Csoportelmélet jegyzet

2017. november 7.

Tartalomjegyzék

I. rész

Algebra

1. Matematikai modellek, algebrai struktúrák

1.1. Bevezetés

A fizikai folyamatokat, objektumokat matematikai modellel írhatjuk le. A matematikai modell (nem definiált) elemek, objektumok és a köztük értelmezett relációk összessége. E relációk ismert szabályai egyszerűsítve tükrözik a fizikai folyamatok megfigyelt törvényszerűségeit. Ilyen modellalkotás, hozzárendelés például:

- az elektromos térerősség **vektor**
- a munkavégzés vektorok **skaláris szorzata**
- a kvantummechanika-állapotok **Hilbert-teret** alkotnak
- a fényhullám elektromos és mágneses vektora **merőleges**

A félkövéren kiemelt fogalmaknak csak bizonyos axiomatizálható tulajdonságait használják fel a további tárgyalásban.

1.2. Reláció

a) Halmazok **Descartes-féle** (direkt) **szorzatának** elemei az egyes halmazokból vett elemekből képzett rendezett n-esek:

   $A \times B \times C \times \ldots \times N = \{(a, b, c, \ldots, n) | a \in A, b \in B, \ldots, n \in N\}$

b) Egy **relációt** a halmazok direkt szorzatának egy részhalmazával adunk meg. E részhalmaz $(a, b, c, \ldots, n)$ elemeire azt mondjuk, hogy teljesül rájuk az adott reláció. Pl.: "kisebb" reláció (V = a valós számok halmaza)

   $K = \{(a, \underline{b}) | a \in V, \underline{b} \in V; a < \underline{b}\}$

   Pl.: "abszolút értéke" reláció (E_3 a 3 dimenziós euklideszi tér)

   $ABS = \{(a, b) | a \in V, b \in E_3; a = |b|\}$

c) **Ekvivalencia-reláció** Olyan előírásrendszer, amely két matematikai objektumról megállapítja, hogy (az adott nézőpontból) azonosnak tekinthetők-e. Azaz egy

   $a \sim b : E = \{(a, b) | a \in A, b \in B; a \sim b\}$ reláció ekvivalencia-reláció, ha:

   I. reflexív: $a \sim a$
   II. szimmetrikus: $a \sim b \to b \sim a$
   III. tranzitív: $(a \sim b) \wedge (b \sim c) \to a \sim c$

Példák: egyenlőség, kongruencia, mod n, "azonos síkban lenni", stb. Minden C halmazon értelmezett E ekvivalencia-reláció páronként diszjunkt (közös elemet nem tartalmazó) osztályokra bontja C-t, és fordítva: minden (önkényes!) osztályokra bontás definiál egy ekvivalencia relációt: "azonos osztályban lenni".

d) **Művelet** Olyan reláció, amelyben az egyik halmazt kitüntetjük: "eredmények halmaza". Pl.: az "összeadás" műveletet az összege reláció definiálja: $O = \{(a,b,c) | a \in V, b \in V, c \in V; a+b=c\}$ Más fogalmazásban: a művelet az első (n-1) db halmaz direkt szorzatából az n-edik halmazba mutató leképzés.

$$O = \begin{cases} V \times V \to & \text{V} \\ (a,b) \mapsto & \text{c = a + b} \end{cases}$$

1.3. Absztrakt algebra

Az **absztrakt algebra** az algebrai struktúrákkal foglalkozik.
Az **algebrai struktúra** egy műveletekkel ellátott halmaz. Megadása:

- felépítő halmazok $(V \times V, \quad V)$
- a műveletek honnan-hova szabályai $(V \times V \to V)$
- axiomatikusan megkövetelt műveleti szabályok $(V \times E_3 \to E_3)$

Pl. tanulmányozható műveleti szabályok:

- kommutativitás léte vagy nemléte
- asszociativitás léte vagy nemléte
- kitüntetett elemek léte vagy nemléte
- invertálhatóság
- disztributivitás (legalább 2 művelet esetén)

Vizsgálni kell az axiómák ellentmondásmentességét is. Szokásos az egzisztenciával való bizonyítás: példát mutatunk a struktúrára: más, ismert matematikai objektumokra és műveletekre kimutatom a struktúratulajdonságok fennállását.

I. a halmaz elemeit azonosítom

II. a műveleteket definiálom

III. kimutatom az axiómák fennállását

Részstruktúra Egy A algebrai struktúrának B részstruktúrája, ha mint halmaz $B \subseteq A$, és ugyanazokra a műveletekre nézve A-val megegyező típusú struktúrát alkot. Példákat lásd az egyes konkrét struktúráknál.

1.4. Morfizmusok, reprezentációk

a) Legyen M algebrai struktúra $O(a, b, \ldots) = n \in M$ művelettel. Az M' matematikai objektum az M struktúra **homomorf** képe (és ezzel ugyanolyan típusú struktúra), ha M minden $a, b, \ldots$ eleméhez hozzárendelve M'-ben egy $a', b', \ldots$ elemet, M'-ben definiálható egy olyan $O'(a', b', \ldots) = n' \in M'$, hogy n' az n-hez rendelt eleme M'-nek. Azaz röviden: az $M \to M'$ leképezés művelettartó:

$$\begin{array}{lllll} M: & O(a, & b, & \ldots) = & n \in M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ M': & O'(a', & b', & \ldots) = & n' \in M' \end{array}$$

Ekkor az $M \to M'$ leképezés **homomorfizmus**. Ha M' (mint halmaz) $M' \subset M$, akkor **endomorfizmusról** beszélünk.

b) A kölcsönösen egyértelmű homomorf leképezéseket **izomorfiának** nevezzük. Egy struktúrának önmagára való leképezése **automorfia**. Pl.: a valós szám $\mapsto$ a szám törtrésze pl. 1,67 $\mapsto$ 0,67

$-3,2 \mapsto 0,8$ $\{$valós számok$\} \to \{0, 1\}$

leképezés a megfelelően definiált törtrész-összeadással és szorzással homomorfizmus. Pl. a tér tükrözései az origóra (művelet a folytatás) és az $\{1, -1\}$ halmaz (művelet a szorzás) **izomorfok**.

c) **Az izomorfizmus-elv** az algebra éltető nedve és alapötlete: az egymással izomorf matematikai objektumokat azonosnak tekintjük (kivéve ha egy nagyobb halmaz részhalmazai), és csak az izomorf leképezéssel szemben invariáns tulajdonságokat vizsgáljuk. Precízebben: algebrai struktúrák izomorfiája ekvivalencia-reláció (bizonyítsd be!). A közös, invariáns tulajdonságokat az ekvivalencia-osztály bármelyik elemén vizsgálhatom, ahogy kényelmesebb. Pl.: a Schrödinger-hullámmechanika és a Heisenberg-mátrixmechanika izomorfok: ugyanabba az ekvivalencia-osztályba (Dirac-kvantummechanika) tartoznak. Ki melyiket szereti jobban, abban számolhat. A mindkettőben értelmezhető végeredmények biztosan azonosak lesznek.

d) **Reprezentáció, ábrázolás** Egy M struktúra helyettesítését egy M' struktúrával, ha létezik egy $H : M \to M'$ homomorfizmus, **reprezentációnak** nevezzük. Ez akkor hasznos, ha M'-ben könnyebben tanulmányozhatjuk ugyanazokat a tulajdonságokat. Pl.: a "lineáris transzformáció" nevű absztrakt micsodát, jól ismert, valós számhalmazzal leírható mátrixszal helyettesíthetjük. Másik példa az analitikus geometria: a sík görbéit a $2^{V\times V}$-beli egyszerűbben kezelhető objektumokkal kezelhetjük. ($2^{V\times V}$={valós számpárok halmazai}) A reprezentáció **hű**, ha M különböző elemeinek M' különböző elemei felelnek meg. Szűkebb értelemben vett reprezentáció: az M struktúra elemeit bizonyos lineáris terek lineáris transzformációval ábrázoljuk. Ezek tovább reprezentálhatók mátrixokkal. A műveleteket pedig igyekszünk leképezni a közönséges mátrixműveletekre (szorzás, összeadás, skalárral való szorzás, stb.).

1.5. Konkrét struktúrák definíciója, egyszerű tulajdonságaik

A) **Félcsoport** S nem üres halmaz félcsoport, ha értelmezhető egy (szorzásnak nevezett) $S \times S \to S$ művelet, melyre:

1. $\forall a, b \in S \quad \exists c \in S, \quad c = ab$ zártság
2. $\forall a, b, c \in S \quad (ab)c = a(bc)$ asszociativitás

Például:

- valós számok szorzása
- valós számok összeadása
- f(x), g(x) korlátos függvények szorzata [a, b] intervallumon
- n dimenziós lineáris tér vetítései ($\in S$) az egymás után elvégzésére mint műveletre

B) **Csoport** G csoport, ha

1. $\forall a, b \in S \quad \exists c \in S, \quad c = ab$ (zártság)
2. $\forall a, b, c \in S \quad (ab)c = a(bc)$ (asszociativitás)
3. $\exists e \in G, \quad \forall a \in G, \quad ea = a$ (baloldali egységelem létezése)
4. $\forall a \in G \quad \exists b \in G \quad ba = e$ (bal inverz léte) (jelölés: $b = a^{-1}$)

Például:

- valós számok additív csoportja: $(V, +)$
- nemzérus racionális számok multiplikatív csoportja: $(Q \setminus \{0\}, \cdot)$
- szabályos háromszög 120^o-os elforgatásai (művelet: továbbforgatás) Ez izomorf az $\{1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\}$ multiplikatív csoportjával (bizonyítsd be)
- tetszőleges geometriai objektum hasonlósági transzformáció (művelet: a transzformációk egymás utáni elvégzése)

Egy csoport Abel-féle, ha a szorzás kommutatív. ($ab = ba$) Fontos a **permutációcsoport**: n elem permutációi az egymás utáni elvégzésre nézve csoportot alkotnak. Cayley tétele (bizonyítás később): minden véges csoport izomorf az azonos elemszámú (azonos rendű) permutációcsoport valamelyik részcsoportjával.

C) **Gyűrű:** Kétműveletes struktúra (szokás szerint összeadás és szorzás) Axiómák: R gyűrű, ha:

1. +-ra nézve Abel-csoport (egységeleme a gyűrű nulleleme)
2. ·-ra nézve félcsoport
3. érvényes a kétoldali disztributivitás $\forall a, b \in R$: $a(b+c) = ab + ac$ ill. $(a+b)c = ac + bc$ Pl. az egész számok gyűrűje $n \times n$-es mátrixok szorzásra és összeadásra

Ha egy gyűrűben $a \neq 0, b \neq 0$ de $ab = 0$ akkor a-t és b-t bal-, illetve jobboldali nullosztónak hívják. Pl.: a (mod n) kongruenciaosztályok összeadásra és szorzásra nézve (mod n) nézve gyűrűt alkotnak. Ha n nem prímszám, akkor az n osztóit tartalmazó osztályok a nullosztók.

D) **Test:** olyan gyűrű, amelyben a 0-tól különböző elemek a szorzásra nézve csoportot alkotnak. Testnek legalább 2 eleme van. Pl.: a racionális számtest, a komplex számtest, kvaterniók teste (nem kommutatív!). Ha a gyűrűaxiómákhoz hozzávesszük a 3 csoportaxiómát, egységelemes gyűrűt kapunk. A 4.-et hozzávéve test keletkezik.

E) **Lineáris tér:** L lineáris tér az R egységelemes gyűrű felett, ha értelmezve van a következő két művelet:

- a tér elemeinek összeadása $(+ : L \times L \to L)$
- az R-beli skalárokkal való szorzás $(\cdot : R \times L \to L)$

1. L+-ra nézve Abel-csoport (egységelem: Nullvektor)
2. a) $\forall \alpha \in R, \quad \forall a \in L \quad \alpha a \in L$ zártság
   b) $\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall a \in L \quad (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ "asszociativitás"
   c) $\forall \alpha \in L, \quad \forall a, b \in L \quad \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$ disztributivitás
   d) $\forall a \in L, \quad 1 \cdot a = a$

Pl.: szokásos vektorterek szám-n-esek tere $[a, b]$-n értelmezett függvények tere Megjegyzés: algebrailag értelmes végtelen sok elem

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

összege. Konkrét lineáris terek esetén általában konvergenciaproblémák lépnek fel. Lineáris terek esetén szokásosan értelmezhető a dimenzió fogalma (lineárisan független elemek max. száma)

F) Speciális eset: **Hilbert-tér**

1. 2. H lineáris tér a C komplex számtest fölött
   3. értelmezve van még egy művelet: skalárszorzat: $H \times H \rightarrow C$
      a) $\langle a \mid a \rangle$ pozitív definit, csak $\mid a \rangle = \mid 0 \rangle$ -ra $\langle 0 \mid 0 \rangle = 0 \in C$
      b) $\langle a \mid b \rangle = \langle b \mid a \rangle^*$ a skalárszorzat hermitikus
      c) $\langle a \mid \alpha b + \beta c \rangle = \alpha \langle a \mid b \rangle + \beta \langle a \mid c \rangle$ a második tagban lineáris (fizikus konvenció) $\rightarrow$ következmény: az első tagban antilineáris

Véges dimenziós Hilbert-tereket euklideszi-térnek szokás nevezni.

G) **Algebra** Olyan lineáris tér (az R egységelemes gyűrű felett), amelyben bevezetünk még egy $A \times A \rightarrow A$ "szorzást" az elemek között. E szorzás definiáló axiómái szerint különböző algebratípusokat különböztetünk meg. A legfontosabb:

a) **Asszociatív algebra** (hiperkomplex rendszer) Az $a \cdot b$ algebrai szorzás asszociatív, tehát rá nézve A félcsoport. Így erre a szorzásra és az összeadásra A gyűrű. Teljesülnie kell:

$$\forall \alpha \in R, \forall a, b \in A \qquad \alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

(Ha A ($A \backslash \{0\}$) szorzásra nézve csoportot alkot, azaz testet is, akkor A **divízióalgebra**

b) **Lie-algebra** A szorzás nem asszociatív, hanem:

   1. $\forall \in a \qquad aa = 0$
   2. $\forall a, b, c \in A \qquad (ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ (Jacobi-azonosság)

   Ezekből következik az antikommutativitás: $ab = -ba$

c) **Jordan-algebra**

   1. $\forall a, b \in A \qquad ab = ba$
   2. $\forall a, b \in A \qquad (a^2 b)a = a^2(ba)$

   Jelentőségük: tetszőleges asszociatív algebrából nyerhető Lie- és Jordan-algebra, a szorzás megfelelő újradefiniálásával. Lie: $a \times b = ab - ba = [a, b]$ Jordan: $a \cdot b = ab + ba = \{a, b\}$ A kommutátorokkal, illetve antikommutátorokkal definiált "szorzásnak" nagy szerepe van a kvantumtérelméletben.

Tétel: tetszőleges Lie-algebrához van olyan asszociatív algebra, hogy az abból kommutátorral képzett Lie-algebra egy részalgebrája izomorf az eredeti Lie-algebrával. Ha egy algebra mint vektortér véges dimenziójú, akkor ebben (véges elemszámú) bázist megadva, a szorzás definíciójához elég megadni a báziselemek összes szorzatát. A többi elem szorzata az axiómák segítségével kiszámolható:

$A \ni x = \sum_i a_i u_i$
$A \ni y = \sum_i b_i u_i \qquad u_i$ a bázis
$u_i u_k = V_{ik} = \sum_k \lambda_l^{ik} u_l \qquad$ (a báziselemek szorzata)
$xy = (\sum_i a_i u_i)(\sum_k b_k u_k) = \sum_{ikl}(a_i b_k \lambda_l^{ik}) u_l = \sum_l c_l u_l = z$

A λ_l^{ik}-ek az algebra karakterisztikus együtthatói (vagy struktúraállandói). Példák algebrára: Asszociatív algebra:

- az $n \times n$-es mátrixok gyűrűje, kiegészítve a skalárral való szorzással, mátrixalgebrát alkot (a valós vagy komplex számtest felett)
- a valós számok teste feletti C algebra, mint vektortér 2 dimenziós, bázisai: e, a. A szorzás definíciója:

  $$e \cdot e = e \qquad e \cdot a = a \cdot e = a \qquad aa = -e$$

  Ez a komplex számtesttel, mint algebrával izomorf divizióalgebra.
- a nem szinguláris mátrixok divizióalgebrát alkotnak
- csoportalgebra Legyen G tetszőleges (véges) csoport. A G csoportalgebrája, ha A mint lineáris tér bázisát a $g \in G$ csoportelemek alkotják, és az algebrai szorzást, mint a báziselemek csoportbeli szorzását definiáljuk. (eredmény: a bázis egy másik eleme)
- a $p = \sum a_n x^n$ alakú elemek polinomgyűrűje ∞ dimenziós asszociatív algebra: bázisa: $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ Szorzás: $x^k \cdot x^n = x^{k+n}$ Jordan-algebra:
- tetszőleges operátorok antikommutátora Lie-algebra:
- tetszőleges mátrixalgebra a kommutátorral, mint szorzással
- a 3 dimenziós tér közönséges vektoriális szorzása (Bizonyítsd be!)
- a kvaterniók asszociatív algebrájából kommutátorral definiált Lie-algebra (kvaterniók: a valós számok teste fölötti asszociatív algebra: 4 dimenziós bázisa:

  $$e^2 = e, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -e$$

  $$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

  Egy kvaternió alakja: $x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k (x_0, x_1, x_2, x_3$ valós) Ha a Lie szorzatot a fél kommutátorral definiáljuk:

  $$a \times b = \frac{1}{2}(ab - ba) = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)i + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)j + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)k$$

A K kvaternió Lie-algebrának rész-Lie-algebrája az a V Lie-algebra, amely a kvaterniók $\alpha_0 = 0$ tulajdonságú részhalmazból kiindulva végzi el azt a konstrukciót. Ekkor i, j, k elemek által generált 3 dimenziós térben a közönséges vektorszorzással izomorf műveletet vezetünk be.

1.6. Struktúrák direkt szorzata, direkt összege

Induljunk ki a halmazok direkt szorzatából $A = \{a_i\}$ $B = \{b_i\}$ $A \times B = \{a_i b_k\}$ Ha A és B azonos típusú egyműveletes struktúrák, akkor bevezethetünk a direktszorzat-halmazba egy műveletet, amelyre nézve ez a halmaz is ugyanilyen struktúra lesz: $A = \big(\{a_i\},\ \ O(a_1,\ldots,a_n)\big)$ $0(a_1,\ldots,a_n) = a \in A$ $B = \big(\{b_i\},\ \ P(b_1,\ldots,b_n)\big)$ $P(b_1,\ldots,b_n) = b \in B$ $A \times B = \big(\{a_i b_k\},\ \ Q(a_i b_k,\ldots)\big)$ megfelel, ha $Q\big(((a_1 b_1),(a_2 b_2),\ldots,(a_n b_n)\big) = (a,b) = \big(O(a_1,\ldots,a_n),\ \ P(b_1,\ldots,b_n)\big)$ Ekkor $A \times B$-t a struktúrák direkt szorzatának nevezzük. Több művelet esetén bonyolultabb a helyzet, az egyes konkrét struktúráknál definiáljuk a direkt szorzatot. Egyműveletes:

1.6.1. Csoportok direkt szorzata

$a_1, b_1, \ldots \in G_1$

$a_2, b_2, \ldots \in G_2$ $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$

A szorzás definíciója: $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$ Egységelem (e_1, e_2) inverz (a_1^{-1}, a_2^{-1}) Ha a két csoportnak nincs közös eleme, akkor a direkt szorzatot elempár helyett külső szorzat alakjában írhatjuk.

$(a_1, a_2) \to a_1 a_2$

Ekkor a két egységelemet azonosnak tekintjük, és az új diszkrétszorzatcsoporton új szorzásműveletet vezetünk be: ha mindkét elem ugyanabból az eredeti csoportból való (amely az új csoport részcsoportja lesz) akkor az eredeti szorzás marad érvényben, míg ha különböző eredeti csoportokból valók, akkor a szimbolikusan bevezetett $a_1 a_2$ külső szorzat alakjában írjuk fel az eredményt. Ki kell kötni, hogy az egyik összeszorzandó csoport elemei a másik összes elemével felcserélhetők. A direkt szorzat csoport elemszáma az eredeti elemszámok szorzata.

1.6.2. Lineáris terek direkt szorzata

Ugyanazon R gyűrű feletti terekről lesz szó.

$L_1 = \{a_1, b_1, \ldots\}$

$L_2 = \{a_2, b_2, \ldots\}$

$L_1 \otimes L_2 = \{a_1 a_2, \ldots\}$

Ez szintén lineáris tér lesz, ha kikötjük a disztributivitások:

$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1 a_2 + b_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 b_2$ valamint $(\alpha a_1) a_2 = a_1 (\alpha a_2) = \alpha(a_1 a_2)$ teljesülését. E tér dimenziója a dimenziók szorzata. Az $(e_1, \ldots, e_n) \in L_1$ és $(f_1, \ldots, f_n) \in L_2$ bázisok esetén a szorzattér bázisa:

$(e_1 f_1, e_1 f_2, \ldots, e_n f_m) \subset L_1 \otimes L_2$

Pl. két 3 dimenziós vektor tér diadikus szorzata 9 dimenziós vektortér.

Direkt összeg: Két lineáris tér békés egymás mellé építését jelenti, a még hátralévő műveletek természetesen adódó definiálásának.

1.6.3. Lineáris terek direkt összege (közös R gyűrű felett)

$L_1 \ni a_1, \quad L_2 \ni a_2 \quad ; L_1 \otimes L_2 = \{(a_1, a_2)\}$ szintén vektortér, ha $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ $\alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2)$ Az összegtér dimenziója a dimenziók összege. Ha a két térnek nincs közös eleme, a nullelemet közösnek tekinthetjük és $a_1 + a_2$ alakban írhatjuk az összegtér elemeit. $L_1 \otimes L_2$-nek L_1 és L_2 is altere. **Tétel:** Minden 1-nél nagyobb dimenziójú lineáris tér diszjunkt egydimenziós alterek összegére bomlik (egy-egy bázisvektor által direkt generált egydimenziós alterek).

1.6.4. Gyűrűk direkt összege

$R_1 \otimes R_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in R_1, a_2 \in R_2\}$ is gyűrű, ha $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$ Diszjunkt gyűrűknél írhatjuk $a_1 + a_2$ alakban is az elemeket. A szorzást lehet úgy "összefolyatni", hogy azonos gyűrűből származó elemek szorzata az eredeti szorzat, a különböző gyűrűkből származó elemek szorzata a közös nullelem. Ekkor $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 = (a_1 b_1, a_2 b_2)$ Ahol: $R_1 \ni (a_1, b_1, a_1 b_1)$ $\quad R_2 \ni (a_2, b_2, a_2 b_2)$ $\quad a_1 b_2$ és $a_2 b_1 = 0$

1.6.5. Asszociatív algebrák direkt összege

Az algebra gyűrű is és lineáris tér is, így a direkt összeg képzésénél ugyanazokat a szabályokat kell kikötni: $A_1 \otimes A_2 = \{(a_1, a_2)\}$ $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$ $\alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2)$

Pl. mátrixalgebrák esetén: Legyen A 3×3-as mátrixok algebrája B 2×2-es mátrixok algebrája Direkt összeg algebrájuk eleme:

$$\mathbf{\Pi} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Belátható, hogy az ilyen mátrixok összeadása, szorzása és skalárral való szorzása esetén is ilyen alakúakba mennek át.

1.7. Mátrixreprezentációk

A legtöbb eddig tárgyalt algebrai struktúrát lehet megfelelő típusú mátrixokkal reprezentálni. Az $n \times n$-es mátrixok a közönséges mátrixműveletekre nézve asszociatív algebrát alkotnak. Ha az ábrázolni kívánt struktúra az asszociatív algebra definiáló struktúrái között megtalálható (pl. csoport), akkor már csak a megfelelő n-et és a megfelelő homomorfizmust kell megkeresni. Ha további kikötések is vannak (pl. test ábrázolásnál), akkor az $n \times n$-es mátrixok megfelelő részhalmazán kell ábrázolni (pl. a nem szinguláris mátrixokon: $detA \neq 0$). Ha viszont az ábrázolandó struktúra axiómái ellentmondanak a mátrixalgebrának, akkor okos kompromisszumként olyan műveleteket lehet definiálni, amelyek mátrixműveletekkel kifejezhető, és kielégítik a szükséges axiómákat (pl. a Lie-algebra szorzásának kommutátoros definíciója). Ha az ábrázolandó struktúra olyan távol áll a mátrixokétól (pl. topologikus tér), hogy ez sem megy, akkor kisnyúl. Ábrázoló homomorfizmus természetesen nem csak egyféleképpen választható adott struktúrához. Pl. különböző dimenziójú terekre ható transzformációkat leíró mátrixokat választhatunk. Azonos dimenzió esetén előfordulnak ekvivalens és nemekvivalens ábrázolások. A struktúra szerkezete meghatározza a lehetséges ábrázolások számát, dimenzióját, egyéb lényeges tulajdonságait. Erre a csoportok és algebrák ábrázolásánál számos példát fogunk mutatni.

II. rész

Véges csoportok

2. A csoportelmélet alapfogalmai

2.1. A csoport definíciója

Bizonyos elemek G halmazát csoportnak nevezzük, ha elemei között értelmezve van egy művelet (nevezzük szorzásnak), és fennállnak a következő tulajdonságok:

1. **Zártság:**
   ha $a \in G, b \in G$, akkor $ab \in G$
   (A csoportműveletet a szorzás, tehát az elemek egymás mellé írása jelenti.)

2. **Asszociativitás:**
   ha $a, b, c \in G$, akkor $a(bc) = (ab)c$

3. **Egységelem létezése:**
   a csoportnak létezik egy és csak egy e egységeleme, melyre:
   $$ae = ea = a, \qquad \forall a \in G$$

4. **Inverzelem létezése:**
   a csoport minden elemének van egy és csak egy inverz eleme:
   $$aa^{-1} = a^{-1}a = e, \qquad \forall a \in G$$

Ha $ab = ba$ $\forall a, b \in G$ esetén, akkor a csoport kommutatív.

2.2. A csoport rendje

A G csoportot végesnek vagy végtelennek mondjuk aszerint, hogy elemeinek száma véges vagy végtelen. A csoport elemeinek száma a G csoport rendje (jele általában $\mid G \mid$).

2.3. Komplexusok, komplexusszorzás

A G csoport részhalmazait komplexusoknak nevezzük. Két komplexus egyenlő, ha ugyanazon elemekből áll. A K_1 és K_2 komplexus szorzatát úgy értelmezzük, mint az ab alakú elemek halmazát, ahol is $a \in K_1, b \in K_2$. Az így kapott halmaz a K_1K_2 komplexus. Ha K_1 vagy K_2 üres, akkor a K_1K_2 szorzat is az. Az elemek szorzásának asszociativitásából következik, hogy a komplexusszorzás is asszociatív:
$$K_1(K_2K_3) = (K_1K_2)K_3$$
Ezek szerint a komplexusok félcsoportot alkotnak a komplexusszorzásra nézve (félcsoport egy halmaz akkor ha a szorzásra (általában műveletre) nézve zárt és asszociatív).

2.4. A részcsoport definíciója

A G csoport egy H komplexusát részcsoportnak (alcsoportnak) nevezzük, ha H elemei a G-beli műveletekre nézve maguk is csoportot alkotnak.

2.5. Mellékosztályok

Legyen H a G részcsoportja és $a \in G$. Az aH komplexust a G csoport H részcsoport szerinti baloldali mellékosztályának nevezzük. A Ha jobboldali mellékosztály. Ha $b \in H$, akkor $bH = H$. Általában, ha $x \in aH$, akkor $xH = aH$, hiszen $x = ah$ $(h \in H)$-ból $xH = ahH = aH$. Mellékosztály tehát tetszőleges elemével reprezentálható (a az xH mellékosztály reprezentánsa, ha $a \in xH$).
Tétel: Ha aH és bH G-nek két H szerinti mellékosztálya, akkor vagy $aH = bH$ vagy aH és bH diszjunktak.
Bizonyítás: Elég belátni, hogy ha $aH \cap bH$ nem üres halmaz, akkor $aH = bH$. Ha $x \in aH$ és $x \in bH$, akkor a fentiek szerint $xH = aH$ és $xH = bH$, azaz $aH = bH$.
Q.E.D.
A tételből következően, ha tekintjük G-nek a H szerinti $H_1, aH_1, bH_1, \dots$ baloldali mellékosztályait akkor G minden eleme ezeknek egyikébe és csak egyikébe tartozik, s ezt így jelölhetjük:

$$G = H + aH + bH + \dots$$

A felbontásban szereplő mellékosztályok számát nevezzük H indexének. Mindez igaz jobboldali mellékosztályokra is, és belátható, hogy a jobb- és baloldali mellékosztályok száma azonos.

Lagrange tétele: Véges csoportok részcsoportjának rendje és indexe osztója a csoport rendjének.
Bizonyítás: Ha G véges csoport és H ennek részcsoportja, akkor G-nek baloldali (H szerinti) felbontásában csak véges sok mellékosztály szerepel: $G = H + aH + \dots + gH$. Mindegyik mellékosztályban annyi elem van, mint H rendje, így

$$\mid G \mid = \mid G/H \mid \cdot \mid H \mid$$

ahol $\mid G/H \mid$ a H indexe.
Q.E.D.

2.6. Normálosztó, normalizátor

A G csoport N részcsoportját normális vagy invariáns részcsoportnak vagy normálosztónak nevezzük, ha

$$aN = Na, \qquad \forall a \in G$$

Jelölése $N \triangleleft G$
Legyen A a G csoport tetszőleges nem üres részhalmaza. A normalizátornak

nevezzük (jele $N(A)$) a G csoport azon elemeinek h halmazát, melyekre:

$$hA = Ah$$

2.7. Konjugált osztályok

Legyen $a \in G$ rögzített, G-nek önmagára való

$$x \to axa^{-1}$$

leképezését a-val való konjugálásnak nevezzük.
A gag^{-1} alakú elemek halmazát az a elem konjugált osztályának nevezzük, itt g befutja a csoport valamennyi elemét.
Tétel: Ha b eleme a konjugált osztályának, akkor a is eleme b konjugált osztályának.
Bizonyítás: Ha b az a elem konjugált osztályában van, akkor valamely c elemmel előállítható:

$$cac^{-1} = b$$

Balról c^{-1}-gyel, jobbról c-vel szorozva:

$$a = c^{-1}bc = (c^{-1})b(c^{-1})^{-1}$$

ami épp azt jelenti, hogy a, b konjugált osztályába tartozik.
Tétel: Ha b nem eleme a konjugált osztálynak, akkor a konjugált osztálynak és b konjugált osztálynak nincs közös eleme.
Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy c mindkét osztálynak eleme, azaz $c = dad^{-1} = fbf^{-1}$, a csoport alkalmas d illetve f elemére. Ebből következően:

$$b = f^{-1}dad^{-1}f = (f^{-1}d)a(fd^{-1})^{-1}$$

azaz b eleme a konjugált osztályának, ez viszont ellentmondás.
Q.E.D.

Tétel: Minden elem eleme a saját konjugált osztályának.
Bizonyítás: Ha g éppen az egységelem, akkor $g_e a g_e^{-1} = a$
Q.E.D.
E tételek következménye az, hogy egy csoport elemeit közös elemmel nem rendelkező (diszjunkt) osztályokba lehet sorolni. Az egységelem maga egy osztály. Kommutatív csoport (ún. Abel-csoport) minden eleme egy külön osztály.

2.8. Faktorcsoport

Tétel: Egy G csoportnak valamely N normális részcsoportja szerinti mellékosztályai a komplexusszorzásra nézve csoportot alkotnak. Ennek neve: G-nek N szerinti faktorcsoportja, jele: G/N.
Bizonyítás: A csoportaxiómák teljesülését kell bizonyítani:

1. **Zártság:**

$$(aN)(bN) = a(Nb)N = a(bN)N = abN^2 = (ab)N$$

2. **Asszociativitás:**

$$aN(bNcN) = aN(bcN) = [a(bc)]N = [(ab)c]N = (abN)(cN) = (aNbN)(cN)$$

3. **Neutrális elem:**

$$eN = N$$

ugyanis:

$$(eN)(aN) = e(Na)N = e(aN)N = eaN^2 = aN$$

4. **Inverz elem:** aN inverze $a^{-1}N$, ugyanis:

$$(a^{-1}N)(aN) = (a^{-1}a)N = eN = N$$

Q.E.D.

2.9. A szimmetrikus csoport

Egy n elemű halmaznak önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését a csoportelméletben permutációnak nevezzük (ez tehát nem azonos a kombinatorika permutáció-fogalmával). A permutációk szorzása mint leképezésének szorzása definiálható. A permutációk jelölése:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

ahol $i_1, \dots, i_n$ az $1, \dots, n$ számok valamilyen sorrendjét jelöli. Π jelentése tehát: $1 \to i_1, 2 \to i_2, \dots, n \to i_n$. Π-vel azonos a

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ i_{k_1} & i_{k_2} & \dots & i_{k_n} \end{pmatrix}$$

permutáció, ha $k_1, \dots, k_n$ az $1, \dots, n$ tetszőleges sorrendje. Két permutáció szorzata (előbb a bal-, utána a jobboldali hajtandó végre).

$$\mathbf{\Pi}_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_{i_1} & j_{i_2} & \dots & j_{i_n} \end{pmatrix}$$

Ez a szorzás - mint a leképezések szorzata - asszociatív, de általában nem kommutatív. Az identikus permutáció:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

a szorzásra neutrális elem: $\varepsilon\Pi = \Pi, \quad \forall\Pi$ esetén. Az inverz:

$$ha \quad \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \ akkor \ \mathbf{\Pi^{-1}} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\Pi\Pi^{-1} = \Pi^{-1}\Pi = \varepsilon$$

Ezek alapján fennáll a következő tétel: n elemű halmaz önmagára való leképezései csoportot alkotnak. Ez az n-edfoku szimmetrikus csoport, jele: S_n, rendje $n!$.

A permutációk ciklikusan is írhatók a következőképpen: az $(i_1, \dots, i_k)$ ciklus azt a τ permutációt jelenti, melyre $\tau : i_1 \to i_2,\ i_2 \to i_3,\ \dots,\ i_k \to i_1$ és az $i_1, i_2, \dots i_k$ között nem szereplő elemek fixen maradnak. Az (i_k) ciklus neve transzpozíció, azaz i és k elemet felcseréli, a többit változatlanul hagyja.

Minden permutáció felírható ciklusok szorzataként, ahol is egy ciklusban az egymás között transzformálódó elemek szerepelnek, a ciklusok tehát diszjunktak. A permutációk diszjunkt szorzataként való felírása egyértelmű. Minden permutáció felírható transzpozíciók szorzataként is, de ez a felírás már nem egyértelmű. A továbbiak szempontjából lényeges, hogy a ciklusszerkezet alapján a szimmetrikus csoport elemei diszjunkt osztályokba sorolhatók. Egy osztályba az azonos ciklusszerkezetet mutató permutációk kerülnek.

Példa

A 3-adfoku szimmetrikus csoport, azaz az $\{1, 2, 3\}$ halmaz önmagára való leképezései. A leképezések, tehát a csoport elemek száma $3! = 6$. Részletesen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23)(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

A 6 elem a ciklusszerkezet alapján jól láthatóan 3 diszjunkt osztályba sorolható (minden sor egy külön osztályt jelent).

3. A véges csoportok ábrázolásairól

3.1. Alapfogalmak

A **G csoport ábrázolásán** értünk egy olyan $D(g)$ leképezést a G csoportról a V lineáris téren értelmezett lineáris transzformációk körébe, amely teljesíti a következő összefüggést: $D(gh) = D(g) \cdot D(h) \quad \forall g, h \in G$
A $D(g)$ **ábrázolásra invariáns altérnek** nevezzük azt a V_1 lineáris alteret V-ben, melynek $\forall x \quad \in \quad V_1$ elemére igaz, hogy

$$D(g)x \in V_1 \ \ \forall g \in G - re$$

Triviális invariáns alterek V-ben a $\{0\}$ nullelemből álló altér és az egész V tér. A $D(g)$ ábrázolás reducibilis, ha létezik V-ben a $D(g)$ ábrázolásra nézve nem triviális invariáns altér. Ellenkező esetben $D(g)$ **irreducibilis**.
Legyen adott egy V_1 lineáris téren a G csoport $D_1(g)$ és egy V_2 lineáris téren a G csoport $D_2(g)$ ábrázolása. A **két ábrázolást ekvivalensnek** mondjuk, ha létezik egy A invertálható lineáris leképezés V_1-ről V_2-re úgy, hogy

$$D_2(g) = AD_1(g)A^{-1} \qquad \forall g \in G - re$$

A véges csoportok ábrázoláselméletének fontos feladata - többek közt -, hogy:

1. feltérképezze egy meghatározott - illetve, ha lehetséges, az összes elképzelhető - véges csoport ábrázolásának szerkezetét.

2. összefüggéseket találjon a csoportok és ábrázolások szerkezete között. A jelen fejezetben ezekkel a problémákkal fogunk részletesebben foglalkozni. Először a véges csoportok véges dimenziós reprezentációira vonatkozó, legfontosabb, általános érvényű tételeket vesszük szemügyre, majd az összes lehetséges (véges) csoport-struktúrát reprezentáló permutációcsoport ábrázolásaival fogunk foglalkozni.

3.2. Irreducibilis felbonthatóság

Mindenekelőtt felmerülhet a kérdés: vajon egy N db elemet tartalmazó G csoport tetszőleges véges dimenziós ábrázolása nem építhető-e fel irreducibilis ábrázolásokból. Ha igen - a reducibilis ábrázolások tulajdonságai az irreducibilisekéiből már következnek és így elég ezen utóbbiakat vizsgálni.
Tekintsünk egy V n dimenziós lineáris teret. Legyen az n_1 dimenziós V_1 és az n_2 dimenziós V_2 V-beli lineáris altér. Azt mondjuk, hogy V előáll V_1 **és** V_2 **direkt összegeként**

$$V = V_1 \oplus V_2 \tag{1}$$

ha $\forall x \in V$ egyértelműen előállítható

$$x = x_1 + x_2 \qquad x_1 \in V_1, \ \ x_2 \in V_2 \tag{2}$$

alakban. Az egyértelműség alatt azt értjük, hogy

$$x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \qquad x_1, y_1 \in V_1, \ \ x_2, y_2 \in V_2 \tag{3}$$

-ből következik, hogy

$$x_1 = y_1 \qquad \acute{e}s \qquad x_2 = y_2 \tag{4}$$

Ha V-re fennáll (1) akkor V_1 és V_2 közös eleme csak a null-elem lehet. Az egyértelmű (2) felbontásból továbbá következik az is, hogy

ha V_1-en bázis az $\{e_1\}_{i=1}^{n_1}$ rendszer és V_2-n bázis az $\{e_i\}_{i=n_1+1}^{n}$ rendszer, akkor a V-n bázis az $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ vektorrendszer. (5)

Ezek után tekintsünk egy $D(g)$ $g \in G$ reducibilis ábrázolást a V téren. Tegyük fel, hogy feltérképeztük az összes V_i/n_i dimenziós irreducibilis alteret V-ben. Két eset lehetséges: vagy ki tudunk választani az alterek közül k db-t úgy, hogy

$$V = \sum_{i=1}^{k} e V_i \tag{6}$$

teljesüljön vagy nem. Ha (6) teljesül, akkor $D(g)$-t sikerült.
Segítségével egy $D^{(1)}(g)$ irreducibilis reprezentáció definiálható.

$$D^i(g) x_i = D(g) x_i \qquad x_i \in V_i \tag{7}$$

Ezek segítségével a $D(g)$ operáció a következőképp hat egy $x \in V$ elemre:

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i \qquad x_i \in V_i \ \text{ egyértelműen } \ D(g)x = \sum_{i=1}^{k} D^i(g) x_i \tag{8}$$

Ezt szimbolikusan úgy is jelölhetjük, hogy:

$$D(g)x = \sum_{i=1}^{k} e D^i(g) \cdot x \qquad D(g) = \sum_{i=1}^{k} e D^i(g) \tag{9}$$

Nézzük meg milyen $D(g)$ mátrix alakja, ha V bázisát a V_i direkt alterek bázisából tesszük össze:

$$\underbrace{e_1 \dots e_{N_1}}_{V_1 \text{ bázisa}} \underbrace{e_{N_1+1} \dots e_{N_2}}_{V_2 \text{ bázisa}} \dots\dots \underbrace{e_{N_{k-1}} \dots e_{N_k}}_{V_k \text{ bázisa}} \text{itt } \ N_i = \sum_{s=1}^{i} n_s \qquad i = 1 \dots k \tag{10}$$

A $D_{rS}(g)$ mátrixelemei definíció szerin:

$$D(g)e_s = \sum_{r=1}^{N_k} e_r D_{rs}(g) \tag{11}$$

Mivel azonban V_i $D(g)$-re invariáns, ezért, ha $e_s \in V_i$ akkor $D(g)e_s \in V_i$ szintén, így (11) jobb oldalán csak $e_i \in V_i$ báziselemek szerepelhetnek:

$$N_{i-1} < s \le N_i$$

$$\begin{aligned} D_{rs} \quad = \quad 0 \quad & 1 < x \le N_{i-1} \quad i = 1 \dots k \\ & N_i < x \le N_k \end{aligned} \tag{12}$$

(7) szerint ugyanakkor:

$$D(g) = D^i(g) \quad ha \quad N_i < r_i s \le N_k \tag{13}$$

Tehát a (10) bázisban

$$\mathbf{D(g)} = \begin{pmatrix} D^1(g) & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & D^2(g) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D^k(g) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} eD^i(g) \tag{14}$$

Itt a $D^i(g)$-k már irreducibilis reprezentációk. A (14) alakú felbontást a (6) feltevéssel vezettük le. Vajon milyen tulajdonsággal kell rendelkeznie egy $D(g)$-nek ahhoz, hogy (6) kielégüljön? Állítjuk, hogy annak elégséges feltétele, hogy egy reducibilis $D(g)$ irreducibilis ábrázolások direkt összegére felbontható legyen, az, hogy

$$D^+(g) = D^{-1}(g) \quad \forall g \in G \quad (D(g) \text{ unitér}) \tag{15}$$

Legyen V_1 invariáns (nem triviális) altér $D(g)$-re V-ben. Legyen továbbá $V_2 V_1$ ortogonális kiegészítő altere. Ekkor

$$V = V_1 \oplus V_2$$

és (15) miatt V_2 is invariáns altér lesz V-ben:

$$\begin{aligned} x \in V_1,\ y \in V_2 \to \langle x|y\rangle = 0 \\ \langle D(g)x|D(g)y\rangle = \langle x|y\rangle = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Ha V_1 és V_2 irreducibilisek - további invariáns altereket V-ben nem találunk, ha pedig V_1 és V_2 közül bármelyik is reducibilis, azt újabb invariáns, ortogonális alterek direkt összegére bonthatjuk a fenti eljárás segítségével. Mivel V tér

dimenziója véges - ez a processzus egyszer véget ér és így irreducibilis alterek direkt összegeként állítottuk elő V-t.
A (15) tulajdonságú unitér ábrázolását tehát sikerült irreducibilis ábrázolásokra visszavezetni. Vajon igaz-e az, hogy G bármely ábrázolása ekvivalens egy unitér ábrázolással és így irreducibilis ábrázolások direkt összegeként áll elő? A válasz: igen. Ennek bizonyítása a következő: Definiáljunk egy N elemű G csoportot $D(g)$ ábrázolása segítségével egy új skalárszorzatot:

$$(x;y) = \frac{1}{N}\sum_{g\in G}\langle D(g)x|D(g)y\rangle \tag{17}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban teljesíti a skalárszorzatra kirótt összes követelményt. Az (;) skaláris szorzatban $D(h)^{+} = D(h)^{-1}$ $\forall h \in G$-re, mert:

$$(D(h)x;D(h)y) = \frac{1}{N}\sum_{g\in G}\langle D(hg)x|D(hg)y\rangle$$

Ha g végig fut G összes elemén, akkor nyilván (hg) is végigfut G-n-

$$(D(h)x;D(h)y) = (x;y) \tag{18}$$

Legyen az $\langle x|y\rangle$ skaláris szorzata ortonormált bázis $e_1 \dots e_n$ $\langle e_i|e_k\rangle = \delta_{ik}$ és az $(x;y)$ skaláris szorzata ortonormált bázis $f_1 \dots f_n$ $(f_i;f_k) = \delta_{ik}$.

Az $\{e_i\}$ és $\{f_i\}$ bázisrendszereket egy nem elfajuló lineáris transzformáció köti össze:

$$f_i = Ce_i$$

Legyen x, y 2 tetszőleges vektor:

$$x = x_i e_i \qquad Cx = x_i Ce_i = x_i f_i$$

$$y = y_i e_i \qquad Cy = y_i Ce_i = y_i f_i$$

ezek skalárszorzatai:

$$\langle x|y\rangle = \sum_{ik} x_i^* y_k \qquad \langle e_i|e_k\rangle = \sum_i x_i^* y_i$$

$$(Cx;Cy) = \sum_{ik} x_i^* y_k \qquad (f_i;f_k) = \sum_i x_i^* y_i$$

Tehát:

$$\langle x|y\rangle = (Cx;Cy)$$
$$\langle C^{-1}x|C^{-1}y\rangle = (x;y) \tag{19}$$

Definiáljuk a $D(g)$-vel ekvivalens $D'(g)$-t a C segítségével:

$$D'(g) = C^{-1}D(g)C$$

A $D'(g)$ már unitér lesz $\forall g \in G$-re a $\langle \mid \rangle$ skal. szorzattal

$$\langle D'(g)x|D'(g)y\rangle = \langle C^{-1}D(g)Cx|C^{-1}D(g)Cy =$$

felhasználva (19) második sorát

$$= \langle D(g)Cx|D(g)Cy\rangle$$

Majd (18) és végül (19) első sora segítségével

$$= (Cx; Cy) = \langle x|y\rangle$$

A G csoport tetszőleges véges dimenziós ábrázolása tehát irreducibilis komponensekre bontható. A későbbiekben látni fogjuk, hogy létezik olyan reducibilis ábrázolása G-nek, amely tartalmazza G összes inekvivalens, irreducibilis ábrázolását. Annak érdekében, hogy ezt bebizonyíthassuk közelebbről meg kell vizsgálnunk az ábrázolási mátrixok konkrét tulajdonságait és olyan mennyiségeket kell bevezetnünk, amelyek "valahogy" jellemezhetik a reducibilis ábrázolások irreducibilis komponensekre való felbomlását.

3.3. A Schur lemma és az ortogonalitási összefüggések

Nézzük meg, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkezik egy olyan lineáris operátor, mely felcserélhető G egy irreducibilis ábrázolásával.

3.3.1. I. Lemma

Ha a V téren ható A lineáris transzformáció felcserélhető a G csoport $D(g)$ irreducibilis ábrázolásának valamennyi mátrixával, azaz

$$D(g)A = AD(g) \qquad \forall g \in G \tag{20}$$

ekkor

$$A = \lambda I \tag{21}$$

λ komplex szám; I az egységoperátor

Bizonyítás
A-nak nyilván van legalább egy $\lambda \neq 0$ sajátértéke. Legyen az ehhez tartozó altér V-ben V_1 ez nyilván nem csak az $x = 0$ elemet tartalmazza

$$V_1 = \{x \mid x \in V; \quad Ax = \lambda x\} \neq \{0\} \tag{22}$$

V_1 invariáns altér $D(g)$-re, mert ha $x \in V$, akkor (20)

$$A[D(g)x] = D(g)[Ax] = 0 \;\; D(g)(\lambda x) = \lambda[D(g)x]$$

$D(g)$ irreducibilitása és (22) miatt ekkor $V_1 = V$, tehát (21) az egész V téren igaz.
Ebből a Lemmából következik, hogy egy kommutatív csoport bármely irreducibilis ábrázolása 1 dimenziós.

3.3.2. II. Lemma

Legyen $D_1(g)$ G irreducibilis ábrázolása a V_1 lineáris téren, $D_2(g)$ G irreducibilis ábrázolása a V_2 lineáris téren.
Ha $\exists A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, melyre

$$D_2(g)A = AD_1(g) \qquad \forall g \in G \tag{23}$$

akkor:

$$\begin{aligned} &\text{vagy } \; A = 0 \\ &\qquad \text{vagy } \; \exists A^{-1} \end{aligned} \tag{24}$$

Bizonyítás
(a) A V_1 tér $A(V_1) \subset V_2$ képe invariáns a $D_2(g)$ ábrázolása,
mert: $\forall y \in A(V_1)$-hez
$\exists x \in V_1$ úgy, hogy $y = Ax$: (23) segítségével innen kapjuk, hogy

$$D_2(g)y = D_2(g)Ax = A[D_1(g)x]$$

Tehát $\forall y \in A(V_1)$-re és $\forall g \in G$-re $D_2(g)y \in A(V_1)$. Mivel $D_2(g)$ irreducibilis, ezért

$$A(V_1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{vagy } \{0\} \\ \text{vagy } V_2 \end{array} \right. \tag{25}$$

(b) Legyen $Ker(A)$ a következő halmaz:

$$Ker(A) = \{x \mid x \in V_1; \;\; Ax = 0\}$$

Ez nyilván lineáris altér V_1-ben; ugyanakkor invariáns altér is a $D_1(g)$-re, mert

$$A[D_1(g)x] = D_2(g)[Ax] = 0$$

Itt felhasználtuk a (23)-at. $D_1(g)$ irreducibilitása miatt

$$Ker(A) = \begin{cases} \text{vagy } \{0\} \\ \text{vagy } V_2 \end{cases} \tag{26}$$

(25)-t és (26)-t összefoglalva a következő esetek lehetségesek:

1. $AV_1 = \{0\} \quad Ker(A) = \{0\}$
2. $AV_1 = \{0\} \quad Ker(A) = V_1$
3. $AV_1 = V_2 \quad Ker(A) = \{0\}$
4. $AV_1 = V_2 \quad Ker(A) = V_1$

Az 1. esetben a V_1 tér, a 4. esetben a V_2 tér csak a null-elemből állhat, így ezek érdektelen esetek. A 2. esetben $A = 0$ kell hogy legyen, hiszen az egész értelmezési tartományt a 0 elembe viszi át. A 3. esetben az A invertálható, hiszen ha $x_1, x_2 \in V_1$ és $x_1 \neq x_2$, akkor nem lehetséges az, hogy $Ax_1 = Ax_2$, mert $Ker(A) = \{0\}$ miatt $A(x_1 - x_2) = 0$-ból következik, hogy $x_1 = x_2$ és ez ellentmond az $x_1 \neq x_2$ feltevésnek.
Megjegyezzük, hogy $A = 0$ szükségképpen, ha $D_1(g)$ és $D_2(g)$ inekvivalens irreducibilis reprezentációk, valamint ha $h \neq 0$, akkor $D_1(g)$ és $D_2(g)$ biztos, hogy ekvivalens ábrázolások.

$$AD_2 = D_1A \Rightarrow A^{-1}D_1A$$

Legyen B egy tetszőleges lineáris transzformáció V_1-ről V_2-re, és vizsgáljuk az $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezést, melyet a következőképp definiálhatunk:

$$A = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} D^2(g^{-1})BD^1(g) \tag{27}$$

$D^1(g)$ és $D^2(g)$ továbbra is irreducibilis reprezentációk; N a G elemeinek száma. Hogy A-ra a Sohur-lemmát alkalmazhassuk, be kell látnunk (23)-at.

$$D^2(g)AD^1(g^{-1}) = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} D^2(gh^{-1})BD^1(hg^{-1}) = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} D^2(hg^{-1})^{-1}BD^1(hg^{-1})$$

Itt felhasználtuk a $D(gh) = D(g) \cdot D(h)$ csoporttulajdonságot. A (hg^{-1}) $\forall g$-re végigfut G összes elemén, ha h is végigfut, így:

$$D^2(g)AD^1(g^{-1}) = A \tag{28}$$

vagyis $D(g)^{-1} = D(g^{-1})$ miatt (23) teljesül. (28)-ból is világos, hogy $V = V_1 = V_2$, $D(g) = D^1(g) = D^2(g)$ esetben a (20) feltétel teljesül. Az I. és II. Lemmákból az A operátorra tehát az következik, hogy $\forall B : V_1 \to V_2$ lineáris transzformáció esetén

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{N}\sum_{g\in G} D^2(g^{-1})BD^1(g) = 0 & \text{ha } D^1 \text{ és } D^2 \textbf{ inekvivalens és irreducibilis ábrázolás} \\ \frac{1}{N}\sum_{g\in G} D(g^{-1})BD(g) = \lambda I & \text{ha } D \textbf{ irreducibilis} \end{array} \tag{29}$$

λ értékét könnyen megkaphatjuk, ha vesszük (29) második sorának mindkét oldalának a spurját, és felhasználjuk, hogy $Tr(LBL^{-1}) = Tr(B)$ tetszőleges L és B lineáris transzformációkra:

$$\lambda = \frac{1}{n}Tr(B) \qquad n = Tr(I) \text{ az ábrázolások dimenziója} \tag{30}$$

ahol n a V tér dimenziója ($Tr(I) = n$). Vezessük be a D, D^1, D^2 helyett a 3.2.-beli C operátor segítségével ezekkel ekvivalens unitér ábrázolásokat:

$$U(g) = C^{-1}D(g)C \qquad U^1(g) = C_1^{-1}D^1(g)C_1 \qquad U^2(g) = C_2^{-1}D^2(g)C_2$$

(29) első sorában írjunk $B' = C_2^{-1}BC_1$-t;
(29) második sorában és (30)-ban írjunk $B' = C^{-1}BC$-t;
(29)-ből és (30)-ból ezekkel a jelölésekkel kapjuk:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{N}\sum_{g\in G} U^2(g)^+B'U^1(g) = 0 & \text{ha } U^2 \text{ és } U^1 \text{ inekv. és irred.} \\ \frac{1}{N}\sum_{g\in G} U(g)^+B'U(g) = \lambda I & \text{ha } U \text{ irreducibilis} \end{array} \tag{31}$$

$$\lambda = \frac{1}{n}Tr(B) = \frac{1}{n}Tr(B')$$

Írjuk át a (31) összefüggéseket mátrixelemekre:

$$\sum_{jk}[\frac{1}{N}\sum_{g\in G} U^2_{ij}(g)^+U^1_{kl}(g)]E^i_{jk} = 0$$

$$\sum_{jk}[\frac{1}{N}\sum_{g\in G} U_{ij}(g)^+U_{kl}(g) - \frac{1}{n}\delta_{il}\delta_{jk}]E^i_{jk} = 0$$

Mivel B'_{jk} tetszőleges mátrix lehet, válasszuk meg spec. úgy, hogy egyetlen elemén kívül az összes többi zérus legyen. Ezt $\forall j,k$-ra megtehetjük és így kapjuk az ún. **ortogonalitási összefüggéseket** az ábrázolási mátrixok mátrixelemeire:

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G} U^{(\mu)}_{ji}(g)^n U^{(\nu)}_{kl}(g) = \frac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{il}\delta_{jk} \tag{32}$$

itt n_μ a μ irreducibilis ábrázolás dimenziója. A nem csak unitér ábrázolásokra érvényes összefüggést (29)-ből hasonló módon származtathatjuk:

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G} D^{(\mu)}_{ji}(g^{-1})D^{(\nu)}_{kl}(g) = \frac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{il}\delta_{jk} \tag{33}$$

Vezessük be a C ekvivalencia transzformáció által invariánsul hagyott mennyiségeket az ún. karaktereket:

$$\begin{array}{ll} \chi(g) = TrD(g) = TrU(g) & \chi(g^{-1}) = \chi^*(g) \\ \chi_1(g) = TrD^1(g) = TrU^1(g) & \chi_1(g^{-1}) = \chi_1^*(g) \\ \chi_2(g) = TrD^2(g) = TrU^2(g) & \chi_2(g^{-1}) = \chi_2^*(g) \end{array} \tag{34}$$

Akár (32)-ből akár (33)-ból a két oldalon vett megfelelő összegezéssel kapjuk az inekvivalens irreducibilis ábrázolások **karakterei közötti ortogonalitási összefüggéseket**:

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\chi^*_\mu(g)\ \ \chi_\nu(g) = \delta_{\mu\nu} \tag{35}$$

Hadd világítsuk most meg, miért is nevezik a (32), (35) összefüggéseket ortogonalitási összefüggéseknek. Tekintsük mindazon $\phi(g)$ függvényeket, amelyek a $g \in G$ elemhez egy komplex számot rendelnek. A $\{\phi(g)\}$ függvényhalmazt nevezzük Φ térnek. Ez a tér lineáris tér lesz, ha bevezetjük az összeadást és a komplex számmal való szorzást:

$$(\phi_1 + \phi_2)(g) = \phi_1(g) + \phi_2(g)$$

$$(\lambda\phi)(g) = \lambda \cdot \phi(g)$$

λ komplex szám

A Φ tér véges dimenziós és maximálisan épp N db lineárisan független bázis fv-t találhatunk benne:

$$B = \{\phi_g|\phi^{(h)}_g\} = \begin{cases} 1 & \text{ha } h = g \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{36}$$

A B-beli elemekkel egy tetszőleges $\psi \in \Phi$ a következőképp fejthető ki:

$$\psi = \sum_{g\in G}\psi(g)\phi_g\big(\to \psi(h) = \sum_{g\in G}\psi(g)\phi_g(h)\big) \tag{37}$$

ez ugyanis nyilván $\forall h \in G$-re $\psi(h)$ értéket vesz fel. A Φ téren levezetünk egy skalárszorzatot is: $\psi, \phi \in \Phi$ tetszőleges

$$\langle\psi|\phi\rangle_\Phi = \frac{1}{N}\sum_{g\in G}\psi^*(g)\phi(g) \tag{38}$$

(32) (35) illetve (38) összevetéséből most már világos, hogy $\chi(g)$ értékeket és $U_{ij}(g)$-ket fix i, j mellett Φ-beli elemeknek kell tekintenünk és a (32), (35) összefüggések a Φ-térbeli skalárszorzatra vett ortogonalitási összefüggéseket jelentenek.

3.4. Az ortogonalitási összefüggések következményei

Nézzük meg ezek után, hogy (32), (35)-ből milyen következtetések vonhatók le az inekvivalens irreducibilis ábrázolásokra és a reducibilis ábrázolások felbontására.

3.4.1. 1. tétel

A (32) szerint egy n_1 dimenziós lineáris téren ható $U^1_{ij}(g)$ irreducibilis ábrázolás n_1^2 db a Φ-térben ortogonális függvényt szolgáltat. Ugyancsak (32) azt mondja, hogy ha találunk egy n_2 dimenziós térben hatóm U^1-vel nem ekvivalens U^2_{ij} ábrázolást, akkor találunk még n_2^2 db egymásra és az előzőekre is ortogonális Φ-térbeli függvényt. Mivel azonban a Φ tér dimenziója $N < \infty$, ezért

$$\sum_\mu n_\mu^2 \leq N \tag{39}$$

ahol a $\sum_\mu$ az összes inekvivalens, irreducibilis ábrázolásra vett összegzés. Tehát egy G **véges csoport inekv. irred. ábrázolásainak száma véges.**

3.4.2. 2. tétel

Tétel: $D^1(g)$ és $D^2(g)$ irreducibilis ábrázolások akkor, és csak akkor ekvivalensek, ha

$$\chi_1(g) = \chi_2(g) \tag{40}$$

Bizonyítás: Ha D^1 és D^2 ekvivalens, akkor (40) triviális, ha szem előtt tartjuk a $Tr(LDL^{-1}$ összefüggést. Ha viszont $\chi(g) = \chi_1(g) = \chi_2(g)$, és D^1 és D^2 inekvivalens, akkor (35)-ből:

$$\begin{array}{ll} \langle\chi|\chi\rangle = \langle\chi_1|\chi_2\rangle_\Phi = 0 & \text{mert inekv.} \\ \langle\chi|\chi\rangle = \langle\chi_1|\chi_1\rangle_\Phi == \langle\chi_2|\chi_2\rangle_\Phi = 1 & \text{mert irred.} \end{array}$$

ami ellentmondás.

3.4.3. 3. tétel

Tétel: A $D^1(g)$ és $D^2(g)$ tetszőleges ábrázolások akkor és csak akkor ekvivalensek, ha

$$\eta_1(g) = TrD^1(g) = \eta_2(g) = TrD^2(g) \tag{41}$$

Bizonyítás: A 3.4.1. szerint a G csoport inekv. irred. ábrázolásaihoz tartozó karakterek elrendezhetőek egy véges elemű sorozatban:

$$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_i, \ldots, \chi_k \tag{42}$$

Gondoljunk $D^{1,2}(g)$ (14) alakú előállítására. Ekkor világos, hogy

$$\begin{aligned} \eta_1(g) &= \sum_{i=1}^{k} m_i \chi_i(g) \\ \eta_2(g) &= \sum_{i=1}^{k} \underline{m_i} \chi_i(g) \end{aligned} \tag{43}$$

Itt m_i és $\underline{m_i}$ azt mondja meg, hogy az irreducibilis felbontásban hányszor szerepel a χ_1 karakter D^1-ben illetve D^2-ben. Ha $\eta(g) = \eta_1(g) = \eta_2(g)$, akkor (35) figyelembevételével

$$\langle \eta | \chi_i \rangle_\Phi = m_i = \underline{m_i} \tag{44}$$

(44) azt mutatja D^1-ben és D^2-ben csak ugyanazok az inekv. irred. ábrázolások léphetnek fel és multiplicitásuk is megegyezik.

3.4.4. 4. tétel

Tétel: A $D(g)$ ábrázolás akkor és csak akkor irreducibilis, ha

$$\langle \eta | \eta \rangle_\Phi = 1 \tag{45}$$

ahol $\eta(g) = TrD(g)$.

Bizonyítás: Ha $D(g)$ irreducibilis, akkor (45) igaz, hiszen ezt már (35)-ben is tudtuk. A fordított állítás igazolásához tekintsük az η (43) felbontását:

$$\eta(g) = \sum_{i=1}^{k} m_i \chi_i$$

$$\langle \eta | \eta \rangle_\Phi = \sum_{i=1}^{k} m_i^2 = 1$$

Mivel az $m_i \geq 0$ egész szám lehet csak - ezen utóbbi egyenletnek egyetlen lehetséges megoldása az, ha

$$m_i = 0 \quad ha \;\; i \neq j \quad (j \;\; fix)$$

$$m_j = 1$$

3.5. A reguláris reprezentáció és a teljességi összefüggések

Ebben a fejezetben egy speciális reducibilis reprezentációt fogunk vizsgálni. Épp ennek a reprezentációnak - többek között - azért nagy a jelentősége, mert irreducibilis komponensei között megtalálható a G csoport összes inekv. irred. ábrázolása.
Rendeljünk minden $f \in G$ elemhez egy Φ téren ható $R(f)$ lineáris operátort, amely a (36) bázisrendszeren a következőképp hat:

$$
\begin{array}{ll}
R(f)\phi_g = \phi_i g & \forall f,g \in G \\
R(f_1 f_2)\phi_g = \phi_{f_1 f_2 g} = R(f_1)R(f_2)\phi_g & \Rightarrow \\
\Rightarrow R(f_1 f_2) = R(f_1)R(f_2) & \forall f_1, f_2 \in G
\end{array}
\tag{46}
$$

$R(f)$-et G reguláris ábrázolásának nevezzük. (46) felhasználásával könnyen beláthatjuk, hogy

$$[R(f)\phi] = \phi(f^{-1}g) \qquad \forall g \in G \tag{47}$$

$$\langle R(f)\phi | R(f)\psi\rangle_\Phi = \langle \phi|\psi\rangle \qquad \forall \phi, \psi \in \Psi \tag{48}$$

$R(f)$ mátrixa a (36) bázison (46) miatt: (ún. permutáció mátrix)

$$R(f)\phi_g = \sum_{g' \in G} \phi_{g'} R(f)_{g'g} \tag{49}$$

$$R(f)_{gg'} = \delta_{g;fg'} = \begin{cases} 1 & \text{ha } g = fg' \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

(49)-ből az $R(f)$ karakterére adódik, hogy

$$\eta(f) = TrR(f) = \sum_{g \in G} R(f)_{gg} = \sum_{g \in G} \delta_{g;fg} = \begin{cases} N & \text{ha } e = f \\ C & \text{egyébként} \end{cases} \tag{50}$$

(e a G csoport egységeleme)

$$\langle \eta|\eta\rangle_\Phi = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} NN\delta_{g;e} = N \tag{51}$$

(51)-ből látszik, hogy $R(f)$ reducibilis $N > 1$-re (lásd: 3.4.4. alfejezet tétele) Tétel: Az η (43)-mal analóg felbontása legyen:

$$\eta = \sum_i m_i \chi_i \qquad m_i \neq 0 \tag{52}$$

(

$\sum_i$ csak az $R(f)$-ben fellépő inekv. irred. ábrázolásokra vonatkozik) (50) segítségével:

$$\langle \eta|\chi_i\rangle_\Phi = m_i = \frac{1}{N} \sum_{g \in g} \eta^*(g)\chi_1(g) = \chi_1(e) = n_i \tag{53}$$

ahol n_i a χ_i ábrázolás dimenziója. Ugyanekkor:

$$\langle \eta|\chi_i\rangle_\Phi = \sum_i m_i^2 = \sum_i n_i^2 = N \qquad (BURNSIDE \quad tétel) \tag{54}$$

(54) (39)-cel együtt biztosítja, hogy az $R(f)$-ben G összes inekv. irred. ábrázolása fellép. Ha ugyanis létezne még egy $n_0 \geq 1$ dimenziós (52)-ben nem szereplő, ugyanakkor minden (52)-beli-vel inekvivalens ábrázolása G-nek, akkor

$$N \geq \sum_{\mu} n_{\mu}^2 \geq \sum_{i} n_i^2 + n_0^2 = N + n_0^2 > N \tag{55}$$

ami nyilván nem lehet igaz. Tehát:

$$N = \sum_{\mu} n_{\mu}^2 \tag{56}$$

(56)-ból rögtön adódik az **első teljességi összefüggés** a B'

$$B' = \{U(g)_{ij}^{(\mu)} \qquad \mu = 1, 2, \ldots, k \qquad ij = 1, 2, \ldots, n_{\mu} \tag{57}$$

halmaz elemei az ortogonalitási összefüggés miatt kifeszítik a Φ teret. Bármely $\psi \in \Phi$ kifejethető a B'-beli függvények segítségével tehát:

$$\psi(g) = \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{i,j=1}^{n_{\mu}} e_{ij}^{(\mu)} U^{(\mu)}(g)_{ij} \tag{58}$$

(32)-t felhasználva:

$$e_{ij}^{(\mu)} = n_{\mu} \langle U_{ij}^{(\mu)} | \psi \rangle_{\Phi} \tag{59}$$

(59)-et visszaírva (58)-ba és kihasználva, hogy az így kapott összefüggés $\forall \psi \in \Phi$-re igaz, kapjuk:

$$\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{i,j=1}^{n_{\mu}} U(g)_{ij}^{(\mu)} U_{ij}^{(\mu)}(h) n_{\mu} = \delta_{g;h} \forall g, h \in G \tag{60}$$

A következő teljességi összefüggés a χ_{μ} $\mu = 1, \ldots, k$ karakterekre vonatkozik majd. A χ_{μ}-kről azonban általánosságban nem állíthatjuk, hogy kifeszítik az egész Φ teret, mert van egy speciális tulajdonságok, nevezetesen az, hogy a G-ben egy adott konjugált elemosztály minden eleméhez ugyanazt a számot rendelik: ha $g_1, g_2 \in G$ és $\exists h \in G$ úgy, hogy $g_1 = h g_2 h^{-1}$, akkor

$$\chi(g_1) = TRD(h g_2 h^{-1}) = TRD(h) \cdot D(g_2) \cdot D(h)^{-1} = TRD(g_2) = \chi(g_2) \tag{61}$$

A G-t diszjunktan lefedő konjugált elemosztályok száma legyen r- Sok esetben $r < N$ és ekkor a G inekv. irred. ábrázolásainak karaktereiből biztos, hogy nem keverhető ki pl. egy olyan Φ-beli elem, amely minden egyes csoportelemen más-más értéket vesz fel.
Tekintsük ezért a Φ-tér $r \leq N$ dimenziós alterét, amely már csak azon függvényeket foglalja magában, melyek G-ben egy K konjugált elemosztályon ugyanazt az értéket veszik fel (ún. centrális fv.-ek).

$$C = \{f | f \in \Phi : f(g) = f(hgh^{-1}), \qquad \forall h, g \in G\} \tag{62}$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy G inekv. irred. ábrázolásainak χ_μ $\mu = 1, \ldots, r$ karakterei mindegyikére ortogonális C-beli fv. az azonosan zérus fv.-n kívül nincs, azaz $f \in C$ esetén

$$\langle f | \chi_\mu \rangle_\Phi = 0 \qquad \mu = 1, \ldots, k \tag{63}$$

-ból következik, hogy $f(g) = 0$ $\forall g \in G$.

Bizonyítás: Legyen G egy irreducibilis ábrázolása $D(g)$, ennek karaktere $\chi(g) = TRD(g)$; vegyünk egy $f \in C$ tetszőleges elemet és definiáljuk a következő operátort:

$$D_f = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} \; f(h) \;\; D(h) \tag{64}$$

Mivel

$$D(g^{-1}) D_f D(g) = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} f(ghg^{*1}) \cdot D(h) = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} f(h) \cdot D(h) = D_f$$

ezért D_f (21) alakú:

$$D_f = \lambda I \tag{65}$$

(64)-ből és (65)-ből:

$$\lambda = \frac{1}{n} TRD_f = \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{h \in G} f(h) \cdot TRD(h) = \frac{1}{n} \langle f^x | \chi \rangle_\Phi \tag{66}$$

ahol n a $D(g)$ ábrázolás dimenziója. Térjünk most át a G csoport reguláris ábrázolásának vizsgálatára. Az $R(g)$ az $R_i(g)$ $i = 1, \ldots, L$ irred. (nem feltétlen inekv.) ábrázolások direkt összege.

$$R(g) = \sum_{i=1}^{L} \oplus R_i(g)$$

A (64)-gyel analóg R_{f^x} (65) és (66) segítségével:

$$R_{f^x} = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} f^x(h) \cdot R(h) = \frac{1}{N} \oplus f^x(h) \cdot R_i(h) = \sum_{i=1}^{L} \oplus [\frac{1}{n_i} \langle f | \chi_i \rangle I_i$$

A (63) felvetés miatt tehát $R_{f^x} = 0$. Az R_{f^x} a Φ tér bármely elemét, így a (36) báziselemeket is a tér $\underline{O}$ elemébe viszi át:

$$\underline{O} = R_{f^x} \phi_g = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} f^x(h) \phi hg = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} f^x(hg^{-1}) \phi_g$$

Az $\underline{O}$ minden komponense 0 ezért

$$f(g) = 0 \qquad \forall g \in G$$

Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy a χ_μ $\mu = 1, \ldots, k$ inekv. irred. karakterek C-ben teljes rendszert alkotnak.

Megjegyzés:

1. Mivel a C altér r dimenziós, így szükségképpen $k = r$, azaz a G-beli konjugált elemosztályok száma megegyezik a G inekv. irred. ábrázolásainak számával.

2. Ha egy csoport összes irred. ábrázolása 1 dimenziós, akkor $\sum_\mu n_\mu^2 = N$ és az 1. megjegyzés miatt minden elemosztály G-ben egyetlen elemből áll, tehát
$$g = hgh^{-1} \qquad \forall h, g \in G$$
azaz a csoport kommutatív.

A (60)-nal analóg összefüggést χ_μ-kre a következőképp kaphatjuk meg: legyen $f \in C$, akkor

$$f(h) = \sum_{\mu=1}^{k} c_\mu \chi_\mu(h) es \qquad c_\mu = \langle \chi_\mu | f \rangle_\Phi$$

c_μ-t visszahelyettesítve:

$$f(h) = \sum_{g\in]} [\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{k} \chi_\mu^*(g) \chi_\mu(h)] f(g) \qquad \forall f \in C \tag{67}$$

legyen

$$f(h) = \begin{cases} 1 & \text{ha } h \in K_i \qquad \text{i fix} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

K_1 az i konjugált elemosztálya. Ha ez s_i db elemet tartalmaz, akkor (67)-ből:

$$\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{k} \chi_\mu^*(h_i) \chi_\mu(h_j) = \frac{1}{s_i} \delta_{i;j} \tag{68}$$

$i, j = 1, \ldots, k$
$h_i \in K_i$
$h_j \in K_j$

3.6. A csoportalgebra és ennek reguláris ábrázolása

A véges csoportok ábrázoláselméletében fontos szerepet játszik a csoportalgebra. Ez az új struktúra elsősorban a csoport reguláris ábrázolásának vizsgálatára szolgáltat új lehetőséget. Ebben a fejezetben a csoportalgebrára és reguláris ábrázolásokra vonatkozó fontos tételeket bizonyítottuk be, majd a következő fejezetben ezekre építve megmutatjuk, hogyan lehet megkonstruálni az n-ed rendű permutációcsoport összes inekvivalens irreducibilis ábrázolását a reguláris reprezentációkból.

Legyen adott egy N elemű G csoport. Tekintsük azt a lineáris teret, amelyet a G csoport elemei, mint bázisvektorok feszítenek ki (ez teljesen analóg a Φ térrel ha ϕ_e helyére g-t gondolunk).