \gamma[\;] + \delta[\;] \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \neq \alpha,\beta,\gamma,\delta$$

$$\mathbb{R}: \quad \alpha[\;] + \beta[\;] + \gamma[\;] + \delta[\;] + \varepsilon[\;] + \varphi[\;] + \phi[\;] + [\;]$$

Írjuk fel az i-t is mátrixként!

$$\underline{\underline{i}} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ -1 & & & \end{array}\right] \qquad \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} & & -1 & \\ & & & -1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & -1 \\ & & 1 & \end{array}\right]$$

(Kvaterniók 4 dim. valós ábrázolása ↑)

Hipermátrix: mátrixokból álló mátrix

Pauli mátrixok:

• jelölés: σ (kis szigma)

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} = i \cdot \underline{\underline{B}}^{(k)}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{(l)} = \left(i \underline{\underline{B}}^{(k)}\right)\left(i \underline{\underline{B}}^{(l)}\right) = -\underline{\underline{B}}^{(k)} \underline{\underline{B}}^{(l)} = -\sum_m \varepsilon_{klm} \underbrace{\underline{\underline{B}}^{(m)}}_{= -i\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}} + \delta_{kl} \underline{\underline{E}}$$

$$= i \sum_m \varepsilon_{klm} \sigma^m + \delta_{kl} \underline{\underline{E}} j + (\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2) k$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{\sigma}}^{(l)} = \delta_{kl} \underline{\underline{E}} + i \sum_m \varepsilon_{klm} \underline{\underline{\sigma}}^{(m)}$$

Vezessük be a $\underline{\underline{\Xi}}^{(k)}$ mátrixokat!

$$\underline{\underline{\Xi}}^{(k)} = \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\, \underline{\underline{R}}^{-1}$$

(ekvivalencia transzformáció)

zárójelek elhagyhatók:

$$\underline{\underline{\Xi}}^{(k)} \underline{\underline{\Xi}}^{(l)} = \left(\underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{R}}^{-1}\right)\left(\underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{\sigma}}^{(l)} \underline{\underline{R}}^{-1}\right) = R\, \sigma^{(k)} \left(R R^{-1}\right) \sigma^{(l)} R =$$

$$= R\, \sigma^{(k)} \sigma^{(l)} R^{-1} = R\left(\delta_{kl} I + i \sum_m \varepsilon_{klm} \sigma^{(m)}\right) R^{-1} =$$

$$= \delta_{kl}\left(R I R^{-1}\right) + i \sum_m \varepsilon_{klm} \left(R \sigma^{(m)} R^{-1}\right) =$$

$$= \delta_{kl}\, \underline{1} + i \sum_m \varepsilon_{klm}\, \Xi^{(m)}$$

(ugyanaz igaz rá, mint a Pauli-mátrixokra $\Rightarrow$ a Pauli-mátrixokat máshogy is meg lehetett volna választani)

(M) $Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\right) = 0 \leftarrow$ traceless

(M) $\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \leftarrow$ hermitikus mátrixok (adjungáltja önmaga)

$$\underline{\underline{Q}} = \alpha\, \underline{1} - \beta\, \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - \gamma\, \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} - \delta\, \underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = \alpha\, \underline{1} - v_1 \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - v_2 \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} - v_2 \underline{\underline{\sigma}}^{(3)}$$

$$= \alpha - \underline{v}\, \underline{\sigma}$$

Kvaterniók térbeli forgatása:

$a \in \mathbb{H}$

$q \in \mathbb{H}_v$

$$q' = a q \bar{a}$$

11.07.

$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ $\underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

A Pauli-mátrixok tulajdonságai:

1. $\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{\sigma}}^{(l)} = \delta_{kl} \underline{\underline{1}} + i \sum_m \varepsilon_{klm} \underline{\underline{\sigma}}^{(m)}$

Legyen egy ekvivalencia-reláció:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(k)'} = \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{R}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(k)'} \underline{\underline{\sigma}}^{(l)'} = (\underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{R}}^{-1})(\underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{\sigma}}^{(l)} \underline{\underline{R}}^{-1}) = \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{\sigma}}^{(l)} \underline{\underline{R}}^{-1} =$$

$$= \underline{\underline{R}} \left(\delta_{kl} \underline{\underline{1}} + i \sum_m \varepsilon_{klm} \underline{\underline{\sigma}}^{(m)} \right) \underline{\underline{R}}^{-1} =$$

$$= \delta_{kl} \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{1}}\, \underline{\underline{R}}^{-1} + i \sum_m \varepsilon_{klm} \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{\sigma}}^{(m)} \underline{\underline{R}}^{-1} =$$

$$= \delta_{kl} \underline{\underline{1}} + i \sum_m \varepsilon_{klm} \underline{\underline{\sigma}}^{(m)'}$$

Vagyis: $\underline{\underline{\sigma}}^{(k)'} \underline{\underline{\sigma}}^{(l)'} = \delta_{kl} \underline{\underline{1}} + i \sum_m \varepsilon_{klm} \underline{\underline{\sigma}}^{(m)'}$

Az operátor alaptulajdonsága nem változik meg más bázison.

2. $\left.\begin{matrix} Sp(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}) = 0 \\ \det(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}) = -1 \end{matrix}\right\}$ $f_{\sigma^{(k)}}(\lambda) = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -1$ (bármilyen bázison)

3. $\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}$ hermitikus (önadjungált)

(M) Az önadjungált és a hermitikus véges dimenzióban ugyanazt jelenti, végtelenben van egy kis különbség köztük.

Adjungált: $\underline{\underline{A}}^+ = (\tilde{\underline{\underline{A}}})^* = \widetilde{(\underline{\underline{A}}^*)}$

$$\widetilde{(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})} = \tilde{\underline{\underline{B}}} \tilde{\underline{\underline{A}}} \Rightarrow (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^+ = (\tilde{\underline{\underline{B}}} \tilde{\underline{\underline{A}}})^* = \tilde{\underline{\underline{B}}}^* \tilde{\underline{\underline{A}}}^*$$

$$(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)'})^+ = (\underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{R}}^{-1})^+ = (\underline{\underline{R}}^{-1})^+ \underline{\underline{\sigma}}^{(k)+} \underline{\underline{R}}^+ = (\underline{\underline{R}}^{-1})^+ \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{R}}^+ \neq \underline{\underline{\sigma}}^{(k)}$$

• ha $(\underline{\underline{R}}^{-1})^{+} = \underline{\underline{R}}$ $\Rightarrow$ egyenlőség, hiszen $\underline{\underline{R}}^{+} = \underline{\underline{R}}^{-1}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\sigma}}^{(k)+} = \underline{\underline{\sigma}}^{(k)}$

• ortogonális mátrixszal : $\tilde{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}}^{-1}$ $\Rightarrow$ $\underline{u}' = \underline{\underline{F}}\underline{u}$ $\Rightarrow$ $\underline{u}'\underline{v}' \overset{?}{=} \underline{u}\underline{v}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{v}' = \underline{\underline{F}}\underline{v}$

• esetünkben (komplex eset) uniter mátrixra van szükség

• ha $\underline{\underline{R}}$ uniter $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\sigma}}^{'(k)+} = \underline{\underline{\sigma}}^{'(k)}$

A Pauli-mátrixok lineárisan függetlenek.

$$\alpha\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} + \beta\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} + \gamma\underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i\beta \\ i\beta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma & \alpha - i\beta \\ \alpha + i\beta & -\gamma \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma) = (0,0,0)$$

(M) Vegyük ennek a három mátrixnak a lineáris burkát.
Ha $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ relativisztikus kvantummechanika.

Legyen $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ (nem mindegy, hogy bizonyos objektumokat valós vagy komplex vektortérben vesszük)

$\Downarrow$

valós vektortér attól függetlenül, $\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}$-ban van komplex, mert itt a skalárok számítanak

(M) ha $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ lenne, akkor a $\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}$-k nem lennének lin. függetlenek.

A Pauli-mátrixok valós lineáris kombinációja is spurtalan 2×2-es hermitikus mátrix. Ez a legáltalánosabb 2×2-es herm. mátrix.

Legyen $\underline{\underline{M}} \in H_0$ (H_0 2×2-es) úgy, hogy $Sp\,\underline{\underline{M}} = 0$?

$\underline{\underline{M}}^{+} = \underline{\underline{M}}$

Ekkor $\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}$ háromdim. valós lineáris tér bázisa (és H_0 háromd. lin. tér) : $\rightarrow$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \iff a_1 \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} + a_2 \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} + a_3 \underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 - i a_2 \\ a_1 + i a_2 & -a_3 \end{bmatrix}$$

Izomorf a kettő; kölcsönösen egyértelmű leképezés (bijekció).
Azonos skalárok felett definiált vektorterek injektívek egymással, mindegyikhez hozzárendelhetünk egy számoszlopot

$$a_1 \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} + a_2 \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} + a_3 \underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 - i a_2 \\ a_1 + i a_2 & -a_3 \end{bmatrix}$$

$$\|$$

$$\underline{\underline{H}}(a) \longleftrightarrow a \underline{\underline{\sigma}}$$

vagyis: $\mathbb{R}^3 \leftrightarrow H_0$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \leftrightarrow & H_0 \\ \Psi & & \Psi \\ \underline{a} & \leftrightarrow & \underline{\underline{H}}(\underline{a}) \end{array}$$

Pl.: $\underline{e}^{(k)} \Rightarrow \underline{a} = \sum_k a_k \underline{e}^{(k)} \longleftrightarrow \underline{\underline{H}}(\underline{a}) = \sum_k a_k \underline{\underline{\sigma}}^{(k)}$.

Kibányászhatunk ilyen értékeket:

$$\underline{\underline{H}}(\underline{a}) \underline{\underline{\sigma}}^{(l)} = \left(\sum_k a_k \underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\right) \underline{\underline{\sigma}}^{(l)} = \sum_k a_k \left(\delta_{kl} \underline{\underline{1}} + i \sum_m \varepsilon_{klm} \underline{\underline{\sigma}}^{(m)}\right) =$$

$$= \left(\sum_k \delta_{kl} a_k\right) \underline{\underline{1}} + i \sum_k \sum_m \varepsilon_{klm} a_k \underline{\underline{\sigma}}^{(m)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sp}\left(\underline{\underline{H}}(\underline{a}) \underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\right) = a_l \underbrace{\operatorname{Sp} \underline{\underline{1}}}_{2} + i \sum_k \sum_m \varepsilon_{klm} a_k \big(\underbrace{\operatorname{Sp} \underline{\underline{\sigma}}^{(m)}}_{0}\big) \overset{?}{=} a_l \cdot 2$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{2} \operatorname{Sp}\left(\underline{\underline{H}}(\underline{a}) \underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\right)$$

Vegyünk két vektort!

$$\left.\begin{array}{l} \underline{a} \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \underline{\underline{H}}(\underline{a}) \\ \underline{b} \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \underline{\underline{H}}(\underline{b}) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{H}}(\underline{a}) \underline{\underline{H}}(\underline{b}) = \left(\sum_k a_k \underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\right)\left(\sum_l b_l \underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\right) =$$

$$= \sum_k \sum_l a_k b_l \left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\right) =$$

$$= \sum_k \sum_l a_k b_l \left(\delta_{kl} \underline{\underline{1}} + i \sum_m \varepsilon_{klm} \underline{\underline{\sigma}}^{(m)} \right) =$$

$$= \left(\sum_k \sum_l a_k b_l \delta_{kl} \right) \underline{\underline{1}} + i \sum_k \sum_l \sum_m \varepsilon_{klm} a_k b_l \underline{\underline{\sigma}}^{(l)} =$$

$$= (\underline{a}\underline{b}) \underline{\underline{1}} + i \sum_m (\underline{a} \times \underline{b})_m \underline{\underline{\sigma}}^m$$

$$\boxed{\underline{\underline{H}}(\underline{a}) \underline{\underline{H}}(\underline{b}) = (\underline{a}\underline{b}) \underline{\underline{1}} + i \underline{\underline{H}}(\underline{a} \times \underline{b})}$$

Minden $\underline{\underline{H}}$ spurtalan $\Rightarrow$ $Sp(\underline{\underline{H}}(\underline{a}) \underline{\underline{H}}(\underline{b})) = Sp[(\underline{a}\underline{b})\underline{\underline{1}}] + i \cdot Sp[\underline{\underline{H}}(\underline{a}\times\underline{b})]$:

$$\underline{a}\underline{b} = \frac{1}{2} Sp(\underline{\underline{H}}(\underline{a}) \underline{\underline{H}}(\underline{b}))$$

Vagy: $\underline{\underline{H}}(\underline{b}) \underline{\underline{H}}(\underline{a}) = (\underline{b}\underline{a}) \underline{\underline{1}} + i \underline{\underline{H}}(\underline{b} \times \underline{a})$

$$\underline{\underline{H}}(\underline{b}) \underline{\underline{H}}(\underline{a}) = (\underline{a}\underline{b}) \underline{\underline{1}} - i \underline{\underline{H}}(\underline{a} \times \underline{b})$$

$$\underline{\underline{H}}(\underline{a}) \underline{\underline{H}}(\underline{b}) - \underline{\underline{H}}(\underline{b}) \underline{\underline{H}}(\underline{a}) = -2i \underline{\underline{H}}(\underline{a} \times \underline{b})$$

$$\boxed{\underline{\underline{H}}(\underline{a} \times \underline{b}) = \frac{1}{2i} \left[\underline{\underline{H}}(\underline{a}) \underline{\underline{H}}(\underline{b}) - \underline{\underline{H}}(\underline{b}) \underline{\underline{H}}(\underline{a}) \right]}$$

Ezek a szabályok ugyanazok, mint amikre Hamilton rajött a kvaternióknál.

Vegyük észre: $|\underline{a}|^2 = -\det \underline{\underline{H}}(\underline{a})$

$$|\underline{a}|^2 = \frac{1}{2} Sp(\underline{\underline{H}}^2(\underline{a}))$$

Induljunk ki a valós háromdim. vektorok teréből!

$$\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \qquad \underline{a} = \sum_k a_k \underline{e}^{(k)} \longleftrightarrow \underline{\underline{H}}(\underline{a}) = \sum_k a_k \underline{\underline{\sigma}}^{(k)}$$

Vegyünk olyan unitér mátrixot, melyek determinánsa 1:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\underline{U}}^+ = \underline{\underline{U}}^{-1} \\ \det(\underline{\underline{U}}) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow SU(2) \text{ csoport elemei}$$

~~Elf. bebizonyítani, hogy~~

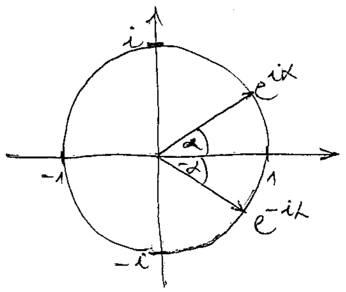
$$\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{U}}_1^+ = \underline{\underline{U}}_1^{-1} \\ \underline{\underline{U}}_2^+ = \underline{\underline{U}}_2^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{U}}_3 = \underline{\underline{U}}_2 \underline{\underline{U}}_1 \Rightarrow \underline{\underline{U}}_3^+ = \underline{\underline{U}}_3^{-1}$$

$$\underline{\underline{U}}_3^+ = \underline{\underline{U}}_1^+ \underline{\underline{U}}_2^+ = \underline{\underline{U}}_1^{-1} \underline{\underline{U}}_2^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{U}}_3 \underline{\underline{U}}_3^{+} = \underline{\underline{U}}_2 \underline{\underline{U}}_1 \underline{\underline{U}}_1^{-1} \underline{\underline{U}}_2^{-1} = \underline{\underline{1}} \quad \text{QED}$$

Tehát $\underline{\underline{U}}^+ \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{1}}$ és $(\det \underline{\underline{U}}^+)(\det \underline{\underline{U}}) = \det(\underline{\underline{1}}) = 1$

$$(\det \underline{\underline{U}}^{*}) = (\det \underline{\underline{U}})^* \rightarrow (\det \underline{\underline{U}}^+)(\det \underline{\underline{U}}) = (\det \underline{\underline{U}})^* (\det \underline{\underline{U}}) = 1$$

$\Rightarrow$ ezek a determinánsok az egységkörön vannak



$\Rightarrow$ Unitér mátrix determinánsa $e^{i\alpha}$ alakú, és azok, akiknek pont 1 lesz a det. $\rightarrow$ SU(2) alcsoport.

(M) A kvarkokat SU(3) írja le.

Legyen $\underline{\underline{U}} \in SU(2)$

$$\mathbb{R}^3 \ni \underline{a} = \sum_k a_k \underline{e}^{(k)} \longleftrightarrow \underline{\underline{H}}(a) = \sum_k a_k \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \longleftrightarrow \underline{\underline{U}}\, \underline{\underline{H}}(a) \underline{\underline{U}}^{-1}$$

állítás: $\underline{\underline{H}}'(a) \in H_0 \quad (\mathrm{Sp}(H_0) = 0$ és $\det(H_0) \overset{?}{=} 1)$

$$\mathrm{Sp}\, \underline{\underline{H}}' = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{U}}^{-1}) = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{U}}^{-1}\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}) = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{H}}) = 0$$

$$(H')^+ = (\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{U}}^{-1})^+ = (\underline{\underline{U}}^{-1})^+ \underline{\underline{H}}^+ \underline{\underline{U}}^+ = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{U}}' = H' \Rightarrow \det(\underline{\underline{H}}) = 1$$

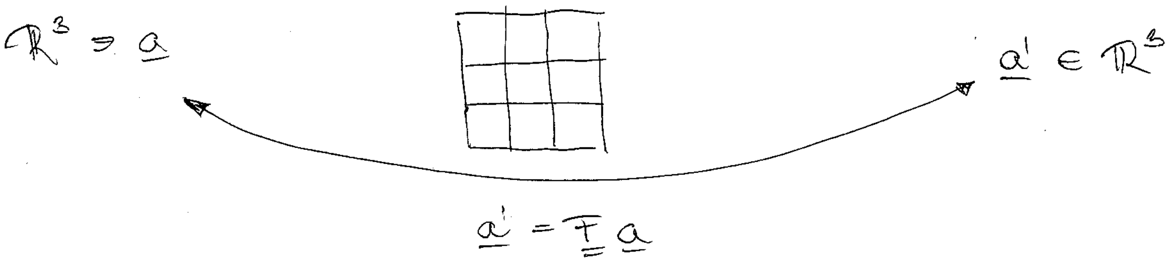
$$\underline{\underline{H}}'(\underline{a}) \in H_0 \Rightarrow \exists a' \in \mathbb{R}^3 \text{ u.h. } \underline{\underline{H}}'(\underline{a}) = \underline{\underline{H}}(\underline{a}') \,?$$

de:

$$\mathbb{R}^3 \ni \underline{a} = \sum_k a_k \underline{e}^{(k)} \leftrightarrow \underline{\underline{H}}(\underline{a}) = \sum_k a_k \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} \longleftrightarrow \underline{\underline{H}}'(\underline{a}) = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}' = \underline{\underline{H}}(\underline{a}')$$

Hozzárendeltünk egy $\underline{a}$ vektorhoz egy $\underline{a}'$ vektort. Ez lin. művelet: $\underline{\underline{H}}(\underline{a} + \underline{b}) = \underline{\underline{H}}(\underline{a}) + \underline{\underline{H}}(\underline{b}) \Rightarrow \underline{a}' + \underline{b}' \longrightarrow \underline{a} + \underline{b}$

Ez egy lineáris művelet. Léteznie kell egy valamilyen $\underline{\underline{F}}$ mátrixnak, ami ezt megvalósítja.



$$\underline{a}'\underline{b}' = \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{H}}(\underline{a}')\,\underline{\underline{H}}(\underline{b}')\right) = \frac{1}{2} Sp\left[\left(\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right)\left(\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{b})\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} Sp\left[\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{H}}(\underline{b})\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right] = (\Downarrow) = \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{H}}(\underline{b})\right) = \underline{a}\,\underline{b}$$

a spurképzés ? ciklikus (mint a transzponálás) ("hátsó mátrix, előre fuss!")

Tehát az $\underline{\underline{F}}$ mátrix skalárszorzattartó $\Rightarrow$ forgatás jellegű.

$\det(\underline{\underline{F}}) = 1 \rightarrow$ ortogonális csoport (spec. $SO(3)$) (valódi forgatás)

$\det(\underline{\underline{F}}) = -1 \rightarrow$ ortogonális csoport (tükrözéses forgatás)

Ha a fentit felírjuk a keresztszorzatra is: kiderül, hogy $\det(\underline{\underline{F}}) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{F}} \in SO(3)$: valódi forgatás.

Most: $$a'_k = \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{H}}(\underline{a}')\,\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\right) = \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a}')\right) = \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(\underline{a})\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\,\underline{\underline{U}}\left(\sum_l a_l \underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\right)\underline{\underline{U}}^{-1}\right) = \frac{1}{2}\sum_l \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right) a_l =$$

$$= \sum_l \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right) a_l$$

De $$a'_k = (\underline{\underline{F}}\,\underline{a})_k = \sum_l F_{kl}\, a_l = \sum_l \left(\frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right)\right) a_l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{kl} = \frac{1}{2} Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right)$$

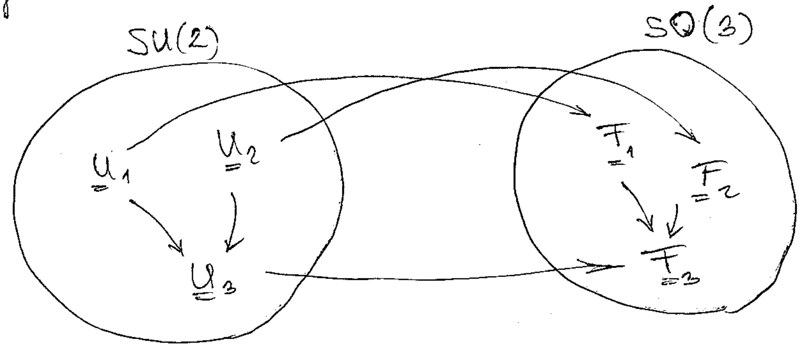
Csináljuk meg még egyszer: ~~[illegible]~~

$$\begin{tikzcd}
\underline{a} \arrow[r, "\underline{\underline{U}}_1"] \arrow[r, bend right, "\underline{\underline{F}}_1"'] \arrow[rr, bend left=40, "\underline{\underline{U}}_3 = \underline{\underline{U}}_2 \underline{\underline{U}}_1"] \arrow[rr, bend right=50, "\underline{\underline{F}}_3 = \underline{\underline{F}}_2 \underline{\underline{F}}_1"'] & \underline{a}' \arrow[r, "\underline{\underline{U}}_2"] \arrow[r, bend right, "\underline{\underline{F}}_2"'] & \underline{a}''
\end{tikzcd}$$

$$\underline{\underline{H}}(\underline{a}'') = \underline{\underline{U}}_2 \underline{\underline{H}}(\underline{a}') \underline{\underline{U}}_2^{-1} = \underline{\underline{U}}_2 \left(\underline{\underline{U}}_1 \underline{\underline{H}}(\underline{a}) \underline{\underline{U}}_1^{-1}\right) \underline{\underline{U}}_2^{-1} = \left(\underline{\underline{U}}_2 \underline{\underline{U}}_1\right) \underline{\underline{H}}(\underline{a}) \left(\underline{\underline{U}}_1^{-1} \underline{\underline{U}}_2^{-1}\right)$$

Legyen $\underline{\underline{U}}_2 \underline{\underline{U}}_1 = \underline{\underline{U}}_3 \Rightarrow \underline{\underline{H}}(\underline{a}'') = \underline{\underline{U}}_3 \underline{\underline{H}}(\underline{a}) \underline{\underline{U}}_3^{-1}$

Így:

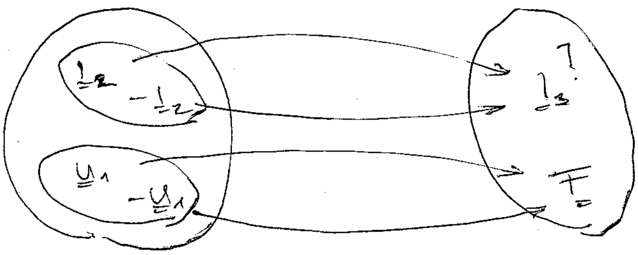


Homomorfizmus SU(2) és SO(3) között. Nem kölcsönösen egyértelmű!

Ha $\underline{\underline{U}}_1$-et és $-\underline{\underline{U}}_1$-et vizsgálom, mindkettőre ugyanazt kapom.

$\underline{\underline{1}}_2$-vel: $(-\underline{\underline{1}}_2) \underline{\underline{H}} (-\underline{\underline{1}}_2) = \underline{\underline{1}}_2 \underline{\underline{H}} \underline{\underline{1}}_2$

Vagyis: $\underline{\underline{1}}_2 \to \underline{\underline{1}}_3$ és $-\underline{\underline{1}}_2 \to \underline{\underline{1}}_3$



Homomorfizmus magja normálosztó.
Az egységelem $\underline{\underline{1}}_3$ képe: $(\underline{\underline{1}}_2, -\underline{\underline{1}}_2)$

$\overset{?}{T}(\underline{\underline{1}}_2) = -\underline{\underline{1}}_2$

(M.) Ez a C_2 csoport lesz. Ez az elektron [illegible]

A spin teljesen csoportelméleti fogalom!

(M) Lesz a ZH-ban egy ilyen feladat: forgatást $\underline{\underline{U}}$-val ~~[illegible]~~ gyorsabb, $\underline{\underline{U}}$-t pedig Paulival gyorsabb.

$\boxed{11.14.}$ ELMARADT

$\boxed{11.21.}$ ELMARADT

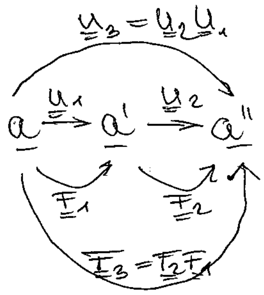
$\boxed{11.27.}$

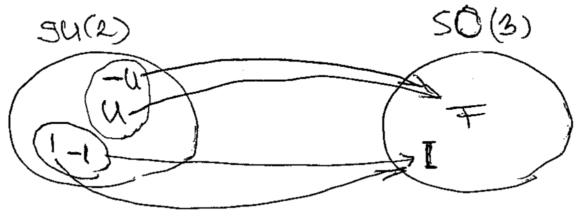
$$\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)} = \delta_{kl}\underline{\underline{1}} + i\,\varepsilon_{klm}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}$$

$$\mathbb{R}^3 \ni \underline{a} = a_k \underline{e}^{(k)} \longleftrightarrow a_k \underline{\underline{\sigma}}^{(k)} = \underline{\underline{H}}(a) \xrightarrow{\underline{\underline{U}} \in SU(2)} \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(a)\,\underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{H}}'(a) =$$

$$= \underline{\underline{H}}(a') \longleftrightarrow a' \in \mathbb{R}^3$$

$$\underline{a}' = \underline{\underline{F}}\,\underline{a}, \qquad \underline{\underline{F}} \in SO(3)$$





$$a_k = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\,\underline{\underline{H}}(a)\right)$$

$$a'_k = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\,\underline{\underline{H}}(a')\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{H}}(a)\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\,\underline{\underline{U}}\,a_l\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right)$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\,\underline{\underline{U}}^{-1}\right)\right]}_{F_{kl}} a_l = F_{kl}\,a_l$$

$$C_2 \triangleleft SU(2)$$

$$SU(2)/C_2 \approx SO(3)$$

Megpróbáljuk konstruálni egy $SU(2)$-beli $\underline{\underline{U}}$ mátrixot $\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \longrightarrow$$ 2×2-es mátrix inverzének kiszámítása

$$SU(2) \ni \underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{U}}^+ = \begin{bmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{U}}^{-1} = \begin{bmatrix} z_4 & -z_2 \\ -z_3 & z_1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det}$$

$$\underline{\underline{U}}^+ = \underline{\underline{U}}^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned} z_1^* &= z_4 \\ z_3^* &= -z_2 \\ z_2^* &= -z_3 \\ z_4^* &= z_1 \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{U}} = z_1 z_1^* + z_2^* z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$$

$$z_1 := \cos(\alpha) \cdot e^{i\beta}$$

$$z_2 := \sin(\alpha) \cdot e^{i\gamma}$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot e^{i\beta} & \sin\alpha \cdot e^{i\gamma} \\ -\sin\alpha \cdot e^{-i\gamma} & \cos\alpha \cdot e^{-i\beta} \end{bmatrix} = \underline{\underline{U}}(\alpha, \beta, \gamma)$$

$\downarrow$ az $\underline{\underline{U}}$ mátrix egyik standard alakja

$\downarrow$ 3 valós paraméterrel írható le

Mátrix másik standard alakja:

$$z_1 := a + ib$$

$$z_2 := c + id$$

$(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

$$\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix} \longrightarrow \det \underline{\underline{U}} = (a^2+b^2)+(c^2+d^2) = 1$$

$$\cancel{xxx} = a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix} =$$

$$= a\cdot\underline{\underline{1}} + ib\cdot\underline{\underline{\sigma}}^{(3)} + ic\,\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} + id\,\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} =$$

$$= a\underline{\underline{1}} - i\underbrace{\left(-d\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} - c\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} - b\underline{\underline{\sigma}}^{(3)}\right)}_{v_k\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} = \underline{\underline{H}}(v)} = \left(\underline{v} := \begin{bmatrix}-d\\ -c\\ -b\end{bmatrix}\right) =$$

$$= a\underline{\underline{1}} - i\underline{\underline{H}}(\underline{v})$$

$$a^2 + \underline{v}\,\underline{v} = 1 \qquad \underline{v} = v\cdot\underline{n} \qquad |\underline{n}| = 1$$

$$a^2 + v^2 = 1$$

$$a := \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad b := \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

(M) $a_k\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} = \underline{a}\,\underline{\sigma}$

A Másik standard alak ez: $U(\varphi, \underline{n}) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\underline{\underline{1}} - i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)(\underline{n}\,\underline{\sigma})$

$\in SU(2) \qquad \varphi \in \mathbb{R}\;;\; |\underline{n}| = 1$

(A) $\underline{\underline{U}} = e^{-i\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\,\underline{\sigma})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-i\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\,\underline{\sigma})\right)^k}{k!} = \cancel{xxxx}$

(B) (indexes írásmóddal)

$$(\underline{n}\,\underline{\sigma})^2 = n_k\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\,n_l\underline{\underline{\sigma}}^{(l)} = n_k n_l\,\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)} = n_k n_l\left(\delta_{kl}\underline{\underline{1}} + i\varepsilon_{klm}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}\right) =$$

$$= n_k n_l\delta_{kl}\underline{\underline{1}} + i\underbrace{\varepsilon_{klm} n_k n_l}_{0}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)} = n_k n_k\underline{\underline{1}} + 0 = \underline{n}\,\underline{n}\,\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{1}}$$

$$\cancel{xxxx} = \left(\sum_{k\,\text{pts}} \frac{\left(-i\frac{\varphi}{2}\right)^k}{k!}\right)\underline{\underline{1}} + \left(\sum_{k\,\text{ptl}} \frac{\left(-i\frac{\varphi}{2}\right)^k}{k!}\right)(\underline{n}\,\underline{\sigma}) = \rightarrow$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^4}{4!} + \dots\right)}_{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \underline{\underline{1}} - i \underbrace{\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^5}{5!} - \dots\right)}_{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} (\underline{n}\underline{\underline{\sigma}})$$

✓

$$\underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{U}}^{+} = \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \underline{\underline{1}} + i \sin\frac{\varphi}{2} \cdot (\underline{n}\underline{\underline{\sigma}})$$

$$\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{U}}^{+} = \left(\cos\frac{\varphi}{2}\underline{\underline{1}} - i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\underline{\sigma}})\right)\left(\cos\frac{\varphi}{2}\underline{\underline{1}} + i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\underline{\sigma}})\right) =$$

$$= \cos^2\frac{\varphi}{2}\,\underline{\underline{1}}\,\underline{\underline{1}} - i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\underline{\sigma}}) + i\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\underline{\sigma}}) + \sin^2\frac{\varphi}{2}\underbrace{(\underline{n}\underline{\underline{\sigma}})^2}_{\underline{\underline{1}}} =$$

$$= \underline{\underline{1}}$$ ✓

$$F_{kl} = ?$$

$$F_{kl} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\underline{\underline{U}}^{-1}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left[\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\underline{\underline{1}} - i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\underline{\sigma}})\right)\underline{\underline{\sigma}}^{(l)} \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}\underline{\underline{1}} + i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\underline{\sigma}})\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\right) + \frac{i}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}(\underline{n}\underline{\underline{\sigma}})\right) -$$

$$- \frac{i}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}(\underline{n}\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\right) + \frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}(\underline{n}\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}(\underline{n}\underline{\underline{\sigma}})\right) =$$

$$= \frac{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{2}\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\right) + \frac{i}{2}n_m\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}\right) -$$

$$- \frac{i}{2}n_m \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\right) + n_p n_q \frac{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{2}\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(p)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\underline{\underline{\sigma}}^{(q)}\right)$$

(M) $\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)} = \delta_{kl}\underline{\underline{1}} + i\varepsilon_{klm}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}$

$= \rightarrow$ ~~xxxx~~

(M) $Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\right) = Sp\left(\delta_{kl}\underline{\underline{1}} + i\varepsilon_{klm}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}\right) = \delta_{kl}\underbrace{(Sp\,\underline{\underline{1}})}_{=2} + i\varepsilon_{klm}\underbrace{(Sp\,\underline{\underline{\sigma}}^{(m)})}_{=0} =$

$= 2\cdot\delta_{kl}$

(M) $Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}\right) = Sp\left[\left(\delta_{kl}\underline{\underline{1}} + i\varepsilon_{klp}\underline{\underline{\sigma}}^{(p)}\right)\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}\right] =$

$= Sp\left(\delta_{kl}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)} + i\varepsilon_{klp}\underline{\underline{\sigma}}^{(p)}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}\right) = \delta_{kl}\underbrace{(Sp\,\underline{\underline{\sigma}}^{(m)})}_{=0} + i\varepsilon_{klp}\left(Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(p)}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}\right)\right)$

$= i\cdot\varepsilon_{klp}\cdot 2\delta_{pm} = 2i\cdot\varepsilon_{klm}$

(M) $Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(p)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\underline{\underline{\sigma}}^{(q)}\right) = Sp\left[\left(\delta_{kp}\underline{\underline{1}} + i\cdot\varepsilon_{kpt}\underline{\underline{\sigma}}^{(t)}\right)\left(\delta_{lq}\underline{\underline{1}} + i\varepsilon_{lqs}\underline{\underline{\sigma}}^{(s)}\right)\right] =$

$= \delta_{kp}\delta_{lq}\underbrace{Sp(\underline{\underline{1}}\,\underline{\underline{1}})}_{2} + i\varepsilon_{kpt}\delta_{lq}\underbrace{Sp(\underline{\underline{\sigma}}^{(t)}\underline{\underline{1}})}_{0} + i\delta_{kp}\varepsilon_{lqs}\underbrace{Sp(\underline{\underline{1}}\,\underline{\underline{\sigma}}^{(s)})}_{0} -$

$- \varepsilon_{kpt}\varepsilon_{lqs}Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(t)}\underline{\underline{\sigma}}^{(s)}\right) = 2\delta_{kp}\delta_{lq} - \varepsilon_{kpt}\varepsilon_{lqs}2\delta_{ts} = *$

(M) $\varepsilon_{abc}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ap} & \delta_{aq} & \delta_{ar} \\ \delta_{bp} & \delta_{bq} & \delta_{br} \\ \delta_{cp} & \delta_{cq} & \delta_{cr} \end{vmatrix}$ $\rightarrow$ ha két index egybeesik: $(\delta\delta - \delta\delta)$ képlet

$* = 2\left(\delta_{kp}\delta_{lq} - \varepsilon_{kps}\varepsilon_{lqs}\right) = 2\left(\delta_{kp}\delta_{lq} - \varepsilon_{kps}\underbrace{\varepsilon_{slq}}\right) =$

$= 2\left(\delta_{kp}\delta_{lq} - \left(\delta_{kl}\delta_{pq} - \delta_{kq}\delta_{pl}\right)\right)$ (nem lehet tovább egyszerűsíteni)

(M)

$Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}(\underline{n}\underline{\sigma})\right) = n_m Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\underline{\underline{\sigma}}^{(m)}\right) = 2i\,n_m\varepsilon_{klm}$

$Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}(\underline{n}\underline{\sigma})\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}(\underline{n}\underline{\sigma})\right) = Sp\left[\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\left(n_p\underline{\underline{\sigma}}^{(p)}\right)\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\left(n_q\underline{\underline{\sigma}}^{(q)}\right)\right] =$

$= n_p n_q Sp\left(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(p)}\underline{\underline{\sigma}}^{(l)}\underline{\underline{\sigma}}^{(q)}\right) = n_p n_q 2\left(\delta_{kp}\delta_{lq} - \delta_{kl}\delta_{pq} + \delta_{kq}\delta_{pl}\right) =$

$= 2\left[\underbrace{n_p\delta_{kp}}_{n_k}\underbrace{n_q\delta_{lq}}_{n_l} - n_p\delta_{kl}\underbrace{\delta_{pq}n_q}_{n_p} + \underbrace{\delta_{kq}n_q}_{n_k}\underbrace{n_p\delta_{pl}}_{n_l}\right] =$

1

$= 2\left[2n_k n_l - \delta_{kl}\right]$ (tükrözés)

$** = \ldots$

$$\cdot_{kl} = \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2} 2\delta_{kl} + \frac{i}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} n_m 2i\varepsilon_{klm} - \frac{i}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} n_m 2i\varepsilon_{kml}$$

$$+ \frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2} 2\left[2n_k n_l - \delta_{kl}\right] =$$

$$= \cos^2\frac{\varphi}{2}\delta_{kl} - \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} n_m\varepsilon_{klm} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} n_m\varepsilon_{kml} +$$

$$+ \sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot 2n_k n_l - \sin^2\frac{\varphi}{2}\delta_{kl} =$$

$$= \left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\delta_{kl} + 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} n_m\varepsilon_{kml} + (1-\cos\varphi)n_k n_l =$$

M: $\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} = \cos\varphi$

$1 - \sin^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} = \cos\varphi$

$1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = \cos\varphi$

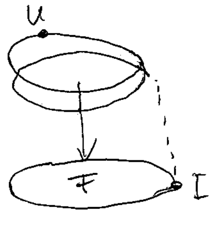
$2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 - \cos\varphi$

$$F_{kl} = \cos\varphi\cdot\delta_{kl} + (1-\cos\varphi)n_k n_l + \sin\varphi\,\varepsilon_{kml} n_m$$

↳ (forgatás mátrixa)!

$$SU(2): \quad -n \;\underset{\varphi=4\pi}{\overset{\varphi=2\pi}{\rightleftarrows}}\; n \quad (\varphi = 0)$$

Pl.: befőttesgumit 8-asba hajtani, és egymásra fordítani a két karikát:



→ kétszeres fedés

↓

fedő celeképezés

(algebrai topológia) ←

Ajánlott: A tér alakja c. könyv

vagy: Jefremovics – Szemléletes topológia (fizweb)

$\boxed{12.05.}$

$$SU(2) \ni U(\underline{n},\varphi) = e^{-i\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})} = \cos\frac{\varphi}{2}\,\underline{1} - i\sin\frac{\varphi}{2}(\underline{n}\underline{\sigma})$$

$$F_{k\ell} = \frac{1}{2}Sp(\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\sigma}}^{(\ell)}\underline{\underline{U}}^{-1}) = \delta_{k\ell}\cos\varphi + n_k n_\ell(1-\cos\varphi) + \varepsilon_{km\ell}\, n_m \sin\varphi$$

$$SU(2) \ni \underline{\underline{U}} \to \underline{\underline{F}} \in SO(3)$$
$$-\underline{\underline{U}} \to \underline{\underline{F}}$$

$U_2U_1 \longrightarrow F_2F_1$ (két forgatás egymás után)

(forgatás: skalárszorzattartó)

$\hookrightarrow$ csoportot alkotnak

$\hookrightarrow$ sajátvektor $(\lambda = 1)$ = forgástengely

(M) 180°-os forgatások $\to$ különlegesek, mert a $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$, és így nem emelhető ki a $\cos()$. Mo: perturbáció, így elvégezhető ez:

$$U(\underline{n},\varphi) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(\underline{1} - i\,tg\left(\frac{\varphi}{2}\right)\underline{n}\underline{\sigma}\right) = **$$

$$\underline{\mu} := \underline{n}\cdot tg\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad = \text{Rodrigues-vektor}$$

$$** = \cos\frac{\varphi}{2}(\underline{1} - i\underline{\mu}\underline{\sigma})$$

Szorzásuk:

$$U(\alpha,\underline{e}) \qquad \underline{\mu} = \underline{e}\cdot tg\frac{\alpha}{2}$$
$$U(\beta,\underline{f}) \qquad \underline{q} = \underline{f}\cdot tg\frac{\beta}{2}$$

$$U(\beta,\underline{f})\cdot U(\alpha,\underline{e}) = \cos\frac{\beta}{2}(\underline{1} - i\underline{q}\underline{\sigma})\cdot\cos\frac{\alpha}{2}(\underline{1} - i\underline{\mu}\underline{\sigma}) =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\underline{1} - i\underline{q}\underline{\sigma} - i\underline{\mu}\underline{\sigma} - (\underline{q}\underline{\sigma})(\underline{\mu}\underline{\sigma})\right) = *** \Rightarrow$$

$$(\underline{q}\underline{\sigma})(\underline{\mu}\underline{\sigma}) = \underline{\underline{H}}(\underline{q})\cdot\underline{\underline{H}}(\underline{\mu}) = q_k\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\mu_\ell\underline{\underline{\sigma}}^{(\ell)} = q_k\mu_\ell\,\underline{\underline{\sigma}}^{(k)}\underline{\underline{\sigma}}^{(\ell)} = \Rightarrow$$

$$= q_k p_l \left(\delta_{kl} \underline{\underline{1}} + i\,\varepsilon_{klm}\, \underline{\underline{\sigma}}^{(m)}\right) = q_k p_k \underline{\underline{1}} + i\left(\varepsilon_{klm} q_k p_l\right) \underline{\underline{\sigma}}^{(m)}$$

(M) $(q\sigma)(p\sigma) = (qp)\underline{1} + i(q\times p)\sigma$

$$M(q)M(p) = (qp)\underline{1} + i(M(q\times p))$$

$$\cancel{***} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\underline{1} - iq\underline{\sigma} - ip\underline{\sigma} - (qp)\underline{1} - i(q\times p)\underline{\sigma}\right) =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left((1-qp)\underline{1} - i(p+q+q\times p)\underline{\underline{\sigma}}\right) =$$

$$= \underbrace{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}(1-qp)}_{\cos\frac{\varphi}{2}}\left(\underline{1} - i\underbrace{\frac{q+p+q\times p}{1-qp}}_{r}\underline{\sigma}\right) = \cos\frac{\varphi}{2}\left(\underline{1} - ir\underline{\sigma}\right)$$

(M) Ez a fenti számolás megmutatta, hogy egy α szögű $\underline{e}$ tengely körüli és egy β szögű $\underline{f}$ tengely körüli forgatás egymás utáni elvégzése milyen tengely k-i, milyen szögű forgatást eredményez.

$$\underline{r} = \frac{q+p+q\times p}{1-qp} = q * p \quad \text{(ez egy új vektorművelet)}$$

(*): asszociatív ; van inverz és egység (nullvektor)

(0 szögű forgatás)

csoport

(mi van, ha a nevező 0? → perturbáció)

(!) itt lehetnek „∞ hosszú" vektorok) ~~[illegible]~~

$\Downarrow$

$$p = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\underline{e} = |p|\cdot\underline{e}$$

$$\alpha \to \pi$$

$$\frac{\alpha}{2} \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \to \infty$$

$$r = \frac{q+|k|e + q\times|k|e}{1-q|k|e} = \frac{\frac{1}{|k|}q + e + q\times e}{\frac{1}{|k|} - qe} \xrightarrow[\infty]{|k|} \frac{e+q\times e}{-qe}$$

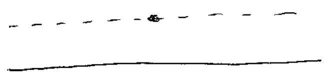
Metszik-e egymást az egyenesek a végtelenben?

Axiómák, pl.:

- bármely 2 pont összeköthető egy egyenessel
- bármely pont köré tetszőleges sugarú kör rajzolható

Bolyai János → új geometria

- Euklideszi axióma: egy ponton keresztül csak egy párhuzamos egyenes húzható az adott másik egyeneshez:



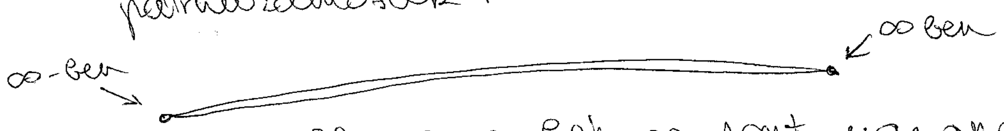
- Bolyai ezt cáfolta: több ilyen egyenes is húzható
- valóság: se bolyai, se euklideszi → Riemann: ∀ pontban más geometria, pl.: „nyusziful":

(A és B pontba rajzolt háromszögek más tulajdonságúak)

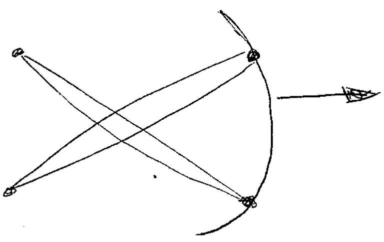
Ajánlott: Coxeter – Geometriák alapjai

Projektív geometria

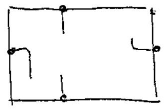
- Pascal és
- bármely két pont metszi egymást: párhuzamosak,

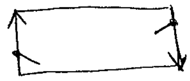


akkor ez a két ∞ pont ugyanaz a pont

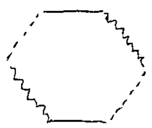


→ ideális egyenes: amely összeköti ezeket a ∞-ben levő pontokat

Pl: Snake  ⇒ [tóruszfajú „hajtható"

Möbius - szalag: 

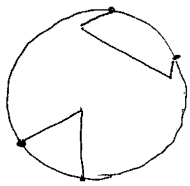
Hatszög szemközti oldalai azonosak egymással:

 → egyre több oldalú sokszög határesetben: kör ⇒ projektív sík

⇓

projektív geometria

pl. háromszög a projektív síkon:



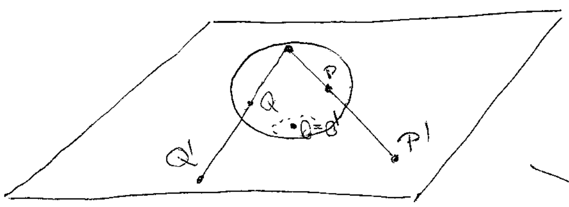
$\mathbb{RP}^2$ = kétdim. proj. sík

$\mathbb{RP}^3$ = 3dim —"—

⇓

A fenti számolás (r, q, p, α, ρ, stb.) ezeken van értelmezve!

Mi a nulla reciproka ($\mathbb{C}$)? Ahogy közeledünk a 0-ra, a reciprok közeledik a ∞-hez. A komplex 0 reciproka (1 db) "∞" szám.



→ sztereografikus projekció

→ az „Északi sarknak" nincsen csak képe

⇓

egyetlenegy ∞ távoli ponttal kell kiegészíteni, hogy $\frac{1}{0} = \infty$ legyen

komplex / Riemann - féle számgömb