Csoportelmélet

A csoportaxiómák nem tartalmaznak ellentmondást, mert az $(\{1\},\cdot)$ csoportot alkot.

Fizika felépítése:
- fizikai valóság
- fizikai modellek
- matematikai modellek (átjárhatók)
- reprezentációk (áttranszformálhatók egymásba)
- eredmény

Transzformációk (reprezentációelmélet):
- aktív transzformációk: nézőpontváltás
- passzív transzformációk: a rendszert változtatom meg
- minden aktív transzformációhoz tartozik passzív, de ez fordítva nem igaz

Szimmetria:
- a test a változtatás után ugyanúgy néz ki
- a valóságban nem tökéletes
- az ekvivalencia kísérleti kérdés
- egy objektum szimmetrikus állapotainak halmaza: X
- az X halmaz elemei áttranszformálhatók egymásba: szimmetria-transzformációk
- legyen T egy adott objektum szimmetria-transzformációinak halmaza
- T a folytasd (kompozíció) műveletre csoportot alkot (az adott objektum szimmetriacsoportja):
  - $\forall T_1, T_2 \in \mathrm{T} : \exists T_4 \in \mathrm{T} : T_4 = T_1 T_2$
  - $\forall T_1, T_2, T_3 \in \mathrm{T} : (T_3 T_2) T_1 = T_3 (T_2 T_1)$
    - $(T_3 T_2) T_1 = T_4 T_1 = T_5 = T_3 T_6 = T_3 (T_2 T_1)$
  - $\exists I \in \mathrm{T} : \forall T \in \mathrm{T} : TI = IT = T$ ($Ix = x$)
  - $\forall T \in \mathrm{T} : \exists T' \in \mathrm{T} : TT' = T'T = I$

Transzformációk fajtái:
- transzformáció: belső struktúra nem változik, külvilághoz való viszony változhat
- szimmetria transzformáció: külvilághoz való viszony is megmarad
- ha egy mérés során nyert φ adatra $\varphi(x) = \varphi(Tx)$, akkor φ invariáns a T transzformációra
- egybevágósági transzformáció: skaláris szorzat invariáns
- hasonlósági transzformáció: vektorok szöge invariáns
- affin transzformáció: egyenesek invariánsak
- perspektív transzformáció: csúcsok számát változatlanul hagyja
- gyúrás: folytonosságot változatlanul hagyja
  - ezzel foglalkozik a topológia
  - $c - e + l$-et változatlanul hagyja (c: csúcsok száma, e: élek száma, l: lapok száma), értéke gömbnél 2, tórusznál 0, Möbius-szalagnál -1
- ha egy mérés során nyert φ, ψ adatokra $\varphi(x) = a\psi(x) \Rightarrow \varphi(Tx) = a\psi(Tx)$, akkor φ, ψ kovariánsak a T transzformációra

Elemi szimmetria-transzformációk:
- minden objektumra szimmetria-transzformációk

- végtelen darab van
- I
- térbeli eltolás
  - a tér homogén
  - érvényes a lendületmegmaradás
- térbeli elforgatás
  - a tér izotróp
  - érvényes a perdületmegmaradás
- csoportot alkotnak

Érdekességek ezzel kapcsolatban:
- a fenti kettőből következik a fizikai kísérletek egyértelműsége (Galilei-féle relativitási elv)
- ami minden pontjában izotróp az homogén is
- az idő nem homogén, mivel volt kezdete
  - az energia-megmaradás elve nem érvényes
- az idő nyilvánvalóan nem izotróp, mert van benne kitüntetett irány

Véges csoportok

Alapfogalmak:
- $(G,\cdot)$: csoport
- e: egységelem
- a^{-1}: a inverze
- $|G|$: G elemeinek száma (rendje) ($|G| \geq 1$)

A csoportok csoportosítása
- véges
- végtelen
  - megszámlálhatóan
  - folytonosan
    - kompakt
    - nem kompakt

Absztrakt és konkrét csoportok:
- vegyük $(G_1,\circ)$ ősképet és $(G_2,*)$ képet
- ha $\forall a,b \in G_1 : \exists \varphi : \varphi(a) * \varphi(b) = \varphi(a \circ b)$, akkor φ homomorfizmus
- ha a homomorfizmus invertálható, akkor az izomorfizmus
- izomorfizmus elv: izomorf struktúrák ugyanazon absztrakt struktúra reprezentációi, kivéve, ha egy nagy struktúrának két közös résszel rendelkező részstruktúrája izomorf egymással
- az algebra olyan tulajdonságokkal foglalkozik, amik egymással izomorf struktúráknál megegyeznek

Ciklus csoportok (C_n):
- n-edrendű komplex egységgyökök szorzással alkotott csoportjai
- szabályos n-oldalú sokszögek olyan elforgatásainak csoportjaihoz tartozó absztrakt csoportok, melyek szimmetria transzformációk, ha $n \geq 3$
- minden n-re léteznek
- kommutatívak

- C_∞ : a kör (folyamatosan végtelen) vagy az egyenes (megszámlálhatóan végtelen, pld.: $(Z,+)$) szimmetriacsoportja (kétféle van)

Részcsoport:

- ha $(G,\cdot)$, $(H,\cdot)$ csoportok és $H \subseteq G$, akkor H részcsoportja G -nek ($H < G$)
- önmagának és a triviális csoportnak (lásd alább) minden csoport részcsoportja, ezek a triviális részcsoportok, a többi a valódi részcsoport
- $H_1 < G \wedge H_2 < G \Rightarrow H_1 \cap H_2 < G$ triviálisan belátható
- Lagrans tétel: $|H| \| G|$
- prímrendű csoportnak nincs valódi részcsoportja, csak a két triviális részcsoport
- egy csoport struktúráját az adja meg, hogy hogyan helyezkednek benne el a részcsoportok

A Lagrans-tétel bizonyítása, ha $|G| < \infty$:

- komplexusok: $K, L \subseteq G$
- G hatványhalmaza: 2^G
- komplexusszorzás:
  - $KL = M$, $M = \{m | m = kl, k \in K, l \in L\}$ ($M \subseteq G$)
  - triviálisan asszociatív
  - $(2^G, \cdot)$ félcsoport
  - ha $a \in G$ értelmes az $\{a\} K = M$ (egyszerűbben: $aK = M$): $|M| = |K| = |aK|$
- állítás: $H < G \Rightarrow aH = H \vee AH \cap H = \emptyset$
  - ha $a \in H$, akkor az első triviális, ha nem akkor lehetetlen
  - indirekt feltevés: $\exists b : b \in H \wedge b \in aH$ ($a \notin H$)
  - $bh' = a$: ellentmondás
- ha $H \cup aH \neq G$ $\exists c : c \notin H \wedge c \notin aH$
- állítás: $aH \cap cH = \emptyset$
  - indirekt feltevés: $\exists d : d \in cH \wedge c \in aH$
  - $d = ah_1 = ch_2$
  - $ah_1 h_2' = ah_3 = c$: ellentmondás
- következmény: G csoport felosztható $|H|$ elemű diszkjunt részhalmazokra
  - mellékosztályok (uniójuk lefedi a csoportot)
    - baloldali mellékosztályok: $aH, cH, fH, \ldots$
    - jobboldali mellékosztályok: $Ha, Hc, Hf, \ldots$
    - kommutatív csoportnál megegyeznek
- ez ekvivalens a bizonytandó tétellel

Elsőrendű absztrakt csoport:

C_1	e
e	e

- triviális csoport

Másodrendű absztrakt csoport:

C_2	e	a
e	e	a
a	a	e

- konkrét csoport:
  - tükrözés és identitás lineáris transzformációk a folytasd művelettel

Harmadrendű absztrakt csoport:

C_3	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Negyedrendű absztrakt csoportok:

C_4	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

K	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

- Klein-csoport
- C_2 csoportok alkotják

n generátoros szabad csoport:

- elemei: $a, b, c, ...n, A, B, C, ...N$ és a belőlük konplantációval (egymás mellé írás) képzett szavak
- egységelem: üres szó,
- inverz: $Kk = kK = \_$

egy konkrét 2 generátoros szabad csoport:

- egyenlő oldalú háromszög forgatása és tükrözése (e, r, t)
- definiáló relációk:
  - $rrr = e$
  - $tt = e$
  - $rtrt = e$, ekvivalens azzal, hogy: $rt = trr$
- Hány eleme van a csoportnak?
  - szóprobléma: általánosan megoldhatatlan
  - a harmadik szabály segítségével $tt...trr...r$ alakba tudok írni minden szót (buborékoltató eljárás)
  - ekkor az elemek: e, r, rr, t, tr, trr
- szorzástáblázat

	e	r	rr	t	tr	trr
e	e	r	rr	t	tr	trr
r	r	rr	e	trr	t	tr
rr	rr	e	r	tr	trr	t
t	t	tr	trr	e	r	rr
tr	tr	trr	t	rr	e	r
trr	trr	t	tr	r	rr	e

- tükrözések involatikus elemek $xx = e$
- részcsoportjai:

- háromelemű: $H_0 = \{e, r, rr\}$
- kételeműek: $H_1 = \{e, t\}$, $H_2 = \{e, tr\}$, $H_3 = \{e, trr\}$

- mellékosztályok (lehet őket egy elemükkel reprezentálni):
  - H_1 bal:
    - $eH_1 = tH_1 = H_1$
    - $rH_1 = trrH_1 = \{r, trr\}$
    - $rrH_1 = trH_1 = \{rr, tr\}$
  - H_1 jobb:
    - $H_1e = H_1t = H_1$
    - $H_1r = H_1tr = \{r, tr\}$
    - $H_1rr = H_1trr = \{rr, trr\}$
  - H_2 bal:
    - $eH_2 = trH_2 = H_2$
    - $rH_2 = tH_2 = \{r, t\}$
    - $rrH_2 = trrH_2 = \{rr, trr\}$
  - H_2 jobb:
    - $H_2e = H_2tr = H_2$
    - $H_2r = H_2trr = \{r, trr\}$
    - $H_2rr = H_2t = \{rr, t\}$
  - H_3 bal:
    - $eH_3 = trrH_3 = H_3$
    - $rH_3 = trH_3 = \{r, tr\}$
    - $rrH_3 = tH_3 = \{rr, t\}$
  - H_3 jobb:
    - $H_3e = H_3trr = H_3$
    - $H_3r = H_3t = \{r, t\}$
    - $H_3rr = H_3tr = \{rr, tr\}$
  - H_0 bal:
    - $eH_0 = rH_0 = rrH_0 = H_0$
    - $tH_0 = trH_0 = trrH_0 = \{t, tr, trr\}$
  - H_0 jobb:
    - $H_0e = rH_0r = H_0rr = H_0$
    - $H_0t = H_0tr = H_0trr = \{t, tr, trr\}$

normálosztó, normális részcsoport, invariáns részcsoport:

- $N < G \wedge \forall a \in G : aN = Na$
- jele: $N \lhd G$
- kommutatív csoportban minden részcsoport normálosztó
- $\forall a \in G : \forall n \in N : \exists n' \in N : an = n'a$

- $\forall a \in G : \forall n \in N : ana^{-1} \in N$
- n a-val vett konjugáltja: ana^{-1}
- komplexusokra: K a-val vett konjugáltja: aKa^{-1}
- $\forall a \in G : aNa^{-1} = N$
- a normálosztóhoz tartozó mellékosztályok (G N szerinti faktorcsoportja, jelölése: G/N) a komplexusszorzásra nézve csoportot alkotnak:
  - asszociativitás öröklődik
  - zártság: $(an_1)(bn_2) = a(n_1b)n_2 = a(bn_3)n_2 = (ab)n_4 \Rightarrow (aN)(bN) = (ab)N$
  - egységelem: $N = eN$, mert $(aN)(eN) = aN \wedge (eN)(aN) = aN$
  - inverz: $(aN)^{-1} = a^{-1}N$, mert $(aN)(a^{-1}N) = eN$
- $|G/N| = \dfrac{|G|}{|N|} = G : N$
- példák:
  - síkon, vagy térben egy egyenes
  - $(Z,+)$ csoportban egy adott számmal osztható számok

kongluencia csoportok (osztási maradékok szerint):

- $(\bmod 5, +)$:

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

- $(\bmod n, +)$ C_n konkrét csoportja
- $(\bmod 5, \cdot)$:

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

  - első sort és oszlopot elhagyva csoport
- $(\bmod 6, \cdot)$:

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

  - nem csoport ($+$-al nullosztós gyűrű)
- prím alapú maradékosztályok 0-t elhagyva csoportot alkotnak

homomorfizmus:

- $(G_1, \circ)$, $(G_2, *)$ csoportok

- $\varphi : G_1 \to G_2$, legyen $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$, $c = a \circ b$, $\chi = \alpha * \beta$
- φ homomorfizmus, ha $\forall a,b \in G_1 : \varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$
- fajtái:
  - triviális homomorfizmus: mindent az egységelembe képez
  - izomorfizmus
  - egységelembe képződő ele $\begin{pmatrix} p \\ V \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ 0 & 0 & f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ 0 & 0 & f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ V \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$ mek nem triviális részhalmazt alkotnak
    - ez a részhalmaz a homomorfizmus magja, jelölése: $\ker \varphi$

tétel: $\ker \varphi \lhd G_1$

- $\ker \varphi < G_1$ ($\forall h_1, h_2 \in \ker \varphi : h_1 \circ h_2^{-1} \in \ker \varphi$)
  - $\varphi(h_1) = \varphi(h_2) = e'$
  - $\varphi\left(h_2 \circ h_2^{-1}\right) = \varphi(e) = e' \Rightarrow \varphi\left(h_2^{-1}\right) = e'$
  - $\varphi\left(h_1 \circ h_2^{-1}\right) = \varphi(h_1) * \varphi\left(h_2^{-1}\right) = e' * e' = e'$
- $\ker \varphi \lhd G_1$ ($\forall a \in G_1 : a \circ h \circ a^{-1} = h' \in \ker \varphi$)
  - $\varphi\left(a \circ h \circ a^{-1}\right) = \varphi(a) * \varphi(h) * \varphi\left(a^{-1}\right) = \varphi(a) * \varphi\left(a^{-1}\right) = \varphi\left(a \circ a^{-1}\right) = \varphi(e) = e'$
- következmény: $G_2 \approx G_1 / N$
  - $\forall n \in \ker \varphi, a \in G_1 : \varphi(a \circ n) = \varphi(a) * \varphi(n) = \varphi(a) = \alpha$
  - példák:
    - térvektorok, síkvektorok
    - n szerinti mellékosztályok, C_n
- a definiáló relációk homomorfizmusként is felfoghatók
  - vegyük az 1 generátoros szabad csoportot (C_∞)
  - legyen a definiáló reláció: $a^5 = e$
  - ekkor: $C_\infty \xrightarrow{\varphi} C_5$

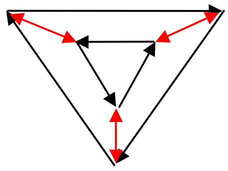
ha több definiáló reláció van, több normálosztó is van, ekkor:

- $N_1, N_2 \lhd G$
- $N_1 \cap N_2 = N_3 \lhd G$
- $A \otimes B = \left\{ ab \middle| a \in A, b \in B \right\}$, ahol $(A, \cdot)$ és $(B, \cdot)$ csoportot alkot (direkt szorzat)
- $N_1 \otimes N_2 = N_4 \lhd G$
- ha a csoportban a művelet kommutatív, akkor a direkt szorzást direkt összeadásnak hívjuk és $\oplus$-al jelöljük

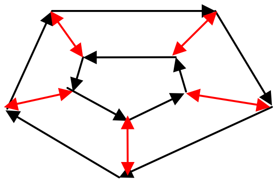
Minden véges csoport megadható n generátoros szabad csoporttal és k darab relációval, de ugyanazt a csoportot többféleképpen is meg lehet adni.

Csoportok ábrázolása gráfokkal:

- D_3:



- D_5:



- minden reláció egy független hurok a csoport gráfjában

A direkt szorzatról:

- $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$
- legyenek $(G_1, *)$ és $(G_2, \circ)$ csoportok, $a \in G_1$ és $\alpha \in G_2$, ekkor $(a, \alpha) \in G_1 \times G_2$
- legyen $(a, \alpha)(b, \beta) = (a * b, \alpha \circ \beta)$
- $(G_1 \times G_2, \cdot)$ csoportot alkot (pongyola jelölés $G_1 \otimes G_2$, hogy miért lehet azt lásd később) (pld.: lineáris terek direkt összeadása (direkt szorzásuk más, az a tenzorszorzás)):
  - zártság triviális, asszociativitás öröklődik
  - egységelem (e, ε)
  - inverz $(a, \alpha)^{-1} = (a^{-1}, \alpha^{-1})$
- $(e, \alpha)(a, \varepsilon) = (a, \varepsilon)(e, \alpha) = (a, \alpha)$
- ezért $N_1 = \{(e, \alpha) | \alpha \in G_2\} \triangleleft G_1 \times G_2$, $N_2 = \{(\varepsilon, a) | a \in G_1\} \triangleleft G_1 \times G_2$ és $N_1 \otimes N_2 = G_1 \times G_2$
- ekkor $G_1 \times G_2 / N_1 \approx N_2 \approx G_2$ (pongyola jelölés $G_1 \times G_2 / G_1 \approx G_2$)
- ugyanígy $G_1 \times G_2 / N_2 \approx N_1 \approx G_1$ (pongyola jelölés $G_1 \times G_2 / G_2 \approx G_1$)
- $\forall g \in G_1 \times G_2 \; \exists! n_1 \in N_1 \; \exists! n_2 \in N_2 : g = n_1 n_2 = n_2 n_1$
- megfordítás: ha $N_1 \triangleleft G$, $N_2 \triangleleft G$, $G / N_1 \approx N_2$, $G / N_2 \approx N_1$ és $\forall g_1 \in N_1 \; \forall g_2 \in N_2 : g_1 g_2 = g_2 g_1$, akkor $G = N_1 \otimes N_2$

Forgáscsoport ($O(3)$):

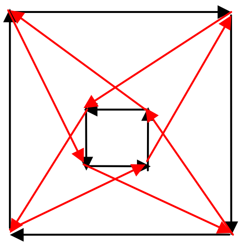
- $F \in O(3)$, $\tilde{F} = F^{-1}$, $\det F = \pm 1$
- kétkomponensű folytonos csoport: a +1 és -1 determinánsú komponensek között nincs folytonos átmenet ($C_2 \triangleleft O(3)$)
- valódi forgatások: $SO(3) \triangleleft O(3)$
- mivel $O(3)/SO(3) \approx C_2$ és $O(3)/C_2 \approx SO(3)$, valamint C_2 és $SO(3)$ elemei kommutálnak $O(3) = SO(3) \otimes C_2$

kvaterniócsoport:

- $\{1,-1,i,j,k,-i,-j,-k\}$, a definiáló relációkat felhasználva: $\{e,ii,i,j,ij.iii,jjj,ji\}$
- 2 generátoros csoport
- szorzástáblázat:

	e	i	ii	iii	j	jjj	ij	ji
e	e	i	ii	iii	j	jjj	ij	ji
i	i	ii	iii	e	ij	ji	jjj	j
ii	ii	iii	e	i	jjj	j	ji	ij
iii	iii	e	i	ii	ji	ij	j	jjj
j	j	ji	jjj	ij	ii	e	i	iii
jjj	jjj	ij	j	ji	e	ii	iii	i
ij	ij	j	ji	jjj	iii	i	ii	e
ji	ji	jjj	ij	j	i	iii	e	ii

- részcsoportok:
  - $\{e,ii\} \approx C_2$
  - $\{e,i,ii,iii\} \approx C_4$
  - $\{e,j,jj,jjj\} \approx C_4$
  - $\{e,ji,ii,ij\} \approx C_4$
- olyan nem kommutatív csoport, aminek részcsoportjai mind normálosztók
- ábra:



- példa egy másik konkrét csoportra: $\underline{E}$, a Pauli-mátrixok és inverzeik