Speciális relativitáselmélet (Alkalmazott vektorszámítás 2)

A fizika szintjei:
- fizikai valóság
- fizikai modell (kevesebb információt tartalmaz, ezért nem mindig átjárható)
- matematikai modell (átjárható)
- reprezentáció (átjárható, invariáns mennyiségek, kovariáns egyenletek)
- számadatok (mérések)

Objektum ekvivalens állapotainak halmazán az elemeket egymásba átvivő transzformációk csoportot alkotnak:
- legyen: $x' = T_1 x \quad x'' = T_2 x' = T_4 x$ és $x''' = T_3 x'' = T_5 x' = T_6 x$
- zártság: $T_4 x = x'' = T_2(T_1 x) \Rightarrow T_4 = T_2 T_1$
- asszociativitás: $(T_3 T)_2 T_1 = T_5 T_1 = T_6 = T_3 T_4 = T_3(T_2 T_1)$
- egységelem: identitás transzformáció $IT = TI = T$
- inverz: mivel ekvivalensek az állapotok, létezik

mérés után (mérési adatok φ vektor):
- $x \to \varphi(x)$ és $x' \to \varphi'(x)$
- a fizikai mennyiségeknél S lineáris művelet
- $\varphi'(x') = S(T_1)\varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x) = S(T_1)\varphi(T_1^{-1}x)$
- $\varphi''(x'') = S(T_2)\varphi(T_2^{-1}x'') = S(T_2)S(T_1)\varphi(T_1^{-1}(T_2^{-1}x'')) \Rightarrow \varphi''(x) = S(T_2)S(T_1)\varphi(T_4^{-1}x)$
- $\varphi''(x) = S(T_4)\varphi(T_4^{-1}x) = S(T_2T_1)\varphi(T_4^{-1}x)$
- ebből $S(T_2T_1) = S(T_2)S(T_1)$
- az ábrázoláselmélet alaptétele: a transzformációcsoport ábrázolódik a rendszeren értelmezett fizikai mennyiségek lineáris terén

Ponicaré csoport:
- az összes transzformációcsoport metszete
- Lie-csoport
- nem triviális csoport
- tagjai: elforgatások (a tér homogén), eltolások (a tér izotróp), Galilei-transzformáció
- kétféle szorzótabla lehetséges (Galilei csoport (klasszikus mechanika), Ponicaré csoport (elektrodinamika (relativisztikusan kovariáns elmélet), ez a helyes))
- ábrázoláselmélete a speciális relativitáselmélete

Walker tételek: ha a szimmetriacsoport Lie-csoport (vagy véges), tagjai megmaradási tételeknek feleltethetők meg
- a tér homogenitása: impulzusmegmaradás
- a tér izotrópiája: impulzusmomentum-megmaradás
- az idő homogenitása: energiamegmaradás (nem áll fönn nagy méretekben)
- tértükrözés: paritás-megmaradás (nem áll fönn)
- időtükrözés: (csak páros időhatványokat tartalmazó differenciálegyenletekkel leírható rendszerekre)
- Galilei-transzformáció

A Galilei csoport

Térjünk át egy K_0 koordinátarendszerből egy K a fenti transzformációkat végző koordinátarendszerbe az $\underline{F}_0 = m\underline{a}_0$ egyenletet vizsgálva:

- $\underline{r}_0{}' = \underline{R}' + \underline{r}' = \underline{R}' + \underline{\underline{O}}\underline{r}$
- $\underline{v}_0{}' = \frac{d}{dt}\underline{r}_0{}' = \frac{d\underline{R}'}{dt} + \dot{\underline{\underline{O}}}\underline{r} + \underline{\underline{O}}\dot{\underline{r}} = \underline{V}' + \underline{\underline{O}}\left(\tilde{\underline{\underline{O}}}\dot{\underline{\underline{O}}}\underline{r} + \underline{r}\right) = \underline{V}' + \underline{\underline{O}}\left(\underline{\underline{\Omega}}\underline{r} + \underline{r}\right)$
- $\tilde{\underline{\underline{O}}}\underline{\underline{O}} = \underline{\underline{I}} \Rightarrow \tilde{\underline{\underline{\Omega}}} + \underline{\underline{\Omega}} = \dot{\tilde{\underline{\underline{O}}}}\underline{\underline{O}} + \tilde{\underline{\underline{O}}}\dot{\underline{\underline{O}}} = 0 \Rightarrow \tilde{\Omega} = -\Omega$
- $\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$ és $\underline{\underline{\Omega}}\underline{r} = \underline{\omega} \times \underline{r}$
- $\underline{v}_0{}' = \underline{V}' + \underline{\underline{O}}(\underline{\omega} \times \underline{r} + \underline{r})$
- $\frac{\underline{F}_0{}'}{m'} = \underline{a}_0{}' = \frac{d}{dt}\underline{v}_0{}' = \frac{d\underline{V}'}{dt} + \dot{\underline{\underline{O}}}\left(\underline{\omega} \times \underline{r} + \dot{\underline{r}}\right) + \underline{\underline{O}}\left(\dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times \dot{\underline{r}} + \ddot{\underline{r}}\right) =$

  $= \underline{A}' + \underline{\underline{O}}\left(\underline{\underline{\Omega}}\left(\underline{\omega} \times \underline{r} + \dot{\underline{r}}\right) + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times \dot{\underline{r}} + \ddot{\underline{r}}\right) =$

  $= \underline{A}' + \underline{\underline{O}}\left(\omega \times \left(\underline{\omega} \times \underline{r} + \dot{\underline{r}}\right) + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times \dot{\underline{r}} + \ddot{\underline{r}}\right) =$

  $= \underline{A}' + \underline{\underline{O}}\left(\underline{\omega} \times \left(\underline{\omega} \times \underline{r}\right) + 2\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}} + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} + \ddot{\underline{r}}\right)$
- $\frac{\underline{F}_0}{m} = \underline{A} + \underline{\omega} \times \left(\underline{\omega} \times \underline{r}\right) + 2\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}} + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} + \ddot{\underline{r}}$
- $\underline{F}_0 - m\underline{A} - m\underline{\omega} \times \left(\underline{\omega} \times \underline{r}\right) - 2m\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}} - m\dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} = m\ddot{\underline{r}}$

a 10 paraméteres transzformációcsoport, amire ez invariáns a Galilei csoport:

- $R, \dot{R} = V, O(\phi, \varphi, \vartheta), t$
- ha a gravitációt is hozzávesszük eljutunk az általános relativitáselmélethez

A Lorentz- és a Gallilei transzformáció levezetése 1+1 dimenzióban

Térjünk át egy K koordinátarendszerből egy K' az előzőhöz képest V sebességgel mozgó koordinátarendszerbe:

- $(x,t) \leftrightarrow (x',t')$
- $x' = f(x,t,V)$ és $t' = g(x,t,V)$ folyamatosak és differenciálhatók
- a relativitás elve szerint: $x = f(x',t',-V)$ és $t = g(x',t',-V)$ ($-V$ helyett V' -t is fel lehet tenni, kijön)
- $dx' = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt$ és $dt' = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial t}dt$
- $\begin{pmatrix} dx' \\ dt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x,t,v) & \beta(x,t,v) \\ \gamma(x,t,v) & \delta(x,t,v) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}(x,t,v)\begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx' \\ dt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx' \\ dt' \end{pmatrix}$
- $\alpha(x', t', -V) = \alpha' = \frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}$
- legyen $dx = 0$, ekkor $dx' = \beta dt$ és $dt' = \delta dt$
- mivel a téridő homogén és a koordinátarendszer merev: $V = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\beta}{\delta}$
- legyen $dx' = 0$, ekkor $\alpha dx + \beta dt = 0$
- mivel a téridő homogén és a koordinátarendszer merev: $-V = \frac{dx}{dt} = -\frac{\beta}{\delta}$
- ebből: $\underline{\underline{M}}(x, t, V) = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha V \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$
- $\det \underline{\underline{M}} = \alpha^2 - \alpha\gamma V \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$
- tegyük föl, hogy a téridő homogén, ezért a fenti mennyiségek csak V-től függenek (enélkül is megoldható): $\underline{\underline{M}}(V) = \begin{pmatrix} \alpha(V) & V\alpha(V) \\ \gamma(V) & \alpha(V) \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$

Vegyünk egy K'' koordinátarendszert, ami K-hoz képest U-val és K'-höz képest W-vel mozog:

- $\begin{pmatrix} dx' \\ dt' \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}(V) \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} dx'' \\ dt'' \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}(U) \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} dx'' \\ dt'' \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}(W) \begin{pmatrix} dx' \\ dt' \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}(W)\underline{\underline{M}}(V) \begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix}$
- ebből: $\underline{\underline{M}}(U) = \underline{\underline{M}}(W)\underline{\underline{M}}(V)$, tehát $U = \varphi(W, V)$
- $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{M}}(0) = \begin{pmatrix} \alpha(0) & 0 \\ \gamma(0) & \alpha(0) \end{pmatrix}$, tehát $\alpha(0) = 1$ és $\gamma(0) = 0$
- $\begin{pmatrix} \alpha(W) & W\alpha(W) \\ \gamma(W) & \alpha(W) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(V) & V\alpha(V) \\ \gamma(V) & \alpha(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(U) & U\alpha(U) \\ \gamma(U) & \alpha(U) \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} \alpha(U) = \alpha(V)\alpha(W) + W\alpha(W)\gamma(U) \\ U\alpha(U) = V\alpha(W)\alpha(V) + W\alpha(W)\alpha(V) \\ \gamma(U) = \gamma(W)\alpha(V) + \alpha(W)\gamma(V) \\ \alpha(U) = V\gamma(W)\alpha(V) + \alpha(V)\alpha(W) \end{cases}$
- $W\alpha(W)\gamma(V) - V\alpha(V)\gamma(W) = 0$
- $\frac{\gamma(V)}{V\alpha(V)} - \frac{\gamma(W)}{W\alpha(W)} = 0$, ebből: $K = \frac{\gamma(V)}{V\alpha(V)}$ univerzális konstans $[K] = \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}$
- $M(V) = \alpha(V) \begin{pmatrix} 1 & V \\ KV & 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{cases} \alpha(U) = \alpha(V)\alpha(W)(1+KVW) \\ U\alpha(U) = \alpha(V)\alpha(W)(V+W) \end{cases}$
- $U = \dfrac{V+W}{1+KVW}$
- $\alpha\left(\dfrac{V+W}{1+KVW}\right) = \alpha(V)\alpha(W)(1+KVW)$ (függvényegyenlet)
- legyen $\alpha(V) = \dfrac{\mu(V)}{\sqrt{1-KV^2}}$

$$\frac{\mu(U)}{\mu(V)\mu(W)} = \frac{\sqrt{1-KU^2}}{\sqrt{1-KV^2}\sqrt{1-KW^2}}(1+KVW) = \frac{\sqrt{1-K\left(\dfrac{V+W}{1+KVW}\right)^2}}{\sqrt{1-KV^2}\sqrt{1-KW^2}}(1+KVW) =$$

- $= \dfrac{\sqrt{(1+KVW)^2 - K(V+W)^2}}{\sqrt{1-KV^2}\sqrt{1-KW^2}} = \dfrac{\sqrt{1+K^2V^2W^2 - KV^2 - KW^2}}{\sqrt{1-KV^2}\sqrt{1-KW^2}} =$

$$= \frac{\sqrt{(1-KV^2)(1-KW^2)}}{\sqrt{1-KV^2}\sqrt{1-KW^2}} = 1$$

- $\mu\left(\dfrac{V+W}{1+KVW}\right) = \mu(U) = \mu(V)\mu(W)$

1. eset: $K = 0$ (Gallilei transzformáció)

- $U = V + W$, $\alpha(V+W) = \alpha(V)\alpha(W)$
- $\alpha(V) = e^{\frac{V}{v_0}}$ és $M(V) = e^{\frac{V}{v_0}}\begin{pmatrix} 1 & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} x' = e^{\frac{V}{v_0}}(x+vt) + x_0 \\ t' = e^{\frac{V}{v_0}}t + t_0 \end{cases}$
- legyen $\alpha(V) = 1$, az exponenciális tényező ugyanis csak 1 térdimenziónál lép föl
- $\begin{cases} x' = x + vt + x_0 \\ t' = t + t_0 \end{cases}$

2. eset: $K = -\dfrac{1}{c^2} < 0$

- $U = \dfrac{V+W}{1-\dfrac{VW}{c^2}}$, ebből: $\dfrac{U}{c} = \dfrac{\dfrac{V}{c}+\dfrac{W}{c}}{1-\dfrac{V}{c}\dfrac{W}{c}}$
- legyen $\dfrac{V}{c} = \mathrm{tg}\,\varphi$ és $\dfrac{W}{c} = \mathrm{tg}\,\psi$, ekkor $\dfrac{U}{c} = \mathrm{tg}(\varphi+\psi)$
- $\mu(U) = \mu(V)\mu(W) \Rightarrow \mu(\varphi+\psi) = \mu(\varphi)\mu(\psi)$, tehát: $\mu = e^{k\varphi}$
- $\alpha(V) = \dfrac{\mu(V)}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{e^{k\varphi}}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\varphi}} = e^{k\varphi}\cos\varphi$

- $M(V)=M(\varphi)=e^{k\varphi}\cos\varphi\begin{pmatrix}1 & c\,\mathrm{tg}\,\varphi\\ \dfrac{-\mathrm{tg}\,\varphi}{c} & 1\end{pmatrix}=e^{k\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi & c\sin\varphi\\ -\dfrac{\sin\varphi}{c} & \cos\varphi\end{pmatrix}$
- $\begin{cases} x'=e^{k\varphi}(\cos\varphi x+\sin\varphi ct)+x_0\\ ct'=e^{k\varphi}(-\sin\varphi x+\cos\varphi ct)+ct_0\end{cases}$
- $\begin{pmatrix}x'\\ ct'\end{pmatrix}=e^{k\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ ct\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\ ct_0\end{pmatrix}$ logaritmikus spirálok
- két véges sebesség eredője lehet végtelen, és két egyirányú sebesség eredője lehet ellenkező irányú, ezért nem jó

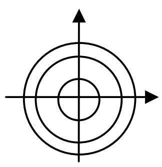
3. eset: $K=\dfrac{1}{c^2}>0$

- $U=\dfrac{V+W}{1+\dfrac{VW}{c^2}}$, ebből: $\dfrac{U}{c}=\dfrac{\dfrac{V}{c}+\dfrac{W}{c}}{1+\dfrac{V}{c}\dfrac{W}{c}}$
- legyen $\dfrac{V}{c}=\mathrm{th}\,\omega$ és $\dfrac{W}{c}=\mathrm{th}\,\eta$, ekkor $\dfrac{U}{c}=\mathrm{th}(\omega+\eta)$
- ω: rapiditás
- $\mu(\omega+\eta)=\mu(\omega)\mu(\eta)$, tehát: $\mu(\omega)=e^{k\omega}$
- legyen $k=1$, ekkor $\mu=1$ (az exponenciális tényező csak 1 térdimenziónál lép föl)
- $\alpha(V)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\varphi}}=\dfrac{\mathrm{ch}\,\omega}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\omega-\mathrm{sh}^2\omega}}=\mathrm{ch}\,\omega$
- $M(V)=M(\omega)=\mathrm{ch}\,\omega\begin{pmatrix}1 & c\,\mathrm{th}\,\omega\\ \dfrac{\mathrm{th}\,\omega}{c} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,\omega & c\,\mathrm{sh}\,\omega\\ \dfrac{\mathrm{sh}\,\omega}{c} & \mathrm{ch}\,\omega\end{pmatrix}$
- $\begin{cases} x'=(\mathrm{ch}\,\omega x+\mathrm{sh}\,\omega ct)+x_0\\ ct'=(\mathrm{sh}\,\omega x+\mathrm{ch}\,\omega ct)+ct_0\end{cases}$
- $\begin{pmatrix}x'\\ ct'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,\omega & \mathrm{sh}\,\omega\\ \mathrm{sh}\,\omega & \mathrm{ch}\,\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ ct\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\ ct_0\end{pmatrix}$
- $V<c\Rightarrow\alpha=\dfrac{\mu}{\sqrt{KV^2-1}}$ és $V<c\Rightarrow\alpha=\dfrac{\mu}{\sqrt{1-KV^2}}$ (egy dimenzióban működik normál és tachion világ is)

A transzformációk orbitjai, koordinátarendszerei

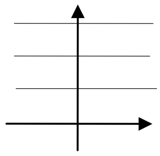
Orbit: egymásba áttranszformálható pontok halmaza
példák:

- forgatás:



- $x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$, $y' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$
- $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ konstans

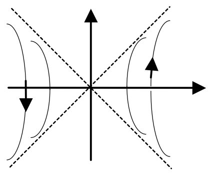
- Gallilei transzformáció:



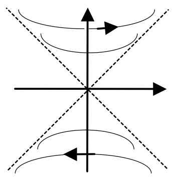
- $t' = t$ konstans

- Lorentz transzformáció
  - válasszuk úgy a koordinátarendszert, hogy $c = 1$ legyen
  - $x'^2 - t'^2 = x^2\,\mathrm{ch}^2\,\omega + t^2\,\mathrm{sh}^2\,\omega + 2xt\,\mathrm{ch}\,\omega\,\mathrm{sh}\,\omega -$
    $-(x^2\,\mathrm{sh}^2\,\omega + t^2\,\mathrm{ch}^2\,\omega + 2xt\,\mathrm{sh}\,\omega\,\mathrm{ch}\,\omega) = \left(x^2 - t^2\right)(\mathrm{ch}^2\,\omega - \mathrm{sh}^2\,\omega) = x^2 - t^2$

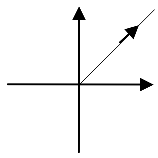
1. -2. $a^2 = x^2 - t^2 > 0$:



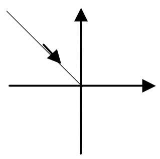
3. -4. $-b^2 = x^2 - t^2 < 0$:



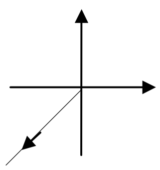
5. $x = 0, t = 0$: origó
6. $x^2 - t^2 = 0, x > 0, t > 0$:



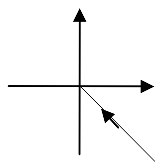
7. $x^2 - t^2 = 0, x < 0, t > 0$:



8. $x^2 - t^2 = 0, x < 0, t < 0$:



9. $x^2 - t^2 = 0, x < 0, t > 0$:



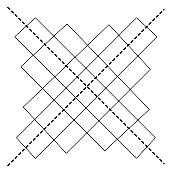
Fixpontok:
- forgatás, Lorentz: origó
- Gallilei: x-tengely

Áttérés a transzformáció által meghatározott koordinátákra:
forgatások: polárkoordináta-rendszer (fixpont kivételével)
- $x = r\cos\alpha,\ y = r\sin\alpha$
- $r' = r,\ \alpha' = \alpha + \varphi$

Gallilei transzformáció: (fixpontok kivételével)
- x helyett $w = \dfrac{x}{t}$
- $t' = t,\ w' = w + v$

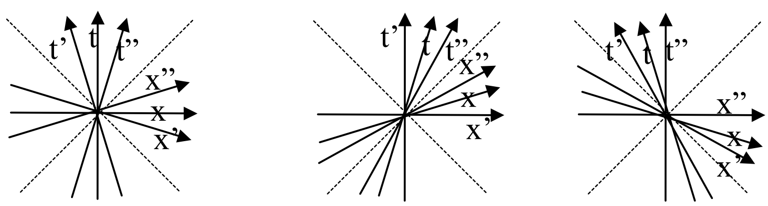
Lorentz transzformáció:
1. : $x = a\,\mathrm{ch}\,\psi,\ t = a\,\mathrm{sh}\,\psi,\ a' = a,\ \psi' = \psi + \omega$
2. : $x = -a\,\mathrm{ch}\,\psi,\ t = -a\,\mathrm{sh}\,\psi,\ a' = a,\ \psi' = \psi + \omega$
3. : $x = b\,\mathrm{sh}\,\phi,\ t = b\,\mathrm{ch}\,\phi,\ b' = b,\ \phi' = \phi + \omega$
4. : $x = -b\,\mathrm{sh}\,\phi,\ t = -b\,\mathrm{ch}\,\phi,\ b' = b,\ \phi' = \phi + \omega$
5. : origó, fixpont
6. :$x = t > 0,\ x' = xe^{\omega},\ t' = te^{\omega}$: e^{w} sajátértéke a transzformációnak $(1,1)$ sajátvektorral
7. : $x = t < 0,\ x' = xe^{\omega},\ t' = te^{\omega}$
8. $-x = t > 0,\ x' = xe^{-\omega},\ t' = te^{-\omega}$: e^{-w} sajátértéke a transzformációnak $(-1,1)$ sajátvektorral
9. $-x = t < 0,\ x' = xe^{-\omega},\ t' = te^{-\omega}$

A Lorentz transzformációról:
alakzatok transzformálódása:

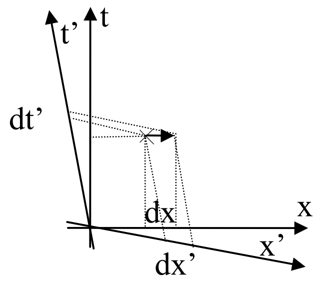


inverz transzformáció:
- $\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\omega & -\mathrm{sh}\,\omega \\ -\mathrm{sh}\,\omega & \mathrm{ch}\,\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$

három különböző állapot három különböző ábrázolása ($\omega = -\omega'$):

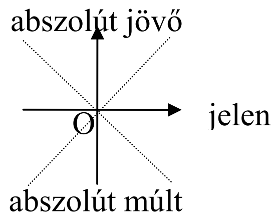


elmozdulás ábrázolása:



- metrika: egy hiperbola pontjai ugyanolyan távol vannak az origótól
- az egyidejűség relatív
- az oksági kapcsolat megmarad, az időrendiség nem cserélődhet föl
- a téridő kauzalitása összhangban van a speciális relativitáselmélettel

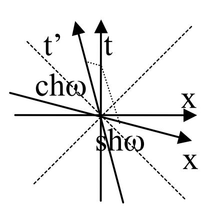
az időről:

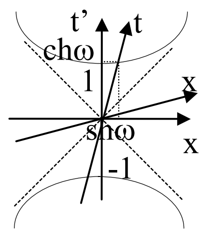


- abszolút jövő, múlt: olyan események, amelyekhez létezik olyan megfigyelő, aki szerint egy helyen történnek O-val
- jelen: olyan események, amelyekhez létezik olyan megfigyelő, aki szerint egy időben történnek O-val
- kauzalitás: nem szabad fizikai hatásnak c-nél gyorsabban terjednie

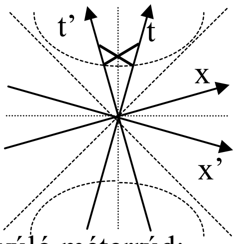
hogyan telik az idő (ikerparadoxon):

- $x = 0 \wedge t = 1 \Rightarrow x' = \mathrm{sh}\,\omega \wedge t' = \mathrm{ch}\,\omega$



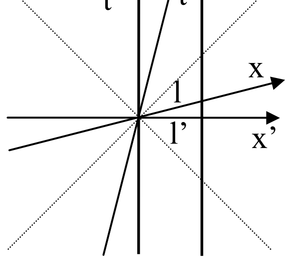


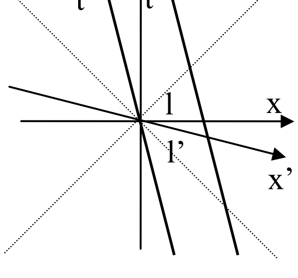
- $x'^2 - t'^2 = -1$: indikátrix hiperbola („egységkör”)

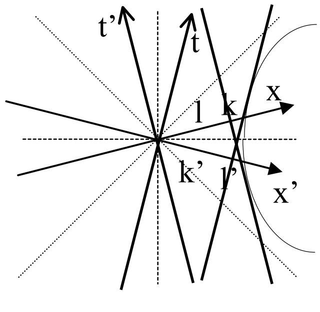


megnyúló méterrúd:

- $x' = 1 \wedge t = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,\omega} \wedge t' = \mathrm{th}\,\omega$





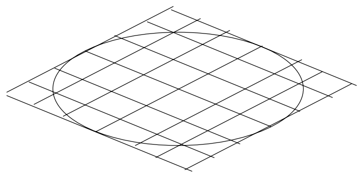


- $l = k' \wedge l' = k$

Konjugált átmérők:

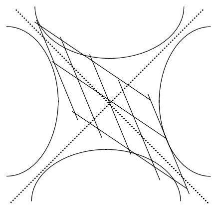
ellipszis:

- egy átmérővel párhuzamos húrok felezőpontjai által meghatározott átmérőt konjugált átmérőnek nevezzük (párhuzamos érintők érintési pontjait összekötő átmérő)
- a fenti tulajdonság szimmetrikus, körülírt paralelogrammát határoznak meg az érintők



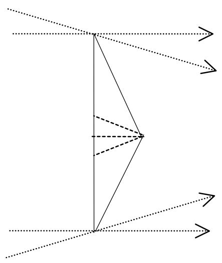
hiperbola: hasonlóan értelmezhető (konjugált hiperbola segítségével)

- beírt paralelogrammát kapunk
- a Lorentz transzformáció összetartozó koordinátatengelyei az indikátrix hiperbola konjugált átmérői

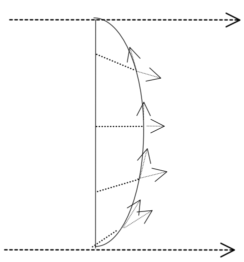


Ikerparadoxon:

- az űrhajó nem mozog egyenletes sebességgel a földhöz képest, nem innerciarendszer
- homogén izotróp világegyetemben az iker, ha nem gyorsul nem érhet vissza, innerciarendszerek kétszer nem találkozhatnak
- az iker sebessége ugrik:



- az iker folyamatosan változtatja sebességét:

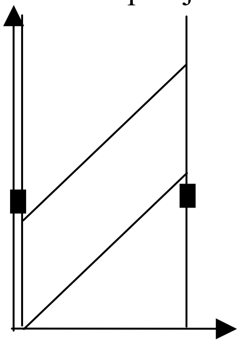


- mivel minden hatás maximum fénysebességgel terjedhet, ezért földi idő szerint nem érhet előbb az űrhajó által kibocsátott jel a földre, mielőtt elindult

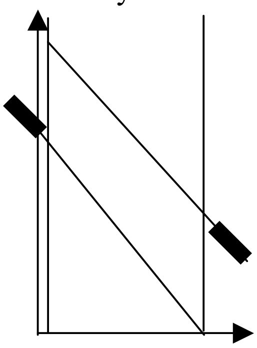
A gonosz bakter esete:

- alaphelyzet: az alagútnál hosszabb vonat Lorentz-kontrakciót szenvedve kisebb lesz, mint az alagút, tehát a bakter egy kis időre be tudja zárni, de a vonat szempontjából az alagút lesz rövidebb:

bakter szempontjából:



a mozdonyvezető szempontjából:



Sajátidő

Utazások:
időtartamok:

- két téridő-beli pont között van egy leghoszabb időtartamú út (anti-euklideszi geometria)
- anti-háromszög-egyenlőtlenség: $t_1 + t_2 < t_3$
- az időben nem lehet visszafelé haladni

utazás:

- olyan pálya a téridőben, amelynek érintője mindig nagyobb meredekségű 45°-nál
- másképp: időszerű görbe

Sajátidő:

- vegyük egy utazás két pontját, amik között a görbét egyenessel tudjuk helyettesíteni (létezik olyan koordinátarendszer, ahol az utazó egy helyben van $x'_A = x'_B \Rightarrow dx' = 0$)
- $\begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & \operatorname{sh}\omega \\ \operatorname{sh}\omega & \operatorname{ch}\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx' \\ dt' \end{pmatrix}$
- $dx = \operatorname{sh}\omega dt'$ és $dt = \operatorname{ch}\omega dt'$
- $v = \frac{dx}{dt} = \operatorname{th}\omega$
- minden más (két vesszővel jelölt) koordinátarendszerre is: $dt' = \frac{dt}{\operatorname{ch}\omega} = \frac{dt''}{\operatorname{ch}\Omega} = d\tau$ (invariáns mennyiség)
- $d\tau = \frac{dt}{\operatorname{ch}\omega} = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \le dt$
- a sajátidő: $\tau = \int d\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \le \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1$

A relativitáselmélet és klasszikus fizika absztrakciói:

- a klasszikus fizikai absztrakciók általában nem működnek a relativitáselméletben (nincsen merev test, nincs áramkör)
- eloszlásfüggvényekkel kell dolgozni helyettük

A négydimenziós Lorentz-transzformáció

- tér-idő négyesvektor: $\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
- boost-tranzformáció (eddigi Lorentz-transzformáció, áttérés egy más sebességgel mozgó koordinátarendszerbe): $\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & \operatorname{sh}\omega & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\omega & \operatorname{ch}\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- nem tranzitív: boost+boost=boost+forgatás

Lorentz transzformációk

Alapesetek (hogy, miért pont ezek, lásd a vektorszámításnál):

- $\Lambda = E$: egységelem, $\underline{r}' = \underline{r}, t' = t$
- $\Lambda = g = P$: tértükrözés, $\underline{r}' = -\underline{r}, t' = t$
- $\Lambda = -g = T$: időtükrözés, $\underline{r}' = \underline{r}, t' = -t$
- $\Lambda = -E = S$: teljes tükrözés $\underline{r}' = -\underline{r}, t' = -t$
- $\{S, P, T, E\}$: Klein csoport ($S^2 = P^2 = T^2 = E, S = PT = TP$)

A térbeli forgatás:

- $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\underline{F}} \end{pmatrix}$, $\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \tilde{\underline{\underline{F}}} \end{pmatrix}$ és $\tilde{F}F = E$
- $\tilde{\Lambda} g \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \tilde{\underline{\underline{F}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{\underline{E}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\underline{F}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & -\tilde{\underline{\underline{F}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\underline{F}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{\underline{E}} \end{pmatrix} = g$

A boost-transzformáció:

- hogy Lorentz transzformáció azt már korábban bizonyítottuk
- $\Lambda = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & \operatorname{sh}\omega(1,0,0) \\ \operatorname{sh}\omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (\operatorname{ch}\omega - 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \underline{\underline{E}} \end{pmatrix}$

A boost-transzformáció tetszőleges irányban (általános Lorentz-transzformáció (a tükrözéseket leszámítva)):

- $\Lambda = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & \underline{n}\operatorname{sh}\omega \\ \underline{n}\operatorname{sh}\omega & (\operatorname{ch}\omega - 1)\underline{n} \circ \underline{n} + \underline{\underline{E}} \end{pmatrix}$ (forgatás + boost-transzformáció), $|\underline{n}| = 1$

$$\tilde{\Lambda} g \Lambda = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & \underline{n}\operatorname{sh}\omega \\ \underline{n}\operatorname{sh}\omega & (\operatorname{ch}\omega - 1)\underline{n} \circ \underline{n} + \underline{\underline{E}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{\underline{E}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & \underline{n}\operatorname{sh}\omega \\ \underline{n}\operatorname{sh}\omega & (\operatorname{ch}\omega - 1)\underline{n} \circ \underline{n} + \underline{\underline{E}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & -\underline{n}\operatorname{sh}\omega \\ -\underline{n}\operatorname{sh}\omega & -(\operatorname{ch}\omega - 1)\underline{n} \circ \underline{n} - \underline{\underline{E}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & \underline{n}\operatorname{sh}\omega \\ \underline{n}\operatorname{sh}\omega & (\operatorname{ch}\omega - 1)\underline{n} \circ \underline{n} + \underline{\underline{E}} \end{pmatrix} =$$

- $$= \left(\begin{array}{c|c} \operatorname{ch}^2\omega - n^2 \operatorname{sh}^2\omega & \underline{n}\operatorname{sh}\omega\operatorname{ch}\omega - \underline{n}\operatorname{sh}\omega - \underline{n}(\underline{n} \circ \underline{n})\operatorname{sh}\omega(\operatorname{ch}\omega - 1) \\ \hline \underline{n}\operatorname{sh}\omega\operatorname{ch}\omega - \underline{n}\operatorname{sh}\omega - & \operatorname{sh}^2\omega\underline{n} \circ \underline{n} - \underline{\underline{E}} - 2\underline{n} \circ \underline{n}(\operatorname{ch}\omega - 1) - \\ -\underline{n}(\underline{n} \circ \underline{n})\operatorname{sh}\omega(\operatorname{ch}\omega - 1) & (\underline{n} \circ \underline{n})^2(\operatorname{ch}\omega - 1)^2 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2\omega & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{\underline{E}} + \underline{n} \circ \underline{n}(\operatorname{sh}^2\omega - \operatorname{ch}^2\omega + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{\underline{E}} \end{pmatrix} = g$$

- $\begin{pmatrix} ct' \\ \underline{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & \underline{n}\operatorname{sh}\omega \\ \underline{n}\operatorname{sh}\omega & (\operatorname{ch}\omega - 1)\underline{n} \circ \underline{n} + \underline{\underline{E}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \underline{r} \end{pmatrix}$
- $\underline{r}' = \underline{n}ct\operatorname{sh}\omega + (1 + \underline{n} \circ \underline{n}(\operatorname{ch}\omega - 1))\underline{r} = \underline{r} + \underline{n}(\underline{n}\underline{r})(\operatorname{ch}\omega - 1) + \underline{n}ct\operatorname{sh}\omega$
- $ct' = ct\operatorname{ch}\omega + \underline{n}\underline{r}\operatorname{sh}\omega$

- $t' = t\,\mathrm{ch}\,\omega + \frac{1}{c}\underline{n}\underline{r}\,\mathrm{sh}\,\omega = \mathrm{ch}\,\omega\left(t + \frac{1}{c}\underline{n}\underline{r}\,\mathrm{th}\,\omega\right) = \mathrm{ch}\,\omega\left(t + \frac{1}{c^2}\underline{v}\underline{r}\right) = \frac{t + \frac{\underline{v}\underline{r}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

A Lorentz-csoport szerkezete:

- a kibővített Lorentz-csoport 4 részre tagolható, melyek között nincs folytonos átmenet, aszerint hogy $\det\Lambda = 1 \vee -1$ és $\Lambda^0{}_0 \geq 1 \vee \Lambda^0{}_0 \leq -1$
- ennek részcsoportja a teljes Lorentz-csoport ($\Lambda^0{}_0 \geq 1$)
- a $\det\Lambda = 1$-es részhalmaz is részcsoport, de nincs külön neve
- $O(3)$ részcsoportja a teljes Lorentz-csoportnak
- másik részcsoport a valódi Lorentz-csoport ($\Lambda^0{}_0 \geq 1 \wedge \det\Lambda = 1$)
- $SO(3)$ részcsoportja a valódi Lorentz-csoportnak
- az egy dimenziós forgatások és boostok egyparaméteres részcsoportjai a valódi Lorentz-csoportnak

A vektorszámítás alapjai

- $x^k = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \underline{r} \end{pmatrix}$, $x_k = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -\underline{r} \end{pmatrix}$
- $x^k x_k = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$
- $c'^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = (x\,\mathrm{sh}\,\omega + ct\,\mathrm{ch}\,\omega)^2 - (x\,\mathrm{ch}\,\omega + ct\,\mathrm{sh}\,\omega)^2 - y^2 - z^2 =$
  $= c^2 t^2 (\mathrm{ch}^2\,\omega - \mathrm{sh}^2\,\omega) + x^2(\mathrm{sh}^2\,\omega - \mathrm{ch}^2\,\omega) - y^2 - z^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$
  konstans, tehát skalár mennyiség
- $x_k = g_{kl} x^l$: indexlehúzás, $x^m = g^{mn} x_n$ indexfelhúzás (g_{kl}, g^{mn}: metrikus tenzor)
- $x_k = \delta_k{}^m x_m$ ($x^k = \delta^k{}_m x^m$)
- $x_k = g_{kl} x^l = g_{kl} g^{lm} x_m \Rightarrow g_{kl} g^{lm} = \delta_k{}^m$ ($g^{kl} g_{lm} = \delta^k{}_m$)
- $g_{kl} = g^{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ($\delta_k{}^m = \delta^k{}_m$)
- relativisztikus skaláris szorzat: $x^k x_k = x^k g_{kl} x^l = g_{kl} x^k x^l$

Minkowski-tér (pszeudo-euklideszi-tér):

- olyan euklideszi tér, ahol nem követeljük meg, hogy a skalárszorzat pozitív legyen (metrikus tenzor sajátértékei nem pozitívak (de valósak))

A Lorentz-transzformáció általánosítása:

- minden olyan transzformáció Lorentz-transzformáció, amelyre $x_k x^k$ invariáns
- jelölés: $x'^k = \Lambda^k{}_l x^l$ ($\widetilde{\Lambda}_l{}^k = \Lambda^k{}_l$)
- négyesvektor az, amire: $u'^k = \Lambda^k{}_l u^l$
- $x'u' = g_{kl} x'^k u'^l = g_{kl}\left(\Lambda^k{}_m x^m\right)\left(\Lambda^l{}_p u^p\right) = g_{kl} \Lambda^k{}_m \Lambda^l{}_p x^m u^p$
- $xu = g_{kl} x^m u^p$

- $x'u' = xu \Leftrightarrow \forall x, u: \left(g_{kl}\Lambda^k{}_m\Lambda^l{}_p - g_{mp}\right)x^m u^p = 0 \Leftrightarrow g_{kl}\Lambda^k{}_m\Lambda^l{}_p = g_{mp}$
- az olyan Λ -k amik a feltételt teljesítik Lorentz transzformációk mátrixai
- átfogalmazva a fenti egyenletet: $\widetilde{\Lambda}_m{}^k g_{kl}\Lambda^l{}_p = g_{mp} \Rightarrow \widetilde{\Lambda} g \Lambda = g$
- ez csoportképző tulajdonság, a Lorentz transzformációk csoportot alkotnak
  - $\widetilde{\Lambda}_1 g\Lambda_1 = g \wedge \widetilde{\Lambda}_2 g\Lambda_2 = g \wedge \Lambda_3 = \Lambda_2\Lambda_1 \Rightarrow \widetilde{\Lambda}_3 g\Lambda_3 = \widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_2 g\Lambda_2\Lambda_1 = \widetilde{\Lambda}_1 g\Lambda_1 = g$
  - asszociativitás, egységelem triviális
  - $\widetilde{\Lambda}^{-1} g\Lambda^{-1} = \widetilde{\Lambda}^{-1}\widetilde{\Lambda} g\Lambda\Lambda^{-1} = g$

A Minkowski-féle leírás:

- tekintsük $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$-t vektornak, formális hasonlóság a 4 dimenziós forgatásokkal

Négyestenzorok

- $x'_k = g_{kl}\Lambda^l{}_m x^m = g_{kl}\Lambda^l{}_m g^{mp} x_p = L_k{}^p x_p$
- $L_k{}^p = g_{kl}\Lambda^l{}_m g^{mp} \Rightarrow L = g\Lambda g$
- $$L = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{\underline{E}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & \underline{n}\operatorname{sh}\omega \\ \underline{n}\operatorname{sh}\omega & \underline{\underline{E}} + \underline{n}\circ\underline{n}(\operatorname{ch}\omega - 1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{\underline{E}} \end{pmatrix} =$$
  $$= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & -\underline{n}\operatorname{sh}\omega \\ -\underline{n}\operatorname{sh}\omega & \underline{\underline{E}} + \underline{n}\circ\underline{n}(\operatorname{ch}\omega - 1) \end{pmatrix} = \Lambda(\omega, -\underline{n}) = \Lambda(-\omega, \underline{n}) \Rightarrow L(\underline{v}) = \Lambda(-\underline{v})$$
- négyestenzor: $T'^{k_1 \ldots k_n}{}_{l_1 \ldots l_m} = \Lambda^{k_1}{}_{p_1} \ldots \Lambda^{k_n}{}_{p_n} L_{l_1}{}^{q_1} \ldots L_{l_m}{}^{q_m} T^{p_1 \ldots p_n}{}_{q_1 \ldots q_m}$
- $g'_{kl} = L_k{}^p L_l{}^q g_{pq} = L_k{}^p g_{pq}\widetilde{L}^q{}_l = \left(Lg\widetilde{L}\right)_{kl} = g_{kl}$, tehát g négyestenzor
- ugyanolyan indexű négyestenzorok lineáris teret alkotnak
- tenzorszorzás működik
- kontrakció (spurképzés): csak egy felső és egy alsó indexre működik
- $$T'^k{}_{km} = \Lambda^k{}_p L_k{}^q L_m{}^r T^p{}_{qr} = \Lambda^k{}_p g_{ks}\Lambda^s{}_t g^{tq} L_m{}^r T^p{}_{qr} = \widetilde{\Lambda}_p{}^k g_{ks}\Lambda^s{}_t g^{tq} L_m{}^r T^p{}_{qr} =$$
  $$= g_{pt} g^{tq} L_m{}^r T^p{}_{qr} = \delta_p{}^q L_m{}^r T^p{}_{qr} = L_m{}^r T^p{}_{pr}$$
  négyesvektor
- a négyestenzorok homogén lineáris módon transzformálódnak ($T^k{}_{lm} = 0 \Rightarrow T'^k{}_{lm} = 0$)
- A közhiedelemmel ellentétben a relativisztikus tenzoregyenletekből kijöhet a relativitáselmélettel ellentétes dolog (c-nél nagyobb sebesség) (Marx György, 1953)

pszeudo metrika:

- $\|x\|^2 = x_k x^k = g_{kl}x^k x^l$
- ívelemnégyzet: $ds^2 = dx_k dx^k = g_{kl}dx^k dx^l$
- $ds^2 > 0$: két pont időszerűen van elválasztva (van olyan rendszer, ahol egy időben vannak)
- $ds^2 < 0$: két pont térszerűen van elválasztva (van olyan rendszer, ahol egy helyen vannak)

- $ds^2 = 0$: két pont között izotróp a távolság $\left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right| = c$

differenciálás:

- legyen $\phi(x) = \phi[t, \underline{r}]$ skalármező, $\frac{\partial}{\partial x^k} = \partial_k$ négyesgradiens
- $\phi(x + dx) - \phi(x) = \phi(x) + \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x} dx^k - \phi(x) = \partial_k \phi dx^k$, tehát $\partial_k \phi$ négyesvektor
- $v_k = \partial_k \phi = \begin{pmatrix} \partial_0 \phi \\ \partial_1 \phi \\ \partial_2 \phi \\ \partial_3 \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ \underline{\nabla} \phi \end{pmatrix}$
- $\partial^k = g^{kl} \partial_l \Rightarrow \partial^k \phi = g^{kl} \partial_l \phi = g^{kl} v_l = v^k$, $\partial^k \phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ -\underline{\nabla} \phi \end{pmatrix}$
- Young-tétel: $\partial^k \partial^l \phi = \partial^l \partial^k \phi$
- D'alambert operátor: $\Box \phi = \partial_k \partial^k \phi = \left(\partial_0 \partial^0 + \partial_\alpha \partial^\alpha\right) \phi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \phi$
- c sebességgel terjedő egydimenziós hullámok egyenlete
- legyen $d\underline{r} = \underline{v}(\underline{r}, t) dt$
- $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, négyessebesség: $u^k = \frac{dx^k}{d\tau}$, $u^k = \begin{pmatrix} \frac{dx^0}{d\tau} \\ \frac{dx^\alpha}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{\underline{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$
- $T(\underline{r} + d\underline{r}, t + dt) = T(\underline{r}, t) + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \frac{\partial T}{\partial t} dt = T(\underline{r}, t) + d\underline{r} \underline{\nabla} T + \frac{\partial T}{\partial t} dt$
- iránymenti derivált: $\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \underline{\nabla}\right) T(\underline{r}, t) = u^k \partial_k T(x)$
- $dT = T(x + dx) - T(x) = T(x) + \sum_k \frac{\partial T}{\partial x^k} dx^k - T(x) = (\partial_k T) dx^k = (\partial_k T) u^k d\tau$
- $$\frac{dT}{d\tau} = u^k \partial_k T = v^0 \partial_0 T + u^\alpha \partial_\alpha T = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \partial_\alpha \right) T =$$
  $$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \underline{\nabla} T\right)$$

- $u_k u^k = g_{kl} u^k u^k = \dfrac{c^2 - v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c^2$, másképp $u_k u^k = \dfrac{dx_k dx^k}{d\tau d\tau} = \dfrac{ds^2}{d\tau} = c^2$
- négyesgyorsulás: $a^k = \dfrac{du^k}{d\tau} = \dfrac{d^2 x^k}{d\tau^2}$
- $g_{kl} \dfrac{\partial u^k}{\partial \tau} u^l + g_{kl} \dfrac{\partial u^l}{\partial \tau} u^k = 0 \Rightarrow 2 g_{ké} u^k a^l = 0 \Rightarrow u_k a^k = 0$
- téves elképzelés, hogy az erő ortogonális a sebességgel, csak a gyorsulás (nem igazak a Newton-törvények, elektrodinamikában az erő is)

vizsgáljuk azt az esetet, amikor $\dfrac{v}{c} << 1$:

- ekkor $u^i \approx \begin{pmatrix} c \\ \underline{v} \end{pmatrix}$, $d\tau \approx dt$ és $a^k \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{a} \end{pmatrix}$

Legyen $u'^k = \begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix} \approx c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $a'^k = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$ (a g gyorsulással menő űrhajó)

- ekkor $\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & \operatorname{sh}\omega \\ \operatorname{sh}\omega & \operatorname{ch}\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$ és $v = c \operatorname{th}\omega$ (4 dim.: $\underline{v} = c\underline{n} \operatorname{th}\omega$)
- $\operatorname{ch}\omega = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $c \operatorname{sh}\omega = \dfrac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
- ekkor a sebesség a Földről nézve: $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega \\ \operatorname{sh}\omega \end{pmatrix}$, 4 dimenzióban $u^k = c \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega \\ \underline{n} \operatorname{sh}\omega \end{pmatrix}$
- a gyorsulás a Földről nézve: $a^k = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & \operatorname{sh}\omega \\ \operatorname{sh}\omega & \operatorname{ch}\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \operatorname{sh}\omega \\ \operatorname{ch}\omega \end{pmatrix}$
- $g \begin{pmatrix} \operatorname{sh}\omega \\ \operatorname{ch}\omega \end{pmatrix} = a^k = \dfrac{du^k}{d\tau} = c \begin{pmatrix} \operatorname{sh}\omega \dfrac{d\omega}{d\tau} \\ \operatorname{ch}\omega \dfrac{d\omega}{d\tau} \end{pmatrix} \Rightarrow c \dfrac{d\omega}{d\tau} = g \Rightarrow \dfrac{d\omega}{d\tau} = \dfrac{g}{c} \Rightarrow \omega = \dfrac{g}{c} \tau (+\omega_0)$
- de: $\operatorname{th}\omega \approx \omega \Rightarrow v \approx c\omega \approx g\tau \approx gt$

  $\dfrac{g}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{v}{c} \\ 1 \end{pmatrix} = g \operatorname{ch}\omega \begin{pmatrix} t\text{h}\omega \\ 1 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \operatorname{sh}\omega \\ \operatorname{ch}\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} =$
- $= \begin{pmatrix} \dfrac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \dfrac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dfrac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \dfrac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$

- tehát $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{gv}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ és $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{g}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
- tehát $\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=g\Rightarrow v=gt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}(+t_0)\Rightarrow v^2=g^2t^2-\frac{g^2t^2v^2}{c^2}\Rightarrow v=\frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}$
- ebből $\frac{gt}{c}<<1\Rightarrow v\approx gt$ és $\frac{gt}{c}>>1\Rightarrow v\approx c$
- a kritikus pont $gT=c\Rightarrow T=\frac{c}{g}=3\cdot10^9\,\mathrm{s}\approx 1\text{év}$
- $\frac{dx}{dt}=v=\frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}=\frac{c^2}{g}\frac{\frac{g^2t^2}{c^2}}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}=\frac{c^2}{g}\frac{d}{dt}\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}$
- $x=\frac{c^2}{g}\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}+K$, ha $t=0$-ban $x=0$, akkor $K=-\frac{c^2}{g}$, $x=\frac{c^2}{g}\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}-\frac{c^2}{g}$
- $\frac{gt}{c}<<1\Rightarrow x=\frac{c^2}{g}\left(1+\frac{g^2t^2}{2c^2}-1\right)=\frac{g}{2}t^2$
- ha $t=0$-ban $x=\frac{c^2}{g}$, akkor $K=0$, $x=\frac{c^2}{g}\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}$
- $\frac{x^2}{L^2}=1+\frac{t^2}{T^2}\Rightarrow\frac{x^2}{L^2}-\frac{t^2}{T^2}=1$ hiperbola, $T=\frac{c}{g}\approx 1\text{év}$ és $L=\frac{c^2}{g}\approx 1\text{fényév}$
- legyen $\frac{x}{L}=\operatorname{ch}p$, ekkor $\frac{t}{T}=\operatorname{sh}p$
- $dx=L\operatorname{sh}p\,dp$, $dt=T\operatorname{ch}p\,dp$, ebből $c\operatorname{th}\omega=v=\frac{dx}{dt}=\frac{L}{T}\operatorname{th}p=c\operatorname{th}p\Rightarrow p=\omega$
- $x=L\operatorname{ch}\omega$ és $t=T\operatorname{sh}\omega$, ebből $x=L\operatorname{ch}\frac{\tau}{T}$ és $t=T\operatorname{sh}\frac{\tau}{T}\Rightarrow\frac{t}{T}=\operatorname{sh}\frac{\tau}{T}$
- $\tau<<T\Rightarrow\frac{\tau}{T}<<1:\frac{t}{T}=\frac{\tau}{T}\Rightarrow t=\tau$
- $\tau>>T\Rightarrow\frac{\tau}{T}>>1:\frac{t}{T}=\frac{e^{\frac{\tau}{T}}}{2}\Rightarrow\frac{\tau}{T}=\ln\frac{2t}{T}$
- $1{,}5\cdot10^{10}\approx\frac{x}{L}\approx\operatorname{ch}\frac{\tau}{T}\approx\operatorname{sh}\frac{\tau}{T}\approx\frac{e^{\frac{\tau}{T}}}{2}\Rightarrow\frac{\tau}{T}\approx\ln 3\cdot10^{10}\approx 17$

vezessünk be egy új koordinátarendszert, melyben az űrhajóról vizsgáljuk a föld távolságát:

- $\begin{pmatrix}ct'\\x'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\omega & -\operatorname{sh}\omega\\-\operatorname{sh}\omega & \operatorname{ch}\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ct''\\x''\end{pmatrix}$, ahol $x''=x-x(\tau)$ és $t''=t-t(\tau)$
- $ct'=\operatorname{ch}\omega c(t-t(\tau))-\operatorname{sh}\omega(x-x(\tau))\Rightarrow t'=\operatorname{ch}\frac{\tau}{T}\left(t-T\operatorname{sh}\frac{\tau}{T}\right)-\operatorname{sh}\frac{\tau}{T}\left(\frac{x}{c}-\frac{L}{c}\operatorname{ch}\frac{\tau}{T}\right)$

- $x' = -\operatorname{sh}\frac{\tau}{T}c\left(t - T\operatorname{sh}\frac{\tau}{T}\right) + \operatorname{ch}\frac{\tau}{T}\left(x - L\operatorname{ch}\frac{\tau}{T}\right)$
- $t' = t\operatorname{ch}\frac{\tau}{T} - \frac{x}{c}\operatorname{sh}\frac{\tau}{T} - t\operatorname{ch}\frac{\tau}{T}\operatorname{sh}\frac{\tau}{T} + \frac{L}{c}\operatorname{ch}\frac{\tau}{T}\operatorname{sh}\frac{\tau}{T} = t\operatorname{ch}\frac{\tau}{T} - \frac{x}{c}\operatorname{sh}\frac{\tau}{T}$
- $x' = -ct\operatorname{sh}\omega + x\operatorname{ch}\omega - L\operatorname{ch}^2\omega + Tc\operatorname{sh}^2\omega = -ct\operatorname{sh}\omega + x\operatorname{ch}\omega - L$
- $x = 0 \wedge t = 0 \Rightarrow t' = 0 \wedge x' = -L$
- az indikátrix hiperbolán megy az űrhajó
- a földről elindított jel soha nem érkezik el az űrhajóra, sőt van egy tértartomány, ahonnan érkező jel soha nem érkezik el az űrhajóra, eseményhorizont

A newtoni mechanika alkalmazásának feltételei:

- legyen $\omega << 1$, ekkor $\operatorname{sh}\omega = \omega$ és $\operatorname{ch}\omega = 1$ ($\Rightarrow \frac{v}{c} << 1$)
- $\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} + \omega\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$
- $ct' = ct + \omega x = ct + \frac{vx}{c} \Rightarrow t' = c + \frac{vx}{c^2}$ és $x' = x + \omega ct = x + vt$
- tehát még kell egy másik feltétel is: $\left|\frac{x}{c}\right| << t$

Hullámok

- alapprobléma: $L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = 0$
- $\underline{k}\underline{r} - \omega t = -\left(\frac{\omega}{c}ct - \underline{k}\underline{r}\right)$: skalárnak kell lennie
- négyes-hullámszám-vektor: $k^l = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \underline{k} \end{pmatrix}$, $x_l k^l = \frac{\omega}{c}ct - \underline{k}\underline{r}$
- $k'^l = \Lambda^l{}_m k^m$, ahol $\Lambda = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \underline{n}\operatorname{sh}\psi \\ \underline{n}\operatorname{sh}\psi & \underline{E} + \underline{n}\circ\underline{n}(\operatorname{ch}\psi - 1) \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ \underline{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \underline{n}\operatorname{sh}\psi \\ \underline{n}\operatorname{sh}\psi & \underline{E} + \underline{n}\circ\underline{n}(\operatorname{ch}\psi - 1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \underline{k} \end{pmatrix}$
- $\frac{\omega'}{c} = \frac{\omega}{c}\operatorname{ch}\psi + \underline{n}\underline{k}\operatorname{sh}\psi$ (Doppler effektus, más mint a nem relativisztikus)

  $\frac{\omega'}{c} = \frac{\operatorname{ch}\psi}{c}\left(\omega + \underline{n}\underline{k}c\operatorname{th}\psi\right) \Rightarrow \omega' = \operatorname{ch}\psi\left(\omega + \underline{v}\underline{k}\right) \Rightarrow \omega' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left(\omega + \underline{v}\underline{k}\right) \Rightarrow$
- $\Rightarrow \omega' = \omega\frac{1 + \frac{\underline{k}\underline{v}}{\omega}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \omega\frac{1 + \frac{\underline{n}_k\underline{v}}{v_f}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
- $\Delta\omega$ akkor állandó, ha v_f is az

- klasszikus Doppler-effektus: $\frac{\omega'}{\omega}=\frac{1}{1-\frac{v}{c}}$, $\frac{\omega'}{\omega}=1+\frac{v}{c}$ (attól függ, hogy én megyek szembe a hullámmal, vagy ő jön velem szembe)
- a kapott képletünk a kettő mértani közepét adja
- relativisztikus Doppler-effektus akkor is van, ha merőlegesen megyünk

A sebesség

a sebességvektorok nem alkotnak vektorteret, csak a forgáscsoport megfelelő ábrázolása szerint transzformálódnak ($\underline{v}'=\underline{\underline{T}}(\underline{v})$)

nem-relativisztikus sebességösszeadás: $\underline{v}'=\underline{V}+\underline{v}$

négyes sebességvektorokat nem lehet összeadni, mert más $d\tau$ val osztottunk

Relativisztikus sebességösszeadás:

- $\begin{pmatrix} cdt' \\ d\underline{r}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega & \underline{n}\operatorname{sh}\omega \\ \underline{n}\operatorname{sh}\omega & \underline{\underline{E}}+\underline{n}\circ\underline{n}(\operatorname{ch}\omega-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cdt \\ d\underline{r} \end{pmatrix}$, ahol $\underline{v}=\frac{d\underline{r}}{dt}$ és $\underline{v}'=\frac{d\underline{r}'}{dt'}$

  $\underline{v}'=\frac{d\underline{r}'}{dt'}=\frac{\underline{n}\operatorname{sh}\omega cdt+d\underline{r}+(\underline{n}\circ\underline{n})d\underline{r}(\operatorname{ch}\omega-1)}{\operatorname{ch}\omega dt+\frac{\underline{n}\operatorname{sh}\omega d\underline{r}}{c}}=\frac{c\underline{n}\operatorname{sh}\omega+\underline{v}+(\underline{n}\circ\underline{n})\underline{v}(\operatorname{ch}\omega-1)}{\operatorname{ch}\omega+\frac{\underline{n}\underline{v}\operatorname{sh}\omega}{c}}=$

- $=\frac{c\underline{n}\operatorname{th}\omega+\frac{\underline{v}}{\operatorname{ch}\omega}+(\underline{n}\circ\underline{n})\underline{v}\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}\omega}\right)}{1+\frac{\underline{n}\underline{v}\operatorname{th}\omega}{c}}=\frac{\underline{V}+\frac{\underline{v}}{\operatorname{ch}\omega}+(\underline{n}\circ\underline{n})\underline{v}\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}\omega}\right)}{1+\frac{\underline{V}\underline{v}}{c^2}}=$

  $=\frac{\underline{V}+\underline{v}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}+\frac{(\underline{V}\circ\underline{V})\underline{v}}{V^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)}{1+\frac{\underline{V}\underline{v}}{c^2}}$

- $\frac{1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{V^2}\approx\frac{1-\left(1-\frac{V^2}{2c^2}\right)}{V^2}=\frac{1}{2c^2}$
- ekkor: $\underline{v}'\approx\frac{\underline{V}+\underline{v}\left(1-\frac{V^2}{2c^2}\right)+\frac{\underline{V}(\underline{V}\underline{v})}{2c^2}}{1+\frac{\underline{V}\underline{v}}{c^2}}$
- inverz transzformáció: $\underline{v}=\frac{-\underline{V}+\underline{v}'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}+\frac{(\underline{V}\circ\underline{V})\underline{v}'}{V^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)}{1-\frac{\underline{V}\underline{v}'}{c^2}}$
- ha $\underline{v}\|\underline{V}$, akkor $(\underline{V}\circ\underline{V})\underline{v}=V^2\underline{v}$ és $\underline{v}'=\frac{\underline{V}+\underline{v}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}+\underline{v}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)}{1+\frac{\underline{V}\underline{v}}{c^2}}=\frac{\underline{V}+\underline{v}}{1+\frac{\underline{V}\underline{v}}{c^2}}$
- $\underline{v}=c\underline{n}\operatorname{th}\alpha$, $\underline{v}'=c\underline{n}\operatorname{th}\alpha'$ és $\underline{V}=c\underline{n}\operatorname{th}\omega$, ahol $\alpha'=\alpha+\omega$

Relatív sebességek:

- $$\underline{v}_{\mathrm{rel}} = \frac{-\underline{v}_1 + \underline{v}_2\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}} + \left(\dfrac{\underline{v}_1 \circ \underline{v}_1}{v_1^2}\right)\underline{v}_2\left(1-\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}\right)}{1-\dfrac{\underline{v}_1\underline{v}_2}{c^2}}$$
- válasszuk egységnek c-t, ekkor:
$$\underline{v}_{\mathrm{rel}} = \frac{-\underline{v}_1 + \underline{v}_2\sqrt{1-v_1^2} + \left(\dfrac{\underline{v}_1 \circ \underline{v}_1}{v_1^2}\right)\underline{v}_2\left(1-\sqrt{1-v_1^2}\right)}{1-\underline{v}_1\underline{v}_2} =$$
- $$= \frac{\underline{v}_1\left(-1+\dfrac{\underline{v}_1\underline{v}_2}{v_1^2}\left(1-\sqrt{1-v_1^2}\right)\right)+\underline{v}_2\sqrt{1-v_1^2}}{1-\underline{v}_1\underline{v}_2}$$
$$v_{\mathrm{rel}}^2 =$$
$$= \frac{v_1^2\left(-1+\dfrac{\underline{v}_1\underline{v}_2}{v_1^2}\left(1-\sqrt{1-v_1^2}\right)\right)^2 + v_2^2\left(1-v_1^2\right)+2\underline{v}_1\underline{v}_2\sqrt{1-v_1^2}\left(-1+\dfrac{\underline{v}_1\underline{v}_2}{v_1^2}\left(1-\sqrt{1-v_1^2}\right)\right)}{\left(1-\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2} =$$
$$= \frac{v_1^2\left(1-2\dfrac{\underline{v}_1\underline{v}_2}{v_1^2}\left(1-\sqrt{1-v_1^2}\right)+\dfrac{\left(\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2}{v_1^4}\left(1-\sqrt{1-v_1^2}\right)^2\right)+v_2^2\left(1-v_1^2\right)}{\left(1-\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2} +$$
$$+ \frac{2\underline{v}_1\underline{v}_2\left(-\sqrt{1-v_1^2}+\dfrac{\underline{v}_1\underline{v}_2}{v_1^2}\sqrt{1-v_1^2}-\dfrac{\underline{v}_1\underline{v}_2}{v_1^2}\left(1-v_1^2\right)\right)}{\left(1-\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2} =$$
$$= \frac{v_1^2-2\underline{v}_1\underline{v}_2\left(1-\sqrt{1-v_1^2}\right)+\dfrac{\left(\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2}{v_1^2}\left(1-\sqrt{1-v_1^2}\right)^2+v_2^2-v_1^2v_2^2-2\underline{v}_1\underline{v}_2\sqrt{1-v_1^2}}{\left(1-\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2} +$$
$$+ \frac{\dfrac{2\left(\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2}{v_1^2}\sqrt{1-v_1^2}-\dfrac{2\left(\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2}{v_1^2}\left(1-v_1^2\right)}{\left(1-\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2} = \frac{v_1^2-2\underline{v}_1\underline{v}_2+\dfrac{\left(\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2}{v_1^2}\left(1-2\sqrt{1-v_1^2}+1-v_1^2\right)}{\left(1-\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2} +$$
$$+ \frac{v_2^2-v_1^2v_2^2+\dfrac{2\left(\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2}{v_1^2}\sqrt{1-v_1^2}-\dfrac{2\left(\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2}{v_1^2}\left(1-v_1^2\right)}{\left(1-\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2} = \frac{v_1^2-2\underline{v}_1\underline{v}_2+\dfrac{2\left(\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2}{v_1^2}-\left(\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2}{\left(1-\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2} +$$
- $$+ \frac{v_2^2-v_1^2v_2^2-\dfrac{2\left(\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2}{v_1^2}+2\left(\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2}{\left(1-\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2} = \frac{v_1^2+v_2^2-2\underline{v}_1\underline{v}_2-v_1^2v_2^2+\left(\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2}{\left(1-\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2} =$$
$$= \frac{\left(\underline{v}_1-\underline{v}_2\right)^2-\left(\underline{v}_1\times\underline{v}_2\right)^2}{\left(1-\underline{v}_1\underline{v}_2\right)^2}$$

- tehát: $v_{\text{rel}} = \dfrac{\sqrt{(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)^2 - \left(\dfrac{\underline{v}_1 \times \underline{v}_2}{c}\right)^2}}{1 - \dfrac{\underline{v}_1 \underline{v}_2}{c^2}}$

elemi sebességkülönbség:

- legyen $\underline{v}_1 = \underline{v}$ és $\underline{v}_2 = \underline{v} + d\underline{v}$
- ekkor: $dv_{\text{rel}} = \dfrac{\sqrt{d\underline{v}^2 - \left(\dfrac{\underline{v} \times (\underline{v} + d\underline{v})}{c}\right)^2}}{1 - \dfrac{\underline{v}(\underline{v} + d\underline{v})}{c^2}} = \dfrac{\sqrt{dv^2 - \left(\dfrac{\underline{v} \times d\underline{v}}{c}\right)^2}}{1 - \dfrac{v^2 + \underline{v} d\underline{v}}{c^2}}$
- térjünk át polárkoordináta-rendszerbe, úgy hogy $\underline{e}^3 = \dfrac{\underline{v}}{v}$
- ekkor $d\underline{v} = dv \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$, $\underline{v} = v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ezért $\underline{v} \times d\underline{v} = v dv \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$
- ebből $|\underline{v} \times d\underline{v}|^2 = v^2 dv^2 \sin^2\vartheta$
- $dv_{\text{rel}} = \dfrac{\sqrt{dv^2 - \dfrac{v^2 dv^2 \sin^2\vartheta}{c^2}}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = dv \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2 \sin^2\vartheta}{c^2}}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$
- térjünk át tetszőleges polárkoordinátarendszerbe
- $\underline{v} = v \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$
- $d\underline{v} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} dv + v \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta + v\sin\vartheta \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$
- ebből $d\underline{v}^2 = dv^2 + v^2 d\vartheta^2 + v^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2$
- $\underline{v} \times d\underline{v} = v^2 \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\vartheta + v^2 \sin\vartheta \begin{pmatrix} -\cos\vartheta\cos\varphi \\ -\cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} d\varphi$
- $|\underline{v} \times d\underline{v}|^2 = v^4 d\vartheta^2 + v^4 \sin^2\vartheta \begin{pmatrix} -\cos\vartheta\cos\varphi \\ -\cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} d\varphi^2$

- $$dv_{\text{rel}}^2 = \frac{d\underline{v}^2 - \left(\frac{\underline{v}\times d\underline{v}}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} = \frac{dv^2 + v^2 d\vartheta^2 + v^2\sin^2\vartheta d\varphi^2 - \frac{v^4}{c^2}\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} =$$
  $$= \frac{dv^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} + \frac{v^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{dv^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} + \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$$
- $\underline{v} = \underline{n}c\,\text{th}\,\omega \Rightarrow v = c\,\text{th}\,\omega \Rightarrow dv = c\frac{1}{\text{ch}^2\omega}d\omega$, $1-\frac{v^2}{c^2} = 1-\text{th}^2\omega = \frac{1}{\text{ch}^2\omega}$
- $dv_{\text{rel}}^2 = c^2 d\omega^2 + \frac{c^2\,\text{th}^2\omega}{\frac{1}{\text{ch}^2\omega}}\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$
- $\frac{dv_{\text{rel}}^2}{c^2} = d\omega^2 + \text{sh}^2\omega\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$ (hiperbolikus (Bolyai-Lobacsevszkij) geometria)
  - euklideszi geometria: $dl^2 = dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$
  - elliptikus geometria: $dl^2 = d\omega^2 + \sin^2\omega\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$