Vektor+

Műveletek:

- speciális relációk
- $S \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \times B$ vagy $s : A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \to B$
- csoportosítható a változók száma szerint (2 változós a leggyakoribb)
- 2 változós műveletek típusai:
  - $A \times B \to C$
  - $A \times A \to A$
  - $A \times B \to A$
  - $A \times A \to B$
  - $B \times A \to A$

Műveleti szabályok:

- általános szabályok ($\forall$):
  - kommutativitás: $\forall a \in A, \forall b \in B : a * b = b * a$
    - kommutatív műveletek jele: +
  - asszociativitás ($A \times A \to A$ -nál): $\forall a, b \in A : (a * b) * c = a * (b * c)$
  - antikommutativitás (létezik inverz): $\forall a \in A, \forall b \in B : a * b = (b * a)'$
  - disztributivitás (többműveletes struktúráknál):
    $\forall a, b \in A, \forall c \in C : (a + b) * c = (a * c) + (b * c)$
  - Jacobi azonosság (többműveletes struktúráknál, létezik additív semleges elem):
    $\forall a, b, c \in A : (a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0$
- speciális elemek létezése ($\exists$):
  - semleges elem:
    - baloldali semleges elem: $\exists s \in A : \forall a \in A : s * a = a$
    - jobboldali semleges elem: $\exists s \in A : \forall a \in A : a * s = a$
    - additív semleges elem: nullelem
    - multiplikatív semleges elem: egységelem
  - agresszív elem:
    - baloldali agresszív elem: $\exists v \in A : \forall a \in A : v * a = v$
    - jobboldali agresszív elem: $\exists v \in A : \forall a \in A : a * v = v$

Számosságok:

- attól függően hogy a természetes számok és a kontinum között van-e más számosság kétféle algebrát építhetünk föl

Struktúrák:

- félcsoport $(S, \cdot)$:
  - zárt: $\forall a, b \in S : \exists c = ab \in S$
  - asszociatív
- egységelemes félcsoport $(S_e, \cdot)$:
  - zárt
  - asszociatív
  - egységelem létezik: $\exists e \in S_e : \forall a \in S_e : ea = ae = a$
- csoport $(G, \cdot)$:
  - zárt

- asszociatív
- egységelem létezik
- inverz létezik: $\forall a \in G : \exists a' \in G : aa' = e$
  - Inverz egyértelműségének bizonyítása indirekt módon ($a'a = e \wedge aa'' = e$):
    - $a'' = ea'' = (a'a)a'' = a'(aa'') = a'e = a'$
- Egy érdekes csoport:
  - egy négyzet alábbi transzformációinak halmaza
    - identitás: e
    - forgatás jobbra 90°-al: r
    - tengelyes tükrözés egyik adott szimmetriatengelyre: t
  - művelet: folytasd
- kommutatív csoport, Ábel-csoport $(G,+)$
- gyűrű $(R,+,\cdot)$:
  - $(R,+)$ kommutatív csoport
  - $(R,\cdot)$ félcsoport
  - $(a+b)c = ac+bc$
  - $a(b+c) = ab+ac$
  - ha $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$, akkor nullosztó-mentes gyűrűk egyébként nullosztós gyűrűk
- egységelemes gyűrű
- kommutatív gyűrű
- kommutatív egységelemes gyűrű
- test $(K,+,\cdot)$:
  - $(K,+)$ kommutatív csoport
  - $(K \setminus \{0\},\cdot)$ csoport
- kommutatív test:
  - racionális, valós és komplex számok
- vektortér, lineáris tér $(V_S,+,\cdot)$
  - $(V,+)$ kommutatív csoport
  - $(S,+,\cdot)$ egységelemes gyűrű
  - $\cdot : S \times V \to V$ művelet:
    - $(\alpha\beta)\underline{v} = \alpha(\beta\underline{v})$
    - $1\underline{v} = \underline{v}$
    - $(\alpha+\beta)\underline{v} = (\alpha\underline{v}) + (\beta\underline{v})$
    - $\alpha(\underline{v}+\underline{u}) = (\alpha\underline{v}) + (\alpha\underline{u})$
  - reprezentáció k dimenziós vektortereken:
    - $\underline{a} = \sum_k \alpha_k \underline{e^k}$
    - $\underline{a} + \underline{b} = \sum_k (\alpha_k + \beta_k)\underline{e^k}$
    - $\lambda\underline{a} = \sum_k (\lambda\alpha_k)\underline{e^k}$

- kommutatív vektortér:
  - függvények, sorozatok
- algebra $(A_S, +, \cdot, *)$:
  - A_S vektortér
  - $*$ művelet:
    - zárt
    - $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$
    - $a*(\alpha b)=(\alpha a)*b=\alpha(a*b)$
  - pld.: $(V, +, \cdot, \times)$
  - reprezentáció k dimenziós algebrákon:
    - $\underline{e}^k * \underline{e}^l = \sum_m C_m^{kl}\,\underline{e}^m$
    - C_m^{kl}: az algebra struktúraállandói
    - kommutatív algebra: $C_m^{kl} = C_m^{lk}$
    - antikommutatív algebra: $C_m^{kl} = -C_m^{lk}$
    - $$\underline{c} = \underline{a} * \underline{b} = \left(\sum_k \alpha_k \underline{e}^k\right) * \left(\sum_l \beta_l \underline{e}^l\right) = \sum_{k.l} \alpha_k \beta_l \left(\underline{e}^k * \underline{e}^l\right) = \sum_{k.l.m} \alpha_k \beta_l C_m^{kl}\,\underline{e}^m =$$ $$= \sum_m \left(\sum_{k.l} \alpha_k \beta_l C_m^{kl}\right) \underline{e}^m = \sum_m \chi_m \underline{e}^m$$
- asszociatív algebra:
  - $(A, *)$ félcsoport
  - kommutátor $[a_1, a_2] = \dfrac{(a_1 * a_2) - (a_2 * a_1)}{2}$
    - kommutatív algebra: 0
    - antikommutatív algebra: $a_1 * a_2$
  - antikommutátor $\{a_1, a_2\} = \dfrac{(a_1 * a_2) + (a_2 * a_1)}{2}$
    - kommutatív algebra: $a_1 * a_2$
    - antikommutatív algebra: 0
  - példák:
    - lineáris operátorok (operátor algebra)
    - komplex számok
      - testet is alkotnak
      - szorzástáblázat

	1	i
1	1	i
i	i	-1

    - Study-féle számok:

	1	w
1	1	w
w	w	0

    - harmadik fajta kétdimenziós algebra:

	1	e

1	1	e
e	e	1

- quaterniók (H):
  - testet is alkotnak
  - $q = a + bi + cj + dk$
  - szorzás:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

  - $$q_1q_2 = \left(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2\right) + i\left(a_1b_2 + b_1a_2 + d_2c_1 - c_2d_1\right) + \\ + j\left(a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2\right) + k\left(a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2\right)$$
  - $\overline{q} = a - ib - jc - kd$
  - $q\overline{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |q|^2 \geq 0$
  - $\frac{1}{q} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$
  - antikommutátor: $$\{q_1, q_2\} = \left(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2\right) + i\left(a_1b_2 + b_1a_2\right) + \\ + j\left(a_1c_2 + c_1a_2\right) + k\left(a_1d_2 + d_1a_2\right)$$
  - kommutátor: $\left[q_1, q_2\right] = i\left(d_1c_2 - c_2d_1\right) + j\left(d_1b_2 - b_1d_2\right) + k\left(b_1c_2 - c_1b_2\right)$
  - fel lehet fogni egy vektor és egy skalár együtteseként:
    - $\operatorname{Re} q = a$
    - $\operatorname{Ve} q = ib + jc + kd$
    - H': tisztán vektoriális quaterniók: $q' = bi + cj + dk$
    - H' H altere: $H' < H$
    - ebből dolgozták ki a térvektorokat
    - $\left[q_1', q_2'\right] = \underline{q_1'} \times \underline{q_2'}$
    - $\left\{q_1', q_2'\right\} = -\left(\underline{q_1'}\underline{q_2'}\right)$
- Lie-algebra $\left(A_S', +, \cdot, [,]\right)$:
  - $\left(A_S', +, \cdot\right)$ vektortér
  - $A_S' < A_S$
  - tetszőleges asszociatív algebrából lehet származtatni
    - kommutatív algebránál triviális $\left[a_1', a_2'\right] = 0$ (pld.: komplex számok)
  - $[,]$ művelet:
    - antikommutatív
    - Jacobi azonosság teljesül rá
    - A_S kommutátora
  - példák:
    - térvektorok a vektoriális szorzással a quaterniók Lie-algebrája
- Euklideszi tér $\left(E_S, +, \cdot, \bullet\right)$:

- $(E_S,+,\cdot)$ vektortér
- $\bullet : E\times E \to S$ művelet:
  - $\underline{a}\bullet(\underline{b}+\underline{c})=\underline{a}\bullet\underline{b}+\underline{a}\bullet\underline{c}$
  - $(\underline{b}+\underline{c})\bullet\underline{a}=\underline{b}\bullet\underline{a}+\underline{c}\bullet\underline{a}$
  - $\underline{a}\bullet\underline{a}\geq 0$
  - komplex euklideszi tereken nem igazak:
    - kommutatív
    - $\alpha(\underline{a}\bullet\underline{b})=(\alpha\underline{a})\bullet\underline{b}=\underline{a}\bullet(\alpha\underline{b})$
  - pszeudo-euklideszi tereken (pld.: Minkowski-tér) nem igaz:
    - $\underline{a}\bullet\underline{a}=0\Rightarrow\underline{a}=\underline{0}$
- reprezentáció euklideszi téren:
  - metrikus tenzor: $g^{kl}=\underline{e^k}\bullet\underline{e^l}$
  - nem komplex euklideszi tereken: $g^{kl}=g^{lk}$
  - $\underline{a}\bullet\underline{b}=\left(\sum_k\alpha_k\underline{e^k}\right)\bullet\left(\sum_l\beta_l\underline{e^l}\right)=\sum_{k,l}\alpha_k\beta_l\left(\underline{e^k}\bullet\underline{e^l}\right)=\sum_{k,l}\alpha_k\beta_l g^{kl}$

Mátrixok n*n dimenziós lineáris teret alkotnak:

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + $$
  $$+a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_{nn}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2*2-es mátrixokra (4 dimenziós lineáris tér):

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ennek egy 2 dimenziós altere:

- $C(a,b)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
- altér, mert: $C(a_1,b_1)+C(a_2,b_2)=C(a_1+a_2,b_1+b_2)$ és $\alpha C(a,b)=C(\alpha a,\alpha b)$
- 2 dimenziós mert: $C(a,b)=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=aE+bI$
- $C(a_1,b_1)C(a_2,b_2)=C(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2)$
- az ilyen mátrixok a komplex számok reprezentációi

	E	I
E	E	I
I	I	-E

- $z^*\Rightarrow C(a,-b)=\tilde{C}(a,b)$

- $\dfrac{1}{C(a,b)}=\dfrac{C(a,-b)}{a^2+b^2}$
- tehát az ilyen alakú mátrixok testet alkotnak
- trigonometrikus alak: $C(a,b)=r\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=r(\cos\varphi E+\sin\varphi I)$
- egységkör: $F(\varphi)=C(\cos\varphi,\sin\varphi)$
    - $F(\alpha)F(\beta)=F(\alpha+\beta)$
    - $F(\varphi)$-k a szorzásra nézve folytonos csoportot alkotnak
- exponenciális alak bevezetéséhez szükséges valós és komplex sorok:
    - $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$
    - $(e^x)'=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}=e^x$
    - $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n!}$
    - $\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
    - $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
    - $e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^n x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{ix^{4n+1}}{(4n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{-x^{4n+2}}{(4n+2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{-ix^{4n+3}}{(4n+3)!}$
    - $e^{-ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-i)^n x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{-ix^{4n+1}}{(4n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{-x^{4n+2}}{(4n+2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{ix^{4n+3}}{(4n+3)!}$
    - $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}$
    - $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}$
    - a komplex síkon egy adott sor konvergenciasugara R_f, ha $|x|<R_f$ akkor a sor konvergens, különben nem, ha $|x|=R$ akkor előfordulhat mindkettő, a fentieknél $R=\infty$
- négyzetes mátrixok exponenciális függvénye: $e^B=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{B^n}{n!}$
- más függvényeket is így lehet négyzetes mátrixokra értelmezni
- exponenciális alak: $C(a,b)=re^{I\varphi}$
    - $e^{I\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\varphi^n}{n!}I^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)E+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)I=\cos\varphi E+\sin\varphi I=F(\varphi)$
- másfajta közelítése az exponenciális függvénynek:

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$
- $e^B = \lim_{n\to\infty}\left(E+\frac{B}{n}\right)^n$

$$e^{I\varphi} = \lim_{n\to\infty}\left(E+\frac{i\varphi}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\varphi}{n} \\ \frac{\varphi}{n} & 1 \end{pmatrix}^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\varphi}{n}\right)^n}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\varphi}{n}\right)^n}} & \frac{-\frac{\varphi}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{\varphi}{n}\right)^n}} \\ \frac{\frac{\varphi}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{\varphi}{n}\right)^n}} & \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\varphi}{n}\right)^n}} \end{pmatrix}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt{1+\left(\frac{\varphi}{n}\right)^n}\right)^n \begin{pmatrix} \cos\alpha_n & -\sin\alpha_n \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n \end{pmatrix}^n\right) =$$

- $= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\varphi}{n}\right)^n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} \cos n\alpha_n & -\sin n\alpha_n \\ \sin n\alpha_n & \cos n\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = F(\varphi)$

Egyparaméteres Lie-csoportok:

- $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $L(\alpha) = e^{\alpha\Omega} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\Omega^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}E + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}\Omega = \operatorname{ch}\alpha E + \operatorname{sh}\alpha\Omega =$
  $= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}$
- $L(\alpha)L(\beta) = L(\alpha+\beta)$
- $L(\alpha)$-k a szorzásra nézve folytonos csoportot alkotnak
- Lorentz-transzformáció

Gallilei-transzformáció:

- $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $G(\alpha) = e^{\alpha N} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}N^n = E + \alpha N = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $G(\alpha)G(\beta) = G(\alpha+\beta)$
- $G(\alpha)$-k a szorzásra nézve folytonos csoportot alkotnak

A mátrixfüggvényekről:

- $P^2 = P$
- $e^{\alpha P} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} P^n = E + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} P = E + e^{\alpha - 1} P$
- ha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- akkor
  $f(P) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P^n = c_0 E + \sum_{n=0}^{\infty} c_n P = f(0)E + \left(f(1) - f(0)\right)P =$
  $= f(1)P + f(0)(E - P) = f(1)P + f(0)Q$
- a mátrixfüggvények projektorok lineárkombinációjai

Forgásmátrixok:

- forgássík jellemző rájuk, amelyben történik a forgatás, a többi dimenzió megmarad
- 3 dimenziós forgatások
  - $F(\underline{n}, \alpha) F(\underline{n}, \beta) = F(\underline{n}, \alpha + \beta)$
  - folytonos csoportot alkotnak ($SO(3)$ csoport)
  - $F(\underline{n}, -\varphi) = F(\underline{n}, \varphi)^{-1} = \tilde{F}(\underline{n}, \varphi)$: ortogonális mátrixok

Ortogonális mátrixok:

- $F^{-1} = \tilde{F}$ ($F\tilde{F} = E$)
- n dimenziós ortogonális mátrixok csoportot alkotnak ($O(n)$ csoport):
  - zártság: $F_3 \tilde{F}_3 = F_1 F_2 \tilde{F}_2 \tilde{F}_1 = E$
  - egységelem: E
  - asszociativitás, inverz triviális
- $(\det F)^2 = \det F \det \tilde{F} = \det\left(F\tilde{F}\right) = \det E = 1$
- $\det F \in \{-1, 1\}$
- $\det F = 1$: $SO(n)$ csoport (n dimenziós valódi forgatások
- $\det F = -1$: tükrözéses forgatások
- $O(n) = SO(n) \times C_2$, $SO(n) \triangleleft O(n)$
- $F(\varphi) \in SO(2) \triangleleft O(2)$
- $F(\underline{n}, \varphi) \in SO(3) \triangleleft O(3)$

Forgatások:

- $\underline{\underline{F}} \in \Phi$
- definíció: $\forall \underline{u}, \underline{v} : \underline{u}' = \underline{\underline{F}}\,\underline{u}, \underline{v}' = \underline{\underline{F}}\,\underline{v} : \underline{u}'\underline{v}' = \underline{u}\underline{v}$
- folytonos csoportot alkotnak (megjegyzés: a valamit megtartó transzformációk általában csoportot alkotnak, az amit megtartanak a csoportképző tulajdonság)
- $\Phi^+ \triangleleft \Phi$: $\underline{\underline{F}}\left(\underline{a} \times \underline{b}\right) = \underline{\underline{F}}\,\underline{a} \times \underline{\underline{F}}\,\underline{b}$
- $\Phi \approx O(n)$, $\Phi^+ \approx SO(n)$
  - $\underline{u}'\underline{v}' = u'_k v'_k = (F_{kl} u_l)(F_{km} v_m) = (F_{kl} F_{km}) u_l v_m$
  - $\underline{u}\underline{v} = u_l v_l = u_l v_m \delta_{lm}$

- $\forall \underline{u}, \underline{v} : \left(F_{kl} F_{km} - \delta_{lm} \right) u_l v_m = 0$
- $F_{kl} F_{km} - \delta_{lm} = 0$
- $\left(F\tilde{F} \right)_{lm} = \delta_{lm} = E_{lm}$

Forgásmátrixok exponenciálisan fölírva:
általános eset:

- $A(\varphi) = e^{\varphi N} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n N^n}{n!}$
- $\frac{dA(\varphi)}{d\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\varphi^{n-1}}{n!} N^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^{n-1}}{(n-1)!} N^n = N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^k}{k!} N^k = NA(\varphi)$
- $\left. \frac{dA(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = NA(0) = NA = N$
- az N -ek mindig antiszimmetrikusak és a főátlójukban csupa 0 van ($\frac{n^2 - n}{2}$ szabad paraméter van)
- $\tilde{N} = -N$
- az n dimenziós N -ek lineáris teret alkotnak

kétdimenziós:

- $N = F'(\varphi)\big|_{\varphi=0} = \left. \begin{pmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} \right|_{\varphi=0} = I$

háromdimenziós:

- $F_{kl}(\underline{n}, \varphi) = (1 - \cos\varphi) n_k n_l + \delta_{kl} \cos\varphi + \varepsilon_{kml} n_m \sin\varphi$
- $\frac{d}{d\varphi} F_{kl}(\underline{n}, \varphi) = \sin\varphi n_k n_l - \delta_{kl} \sin\varphi + \varepsilon_{kml} n_m \cos\varphi$
- $N_{kl} = \frac{d}{d\varphi} F_{kl}(\underline{n}, \varphi)\big|_{\varphi=0} = \varepsilon_{kml} n_m = -\varepsilon_{klm} n_m$
- $\underline{N} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} = n_1 \underline{B}^1 + n_2 \underline{B}^2 + n_3 \underline{B}^3 = n_m \underline{B}^m$, ahol $B_{kl}^m = -\varepsilon_{klm}$
- $N_{kl} = n_m \underline{B}_{kl}^m$
- $\underline{B}$ mátrixok algebrát alkotnak a kommutátorral, mint művelettel
- a fenti állítások bizonyítása ($\underline{F}(\underline{n}, \varphi) = e^{\varphi \underline{N}} = e^{\varphi \underline{n} \underline{B}}$):
- $N^2 = \begin{pmatrix} -n_3^2 - n_2^2 & n_2 n_1 & n_3 n_1 \\ n_1 n_2 & -n_3^2 - n_1^2 & n_3 n_2 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & -n_2^2 - n_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 - 1 & n_2 n_1 & n_3 n_1 \\ n_1 n_2 & n_2^2 - 1 & n_3 n_2 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 - 1 \end{pmatrix} =$ (Q az N
  $= \underline{n} \circ \underline{n} - \underline{E} = -Q$
  által meghatározott forgássíkra képző operátor)
- $\left(N^2 \right)_{kl} = N_{km} N_{ml} = \left(-\varepsilon_{kmp} n_p \right) \left(-\varepsilon_{mlq} n_q \right) = \varepsilon_{pkm} \varepsilon_{mlq} n_p n_q = \left(\delta_{pl} \delta_{kq} - \delta_{pq} \delta_{kl} \right) n_p n_q =$
  $= n_k n_l - n_q^2 \delta_{kl} = n_k n_l - \delta_{kl} = \left(n \circ n - E \right)_{kl}$
- $\left(N^3 \right)_{kl} = \left(N^2 \right)_{km} N_{ml} = \left(n_k n_m - \delta_{km} \right) \left(-\varepsilon_{mlp} n_p \right) = \delta_{km} \varepsilon_{mlp} n_p = -N_{kl}$
- $N^3 = -N$

- $$\left(N^4\right)_{kl} = \left(N^2\right)_{km}\left(N^2\right)_{ml} = \left(n_k n_m - \delta_{km}\right)\left(n_m n_l - \delta_{ml}\right) =$$
  $$= n_k n_m^2 n_l - \delta_{km} n_m n_l - \delta_{ml} n_k n_m + \delta_{km}\delta_{ml} = \delta_{kl} - n_k n_l = -\left(N^2\right)_{kl}$$
- $N^4 = -N^2 = Q$
- $N^5 = N^4 N = -N^2 N = -N^3 = N$
- $$e^{\varphi N} = \sum_k \frac{\varphi^k N^k}{k!} = E + N\sum_l \frac{(-1)^l \varphi^{2l+1}}{(2l+1)!} + Q\sum_l \frac{(-1)^{l+1}\varphi^{2l+2}}{(2l+2)!}$$
- $$\left(e^{\varphi N}\right)_{kl} = \delta_{kl} - \sin\varphi\,\varepsilon_{klm} n_m + \left(\cos\varphi - 1\right)\left(\delta_{kl} - n_k n_l\right) =$$
  $$= \left(1 - \cos\varphi\right) n_k n_l + \cos\varphi\,\delta_{kl} + \sin\varphi\,\varepsilon_{kml} n_m = F_{kl}\left(\underline{n}, \varphi\right)$$

n dimenziós diagonális mátrix:

- $F = e^{\varphi N} = e^{\varphi n B}$
- B -k a forgatások a koordinátasíkokban, ezek generálják az összes forgatást

Vektor+ 4

Áttérés ferdeszögű bázisra

Ortonormált teljes bázis:

- ortonormált: $\underline{\underline{e}}^{(k)}\underline{\underline{e}}^{(l)} = \delta_{kl}$ (reprezentálva: $\sum_m e_m^{(k)} e_m^{(l)} = \delta_{kl}$)
- teljes: $\sum_k \underline{\underline{e}}^{(k)} \circ \underline{\underline{e}}^{(k)} = \underline{\underline{\underline{E}}}$ (reprezentálva: $\sum_k e_p^{(k)} e_q^{(k)} = \delta_{pq}$)
- $\underline{\underline{v}} = \sum_k v_k \underline{\underline{e}}^{(k)}$ és $v_k = \underline{\underline{e}}^{(k)} \underline{\underline{v}}$
- reprezentálva: $e_m^{(k)} = \delta_{km} = O_{km} = \tilde{O}_{mk}$
- teljesség: $\sum_k O_{kp} O_{kq} = \delta_{pq}$, ebből: $\underline{\tilde{O}}\underline{O} = \underline{E}$
- ortonormáltság: $\sum_m O_{km} O_{lm} = \delta_{kl}$, ebből: $\underline{O}\underline{\tilde{O}} = \underline{E}$
- a két állítás egyenértékű

Tetszőleges bázis:

- $\underline{\underline{u}}^{(k)}$ bázisvektorok (reprezentálva: $\underline{u}^{(k)}$ vektorok)
- legyen $U_{mk} = u_m^{(k)}$
- legyen $\underline{\underline{v}}^{(k)}$ reciprok-vektorrendszer: $\underline{\underline{v}}^{(k)} \underline{\underline{u}}^{(l)} = \delta_{kl}$
- legyen $V_{lm} = v_m^{(l)}$
- $\underline{v}^{(k)} \underline{u}^{(l)} = \sum_m v_m^{(k)} u_m^{(l)} = V_{km} U_{ml} = \left(\underline{V}\underline{U}\right)_{kl} = \delta_{kl}$
- ebből: $\underline{V}\underline{U} = \underline{E}$, tehát $\underline{V} = \underline{U}^{-1}$
- ebből: $E_{pq} = \left(\underline{U}\underline{V}\right)_{pq} = \sum_m U_{pm} V_{mq} = \sum_m u_p^{(m)} v_q^{(m)} = \left(\sum_m \underline{u}^{(m)} \circ \underline{v}^{(m)}\right)_{pq} = \delta_{pq}$
- tehát: $\sum_m \underline{u}^{(m)} \circ \underline{v}^{(m)} = \underline{E}$
- létezik: $\underline{A} = \underline{U}\underline{\Lambda}\underline{V}$, ahol $\Lambda_{pq} = \lambda_p \delta_{pq}$, $\underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$
- $A_{kl} = \sum_{mq} U_{km} \Lambda_{mq} V_{ql} = \sum_{mq} u_k^{(m)} \lambda_m \delta_{mq} v_l^{(q)} = \sum_m u_k^{(m)} \lambda_m v_l^{(m)} = \sum_m \lambda_m \left(\underline{u}^{(m)} \circ \underline{v}^{(m)}\right)_{kl}$
- legyen $\underline{P}^{(m)} = \underline{u}^{(m)} \circ \underline{v}^{(m)}$, ekkor: $\underline{P}^{(m)} \underline{P}^{(n)} = \delta_{mn} \underline{P}^{(m)}$
- $\underline{A} = \sum_m \lambda_m \underline{P}^{(m)}$
- $\underline{A}\underline{u}^{(s)} = \sum_m \lambda_m \left(\underline{u}^{(m)} \circ \underline{v}^{(m)}\right) \underline{u}^{(s)} = \sum_m \lambda_m \underline{u}^{(m)} \left(\underline{v}^{(m)} \underline{u}^{(s)}\right) = \sum_m \lambda_m \underline{u}^{(m)} \delta_{ms} = \lambda_s \underline{u}^{(s)}$
- hasonlóképpen: $\underline{v}^{(s)} \underline{A} = \lambda_s \underline{v}^{(s)}$

- létezik $\underline{\underline{A}}$ operátor, melynek reprezentációja $\underline{A}$, $\underline{v}^{(s)}\underline{\underline{A}} = \lambda_s \underline{v}^{(s)}$ és $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{u}}^{(s)} = \lambda_s \underline{\underline{u}}^{(s)}$
- $\underline{A}^2 = (\underline{U}\underline{\Lambda}\underline{V})(\underline{U}\underline{\Lambda}\underline{V}) = \underline{U}\underline{\Lambda}^2\underline{V}$ és $\underline{\Lambda}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$
- ebből: $\underline{A}^m = \underline{U}\underline{\Lambda}^m\underline{V}$ és $\underline{\Lambda}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}$

Áttérés ortonormált bázisról ($\underline{e}^{(k)}$) általános bázisra ($\underline{\underline{f}}^{(k)}$):

- $\underline{a} = \sum_k a_k \underline{e}^{(k)} = \sum_l a'_l \underline{\underline{f}}^{(l)}$
- $a_m = \underline{e}^{(m)}\underline{a} = \underline{e}^{(m)}\sum_l a'_l \underline{\underline{f}}^{(l)} = \sum_l a'_l \left(\underline{e}^{(m)}\underline{\underline{f}}^{(l)}\right) = \sum_l V_{ml} a'_l$
- tehát: $\underline{a} = \underline{V}\,\underline{a}'$
- legyen $\underline{\underline{g}}^{(k)}$ $\underline{\underline{f}}^{(k)}$ reciprok-vektorrendszere ($\underline{\underline{f}}^{(l)}\underline{\underline{g}}^{(k)} = \delta_{lk}$):
- $a'_m = \underline{a}\underline{\underline{g}}^{(m)} = \sum_k a_k \left(\underline{e}^{(k)}\underline{\underline{g}}^{(m)}\right) = \sum_k U_{mk} a_k$
- $\underline{a}' = \underline{U}\,\underline{a}$, ezért $\underline{V} = \underline{U}^{-1}$
- $U_{mk} = \underline{e}^{(k)}\underline{\underline{g}}^{(m)} = g_k^{(m)}$
- $V_{ml} = \underline{e}^{(m)}\underline{\underline{f}}^{(l)} = f_m^{(l)}$
- speciális eset: $\underline{\underline{f}}^{(k)}$ ortonormált:
  - $\underline{\underline{g}}^{(k)} = \underline{\underline{f}}^{(k)}$
  - $U_{mk} = g_k^{(m)} = f_k^{(m)} = V_{km}$
  - $\underline{U} = \underline{\tilde{V}}$: ortogonális mátrixok

mátrixok transzformációja:

- $\underline{b} = \underline{\underline{C}}\underline{a}$ reprezentálható $\underline{b} = \underline{C}\,\underline{a}$ -ként és $\underline{b}' = \underline{C}'\,\underline{a}'$ -ként is
- $\underline{C}'\,\underline{a}' = \underline{b}' = \underline{U}\,\underline{b} = \underline{U}\,\underline{C}\,\underline{a} = \underline{U}\,\underline{C}\,\underline{V}\,\underline{a}'$
- tehát: $\underline{C}' = \underline{U}\,\underline{C}\,\underline{V} = \underline{U}\,\underline{C}\,\underline{U}^{-1}$ (bagoly-transzformáció)
- $C'_{kl} = U_{km} C_{mp} U_{pl}^{-1}$
- speciális eset: $\underline{\underline{f}}^{(k)}$ ortonormált ($\underline{U}^{-1} = \underline{\tilde{U}}$):
  - $C'_{kl} = U_{km} U_{lp} C_{mp}$

Vektorok osztályozása transzformációk szerint:

- forgatásokkal szemben (nem kommutatív csoport): tenzori rend
  - 0. rendű tenzor (skalár): $\alpha' = \alpha$

- 1. rendű tenzor (vektor): $b'_k = U_{km} b_m$
- 2. rendű tenzor: $C'_{kl} = U_{km} U_{lp} C_{mp}$
- 3. rendű tenzor: $T'_{klm} = U_{kp} U_{lq} U_{ms} T_{pqs}$
- 4. rendű tenzor: $\Theta'_{klmn} = U_{kp} U_{lq} U_{ms} U_{nt} \Theta_{pqst}$
- stb.

- eltolásokkal szemben (kommutatív csoport):
  - kötött vektor, szabad vektor, stb.
- tükrözésekkel szemben:
  - előjelet vált: polárvektor
  - nem vált előjelet: axiálvektor
- Lorentz-tranzformációval szemben: új besorolást kell majd készíteni

Vektorszámítás 2.

Reciprok vektorrendszer:

- egy $\underline{\underline{a}},\underline{\underline{b}},\underline{\underline{c}}$ vektorokból álló $\underline{\underline{f}}^{(i)}$ vektorrendszer reciprok vektorrendszere $\underline{\underline{F}}^{(k)}$, ha $\underline{\underline{f}}^{(i)}\underline{\underline{F}}^{(k)} = \delta_{ik}$
- $\underline{\underline{A}} = \dfrac{1}{\left(\underline{\underline{a}},\underline{\underline{b}},\underline{\underline{c}}\right)}\left(\underline{\underline{b}}\times\underline{\underline{c}}\right)$, $\underline{\underline{B}} = \dfrac{1}{\left(\underline{\underline{a}},\underline{\underline{b}},\underline{\underline{c}}\right)}\left(\underline{\underline{c}}\times\underline{\underline{a}}\right)$ és $\underline{\underline{C}} = \dfrac{1}{\left(\underline{\underline{a}},\underline{\underline{b}},\underline{\underline{c}}\right)}\left(\underline{\underline{a}}\times\underline{\underline{b}}\right)$
- példa: szóródás optikai rácson, két tömeg által csigák segítségével húzott harmadik

Ferdeszögű koordinátarendszerek

Vektorok, vektorműveletek

Reprezentáció:

- $\underline{\underline{a}} = \sum_i a_i \underline{\underline{f}}_{(i)}$
- $\underline{\underline{a}} = \left(a_1, a_2, a_3\right)$
- $\underline{\underline{a}}\underline{\underline{F}}^{(k)} = a_k$
- $\underline{\underline{f}}_{(i)}\underline{\underline{F}}^{(k)} = \delta^i{}_k = \delta_k{}^i$

jelölések a Jánosi könyv szerint:

- $\underline{\underline{a}} = \sum_i \overline{a_i}\,\underline{\underline{F}}^{(i)}$
- $\overline{\underline{\underline{a}}} = \left(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}\right)$

általunk alkalmazott jelölések:

- $\underline{\underline{a}} = \sum_i a^i \underline{\underline{f}}_{(i)} = \sum_k a_k \underline{\underline{F}}^{(k)}$
- a^i: kontravariáns komponens, a_i: kovariáns komponens

Műveletek:

számmal szorzás ($\underline{\underline{b}} = \lambda \underline{\underline{a}}$):

- $b^i = \underline{\underline{b}}\underline{\underline{F}}^{(i)} = \lambda \underline{\underline{a}}\underline{\underline{F}}^{(i)} = \lambda a^i$
- $b_i = \underline{\underline{b}}\underline{\underline{f}}_{(i)} = \lambda \underline{\underline{a}}\underline{\underline{f}}_{(i)} = \lambda a_i$

összeadás ($\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{c}}$):

- $a^i + b^i = \underline{\underline{a}}\underline{\underline{F}}^{(i)} + \underline{\underline{b}}\underline{\underline{F}}^{(i)} = \left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}\right)\underline{\underline{F}}^{(i)} = \underline{\underline{c}}\underline{\underline{F}}^{(i)} = c^i$
- $a_i + b_i = \underline{\underline{a}}\underline{\underline{f}}_{(i)} + \underline{\underline{b}}\underline{\underline{f}}_{(i)} = \left(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}\right)\underline{\underline{f}}_{(i)} = \underline{\underline{c}}\underline{\underline{f}}_{(i)} = c_i$

skaláris szorzás:

- $\underline{\underline{a}}\underline{\underline{b}} = a^i \underline{\underline{f}}_{(i)} b_k \underline{\underline{F}}^{(k)} = a^i b_k \delta_i^k = a^i b_i = a_k b^k$
- $\underline{\underline{a}}\underline{\underline{b}} = a^i \underline{\underline{f}}_{(i)} b^k \underline{\underline{f}}_{(k)} = a^i b^k G_{ik}$, $G_{ik} = G_{ki} = \underline{\underline{f}}_{(i)}\underline{\underline{f}}_{(k)}$: metrikus tenzor
- $\underline{\underline{a}}\underline{\underline{b}} = a_i \underline{\underline{F}}^{(i)} b_k \underline{\underline{F}}^{(k)} = a_i b_k G^{ik}$, $G^{ik} = G^{ki} = \underline{\underline{F}}^{(i)}\underline{\underline{F}}^{(k)}$

- $G^{ik}b_k = b^i$ és $G_{ik}a^k = a_i$ (lehúzás és felhúzás)
- $G_{jk}G^{ki} = \delta_j^{\ i}$

vektoriális szorzás:

- legyen $v = \left(\underline{\underline{f}}_{(1)}, \underline{\underline{f}}_{(2)}, \underline{\underline{f}}_{(3)}\right)$
- $c_k \underline{\underline{F}}^{(k)} = \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}} = a^i \underline{\underline{f}}_{(i)} \times b^j \underline{\underline{f}}_{(j)} = a^i b^j v \varepsilon_{ijk} \underline{\underline{F}}^{(k)}$
- $c_k = v\varepsilon_{ijk} a^i b^j$
- $c^k \underline{\underline{f}}_{(k)} = \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{b}} = a_i \underline{\underline{F}}^{(i)} \times b_j \underline{\underline{f}}^{(j)} = a_i b_j v \varepsilon^{ijk} \underline{\underline{F}}_{(k)}$
- $c^k = v\varepsilon^{ijk} a_i b_j$
- $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk}$

Lineáris operátorok reprezentációja:

- $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{Aa}}$
- $b^i = \underline{\underline{bF}}^{(i)} = \left(\underline{\underline{Aa}}\right)\underline{\underline{F}}^{(i)} = \left(\underline{\underline{A}} a^j \underline{\underline{f}}_{(j)}\right)\underline{\underline{F}}^{(i)} = \left(\underline{\underline{F}}^{(i)} \underline{\underline{A}}\underline{\underline{f}}_{(j)}\right) a^j = A^i_{\ j} a^j$
- $A^i_{\ j} = \underline{\underline{F}}^{(i)} \underline{\underline{A}}\underline{\underline{f}}_{(j)}$
- $A^{ij} = \underline{\underline{F}}^{(i)} \underline{\underline{AF}}^{(j)}$, $b^i = A^{ij} a_j$
- $A_{ij} = \underline{\underline{f}}_{(i)} \underline{\underline{A}}\underline{\underline{f}}_{(j)}$, $b_i = A_{ij} a^j$
- $A_i^{\ j} = \underline{\underline{f}}_{(i)} \underline{\underline{AF}}^{(j)}$, $b_i = A_i^{\ j} a_j$

kapcsolat az operátorok alakjai között:

- $A_{ij}G^{jk} = A_i^{\ k}$ és $G^{ij}A_{jk} = A^i_{\ k}$
- $A^{ij}G_{jk} = A^i_{\ k}$ és $G_{ij}A^{jk} = A_i^{\ k}$
- $A_i^{\ j}G_{jk} = A_{ik}$ és $G^{ij}A_j^{\ k} = A^{ik}$
- $A^i_{\ j}G^{jk} = A^{ik}$ és $G_{ij}A^j_{\ k} = A_{ik}$

nevezetes operátorok:

- $N^{ik} = N_{ik} = N^i_{\ k} = N_i^{\ k} = 0$
- $E^{ij} = \underline{\underline{F}}^{(i)} \underline{\underline{F}}^{(j)} = G^{ij}$ és $E_{ij} = \underline{\underline{f}}_{(i)} \underline{\underline{f}}_{(j)} = G_{ij}$
- $E^i_{\ j} = \underline{\underline{F}}^{(i)} \underline{\underline{f}}_{(j)} = \delta^i_{\ j}$ és $E_i^{\ j} = \underline{\underline{f}}_{(i)} \underline{\underline{F}}^{(j)} = \delta_i^j$

Áttérés másik bázisra:
vektorok:

- $\underline{\underline{a}} = a^i \underline{\underline{f}}_{(i)}$
- $a'^k = \underline{\underline{aF}}'^{(k)} = \underline{\underline{f}}_{(i)} \underline{\underline{F}}'^{(k)} a^i = S^k_{\ i} a^i$
- ugyanígy: $a'_k = T_i^k a_k$

tenzorok:

- $A'^{ij\ldots l}_{pq\ldots s} = S^i_{\ i'} S^j_{\ j'} \ldots S^l_{\ l'} T_p^{\ p'} T_q^{\ q'} \ldots T_s^{\ s'} A^{i'j'\ldots l'}_{\qquad p'q'\ldots s'}$

Sajátértékprobléma:

- $A_k{}^i S_i^{(l)} = \lambda_k S_k^{(l)}$

Vektoranalízis görbevonalú, ortogonális koordináta-rendszerekben

Deriválttenzor

- $\Delta \underline{\underline{v}}\left(\underline{\underline{r}}\right) = \underline{\underline{v}}\left(\underline{\underline{r}}_0 + \Delta \underline{\underline{r}}\right) - \underline{\underline{v}}\left(\underline{\underline{r}}_0\right) = \underline{\underline{D}}\Delta \underline{\underline{r}} + \underline{\underline{\varepsilon}}\Delta \underline{\underline{r}}$
- $\underline{\underline{v}}\left(\underline{\underline{r}}\right) \approx \underline{\underline{\underline{Dr}}} + \underline{\underline{v}}_0$
- reprezentálva: $\Delta \underline{v} = \underline{D}\Delta \underline{r} + \underline{\varepsilon}\Delta \underline{r}$
- $\Delta v_i = D_{ij}\Delta x_j + \varepsilon_{ij}\Delta x_j$
- $D_{ij} = \dfrac{\Delta v_i}{\Delta x_j} + \varepsilon_{ij} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v_i}{\Delta x_j} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} = \partial_j v_i = \left(\underline{\nabla} \circ \underline{v}\right)_{ji}$
- $\mathrm{Sp}\,\underline{D} = \mathrm{div}\,\underline{v}$
- $\underline{\tilde{D}} = \underline{\nabla} \circ \underline{v} \Rightarrow \left(\underline{D} - \underline{\tilde{D}}\right)\underline{r} = -\mathrm{rot}\,\underline{v} \times \underline{r}$ (deriválttenzor vektorinvariánsa a rotáció -1-szerese)
- legyen $\underline{v} = \left(u, v, w\right)$, ekkor a Jacoby-determináns: $J\left(u, v, w\right) = \det \underline{D}$
- n indexes tenzorra: $\dfrac{\partial}{\partial x_s} J_{ijk\ldots l}\left(\underline{r}\right) = A_{ijk\ldots ls}$
- a deformációtenzor a deriválttenzor szimmetrikus része

Görbevonalú koordináta-rendszerek

- görbevonalú koordináták: $\underline{r}\left(u_1, u_2, u_3\right)$ bijekció, az azonos u_i -jű pontok egy síkot alkotnak (pld.: térbeli polárkoordináta-rendszer, $\underline{r} = \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 \\ 2u_1u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$)
- lokálisan az esetleges szinguláris pontok (pld.: Északi-sark, Déli-sark) kivételével egyenesvonalú ferdeszögű koordináta-rendszernek tekinthetők
- $x'^i = f^i\left(x^1, x^2, x^3\right)$: nem lineáris kapcsolat
- de $\Delta x'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^k}\Delta x^k = S^i{}_k \Delta x^k$: lineáris kapcsolat
- a^i kontravariáns vektort alkot, ha $\Delta a'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^k}\Delta a^k$
- b_i kovariáns vektort alkot, ha $\Delta b_i' = \dfrac{\partial x^k}{\partial x'^i}\Delta b$

Görbevonalú, ortogonális koordináta-rendszerek

- ortogonalitás: $i \neq k \Rightarrow \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}\dfrac{\partial \underline{r}}{\partial u_k} = 0$
- lokálisan az esetleges szinguláris pontok (pld.: Északi-sark, Déli-sark) kivételével egyenesvonalú derékszögű koordináta-rendszernek tekinthetők

- legyen $h_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}$, ekkor: $\Delta s^2 = \left(\Delta \underline{r}\right)^2 = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}\Delta u_i\right)^2 = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_i}\right)^2 \Delta u_i^2 = h_i^2 \Delta u_i^2$

fizikai komponensek:
- a vektor komponensei a kezdőpontban illesztett ortogonális koordinátarendszerben
- azonos dimenziójúak

Vektoranalízis

Gradiens:
- $\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = a_i$
- kovariáns vektort alkot, mert: $a'_k = \frac{\partial \phi}{\partial x'^k} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} a_i$
- fizikai komponensekkel: $\left(\operatorname{grad}\phi\right)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \phi}{\partial u^i}$

Rotáció:
- $\left(\operatorname{rot}\underline{\underline{v}}\right)_3 \approx \frac{1}{\Delta u h_1}\frac{1}{\Delta v h_2}\left(\left(v_2 h_2 \Delta v\right)_{u_0+\Delta u} - \left(v_1 h_1 \Delta u\right)_{v_0+\Delta v} - \left(v_2 h_2 \Delta v\right)_{u_0} + \left(v_1 h_1 \Delta u\right)_{v_0} -\right)$
- tehát: $\left(\operatorname{rot}\underline{\underline{v}}\right)_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial\left(v_2 h_2\right)}{\partial u} - \frac{\partial\left(v_1 h_1\right)}{\partial v}\right)$
- hasonlóképpen: $\left(\operatorname{rot}\underline{\underline{v}}\right)_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial\left(v_3 h_3\right)}{\partial v} - \frac{\partial\left(v_2 h_2\right)}{\partial w}\right)$
- és: $\left(\operatorname{rot}\underline{\underline{v}}\right)_2 = \frac{1}{h_1 h_3}\left(\frac{\partial\left(v_1 h_1\right)}{\partial w} - \frac{\partial\left(v_3 h_3\right)}{\partial u}\right)$
- áltaklánosan: $\left(\operatorname{rot}\underline{\underline{v}}\right)_i = \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3}\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\left(v_k h_k\right)}{\partial u_j}$

Divergencia:
- $$\operatorname{div}\underline{\underline{v}} \approx \frac{1}{\Delta V}\sum \underline{\underline{v}}\Delta\underline{\underline{F}} = \frac{1}{\Delta u h_1}\frac{1}{\Delta v h_2}\frac{1}{\Delta w h_3}$$
$$\left(\left(v_1 h_2 \Delta v h_3 \Delta w\right)_{u_0+\Delta u} - \left(v_1 h_2 \Delta v h_3 \Delta w\right)_{u_0} + \left(v_2 h_1 \Delta u h_3 \Delta w\right)_{v_0+\Delta v} - \left(v_2 h_1 \Delta u h_3 \Delta w\right)_{v_0} + \left(v_3 h_1 \Delta u h_2 \Delta v\right)_{w_0+\Delta w} - \left(v_3 h_1 \Delta u h_2 \Delta v\right)_{w_0}\right)$$
- tehát:
$$\operatorname{div}\underline{\underline{v}} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial\left(v_1 h_2 h_3\right)}{\partial u} + \frac{\partial\left(v_2 h_1 h_3\right)}{\partial v} + \frac{\partial\left(v_3 h_1 h_2\right)}{\partial w}\right) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_i \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{v_i h_1 h_2 h_3}{h_i}\right)$$

A Laplace egyenlet és megoldásai

örvény és forrásmentes vektormező:
- $\operatorname{div}\underline{\underline{v}} = 0 \wedge \operatorname{rot}\underline{\underline{v}} = 0$
- pld.: magnetosztatikus mező, töltésmentes elektrosztatikus mező, zárt és súrlódásmentes folyadékáramlás sebességmezeje, hőáram (forrásmentes)
- $\underline{\underline{v}} = \operatorname{grad}\phi\left(\underline{\underline{r}}\right) \Rightarrow \Delta\phi = \operatorname{divgrad}\phi = 0$ (Laplace egyenlet)

Earnshaw-tétel:

- elektromosan töltött testet nem lehet csak elektromos erőkkel stabilis egyensúlyban tartani (mágneses és gravitációs térre is igaz)
- $\underline{F} = \int \underline{E}(\underline{r})\rho(\underline{r})dV$, kívülről nézve: $\underline{F}(\underline{R}) = \int \underline{E}(\underline{R}+\underline{r})\rho(\underline{r})dV$
- stabilis egyensúly feltétele: $\operatorname{div}^{(\underline{R})} \underline{F} < 0$
- $\operatorname{div}^{(\underline{R})} \underline{F}(\underline{R}) = \int \operatorname{div} \underline{E}(\underline{R}+\underline{r})\rho dV = 0$

Harmonikus függvények:
- harmonikus függvény az a függvény, ami kielégíti a Laplace egyenletet
- csak nyeregpontjai vannak se minimuma, se maximuma csak a határon
- Taylor sorba fejtve: $\phi(\underline{r}) = \phi(\underline{r}_0) + \underline{a}(\underline{r}-\underline{r}_0) + (\underline{r}-\underline{r}_0)\underline{A}(\underline{r}-\underline{r}_0)$
- $\Delta\phi = 0 \Rightarrow 2\operatorname{Sp}\underline{A} = 0$, tehát $\underline{A}$ sajátértékei különböző előjelűek
- legyen $w = f(z) \Rightarrow u + iv = f(x+iy) \Rightarrow \Delta u(x,y) = 0 \wedge \Delta v(x,y) = 0$
- $\Delta\phi = 0$, akkor egy $\underline{r}_0$ középpontú, r sugarú gömbön integrálva $\frac{\int_G \phi dA}{4r^2\pi} = \phi(\underline{r}_0)$

Egyértelműségi tételek:

I. peremérték-feladat, Dirichlet-feladat:
- ha ϕ a határon meg van adva (és folytonos), akkor egyértelmű a megoldás
- t. f. h.: $\Delta\phi_1(\underline{r}) = \Delta\phi_2(\underline{r}) = 0$, ϕ_1 és ϕ_2 a határon $f(\underline{r})$
- legyen $\phi_1 - \phi_2 = \psi$, $\Delta\psi = 0$ és ψ a határon 0
- $0 = \oint \psi \operatorname{grad}\psi d\underline{A} = \int \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad}\psi) dV = \int (\operatorname{grad}\psi)^2 + \psi\Delta\psi dV = \int (\operatorname{grad}\psi)^2 dV$
- ebből $\operatorname{grad}\psi = 0 \Rightarrow \psi = \psi_0 = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$

II. peremérték-feladat, Neuman-feladat:
- ha $\underline{n}\operatorname{grad}\phi$ a határon meg van adva (és folytonos), akkor ϕ_0 erejéig egyértelmű a megoldás
- t. f. h.: $\Delta\phi_1(\underline{r}) = \Delta\phi_2(\underline{r}) = 0$, $\underline{n}\operatorname{grad}\phi_1$ és $\underline{n}\operatorname{grad}\phi_2$ a határon $g(\underline{r})$
- legyen $\phi_1 - \phi_2 = \psi$, $\Delta\psi = 0$ és $\underline{n}\operatorname{grad}\psi$ a határon 0
- $0 = \oint \psi \operatorname{grad}\psi d\underline{A} = \int \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad}\psi) dV = \int (\operatorname{grad}\psi)^2 + \psi\Delta\psi dV = \int (\operatorname{grad}\psi)^2 dV$
- ebből $\operatorname{grad}\psi = 0 \Rightarrow \psi = \psi_0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 + \phi_0$

III. peremérték-feladat:
- ha $\alpha(\underline{r})\phi + \beta(\underline{r})\underline{n}\operatorname{grad}\phi$ a határon meg van adva (és folytonos), akkor egyértelmű a megoldás

Numerikus megoldás:
- vegyünk egy téglalap alakú tartományt (ha nem ilyen a tartományunk, akkor a szélén lévő rácpontokból indulunk majd ki) és osszuk fel $\Delta x = \Delta y$ oldalú kis négyzetekre
- ekkor a következőképpen tudjuk kiszámítani egy pontban ϕ-t, ha ismerjük a környező pontokban
- $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\frac{\phi_j - \phi}{\Delta x} - \frac{\phi - \phi_b}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\phi_j + \phi_b - 2\phi}{\Delta x^2}$, ugyanígy $\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\phi_f + \phi_l - 2\phi}{\Delta y^2} = \frac{\phi_f + \phi_l - 2\phi}{\Delta x^2}$

- $\frac{\phi_j+\phi_b+\phi_f+\phi_l-4\phi}{\Delta x^2}=\Delta\phi=0 \Rightarrow \phi=\frac{\phi_j+\phi_b+\phi_f+\phi_l}{4}$ (egyenletrendszer)
- ha nem rácspontra akarjuk kiszámolni, akkor interpolálunk
- iterációs eljárás: $\phi=0$-ról indulva sorra kiszámolva a fenti eredményt a rácspontokra, majd ismételve (gyorító eljárás: belekalkulálunk egy kis túllövést)

a Monte Carlo módszer:

- a P pontból véletelenszerű bolyongás a határig N-szer, a potenciál értéke a határon ϕ_i, ekkor $\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N}\phi_i}{N}=\phi(P)\wedge\frac{\Delta\phi}{\phi}=\frac{1}{\sqrt{N}}$

Hullámegyenlet

- $\Delta\phi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}$, átskálázva $\Delta\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ $(ct'=t)$

egydimenziós hullámegyenlet:

- ált. megoldása: $\phi(x,t)=f(x-t)+g(x+t)$
- lokalizált hullám lokalizált marad

háromdimenziós gömbszimmetrikus $\phi(r,t)$ hullámok:

- $\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)=\Delta\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2}$
- ebből $\phi=\frac{f(r-t)}{r}+\frac{g(r+t)}{r}$
- lokalizált hullám lokalizált marad

két dimenziós hullámok:

- Bessel-függvények, $\frac{1}{r}$-esen csengenek le
- vonalszerű hullámforrásból kiinduló kétdimenziós hullámok egydimenziós hullámot alkotnak (általánosítható N dimenzióra)

utózengés: páros dimenzióban van, páratlan dimenzióban nincs

Numerikus megoldás:

két dimenzióban (három dimenzióra általánosítható):

- $\phi_{\text{később}}=\sum_1^4\phi_{\text{körbe}}-\phi_{\text{előbb}}-2\phi_{\text{most}}$
- $c\Delta t=\Delta x$