09.18. EA | Kezdés: 10:05!

- stencilezett jegyzet
- Fuchs László: Algebra
- Magnus, Grossmann: Csoportok és gráfjaik (FizWeb)
- Hall: Alkalmazott csoportelmélet
- Montvay István: Relativisztikus kvantummechanika (fizikus könyvtár)

Miért jó a csoportelmélet?

fizikai modell → matematikai modell → fizikai interpretáció

↓ ez sokféle lehet, ettől függően

↓ szintén sokféle + almodellek → (pl. koordinátarendszer) reprezentáció → eredmény

Összehasonlítás:

eredmény →← mérés

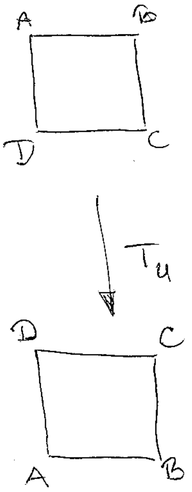
eredmény →← eredmény másik modellel/reprezentációval/stb.

Vizsgálunk egy adott fizikai objektumot.

ha pl. egy tárgyat odébbteszek 5 cm-rel: $x_1 \ast \longrightarrow \ast x_2$

formálisan: $x_2 = T_1 x_1$ (T operátor)

vagy pl. forgatás: $x_3 = T_2 x_2$



→ miért jelöljük a négyzet sarkait? hogy pl. forgatás után is „megismerjük" a sarkokat.

$T_4 x_1 = T_2 T_1 x_1$

(a T_4 transzformáció ua. mint egymás után a T_1 és T_2) $\Rightarrow$ $T_4 = T_2 T_1$

$\Downarrow$

transzformációk szorzása v. kompozíciója

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "T_1"] \arrow[rr, bend right, "T_4"] \arrow[rrr, bend right=60, "T_6"] & x' \arrow[r, "T_2"] \arrow[rr, bend right, "T_5"] & x'' \arrow[r, "T_3"] & x''' \end{tikzcd}$$

$$x''' = T_6 x = T_5(T_1 x) = T_3(T_4 x)$$

asszociatív $\longrightarrow$ $T_6 = (T_3 T_2) T_1 = T_3 (T_2 T_1)$

Ekvivalencia relációk? ((~ halmaza := G))

$$\left.\begin{array}{lll} \forall T_1, T_2 \in G : \exists T_4 \in G : T_4 = T_2 T_1 & & \text{zárt} \\ \forall T_1, T_2, T_3 \in G : T_3(T_2 T_1) = (T_3 T_2) T_1 & & \text{asszociatív} \\ \exists I^* \in G : \forall T \in G : TI = IT = T & & \text{egységelem} \\ \forall T \in G : \exists T' \in G : T'T = TT' = I & & \text{inverz} \end{array}\right\} \text{csoport}$$

Szimmetria:
- invariancia a részek felcserélésével szemben
- az a transzformáció, amely nem változtatja meg az objektumot

Szimmetriacsoport

(M) $(\{1\}, \cdot)$ is csoportot alkot

Izomorfia: ha két csoport műveletartó módon leképezhető egymásra

Elemek száma = a csoport rendje

(M) invariáns objektumok vizsgálata = relativitáselmélet

(M) a térnek nincs kitüntetett pontja = homogén = eltolásra invariánsak az objektumok

(M) izotróp ⇒ elforgatás-invariáns

(M) Galilei-féle relativitási elv

(M) + időinvariancia

ezek KÉTFÉLE csoportot alkothatnak (az egyik a relativitáselmélet) (a másik a kvantumfiz.) → (*)

(M) a neutrínókra pl. a tükrözés nem szimmetrikus

* identitástranszformáció ⇒ ez közös az összes szimmetriacsoportban !

(*) az egyik a Galilei-csoport, a másik a Poincaré-csoport
(klasszikus) (relativisztikus)

Kovariancia = "együtt változás" (pl. ha másik koordináta-rendszerre térünk át, a mennyiségek változnak, de az „összességük", az összefüggések nem változnak)

Pl. $\underline{F} = m \cdot \underline{a}$ és $\underline{F}' = m' \cdot \underline{a}'$

Invariancia = "külön változás"

$\boxed{09.25}$

A csoportaxiómák következményei

Csoport:
- algebrai struktúra
- egy művelet van (a fizikában általában szorzással jelöljük)
- axiómák: zárt, asszociatív, egységelem, inverz
- a csoportnak legalább egy eleme van (e, (egységelem))
- vannak véges és végtelen csoportok
- jelölés: $(G, \cdot)$; $\cdot : G \times G \mapsto G$; $(a,b) \mapsto c = a \cdot b$

$\forall a,b \in G, \exists c \in G ; c = a \cdot b$ (zárt)

$\forall a,b,c \in G : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asszociatív)

$\exists e \in G : \forall a \in G : a \cdot e = e \cdot a = a$ (egységelem)

$\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$ (inverz)

(M) ha $\exists$ bal- és jobboldali egységelem, akkor egyenlőek

$e_b \cdot a = a$

$a \cdot e_j = a$

$e_b = e_b \cdot e_j = e_j$

(M) ha $\exists$ bal- és jobboldali inverz, akkor egyenlőek

$\left.\begin{matrix} ba = e \\ ac = e \end{matrix}\right\} c = ec = (ba)c = bac = b(ac) = be = b$

A csoport rendje (elemszáma): $|G|$

$|G| < \infty$ vagy $|G| \nless \infty$

A csoport elemeinek megadása
→ a csoport elemeinek felsorolásával történik:

csoport neve → G

csop. elemei → a, b, c, d, …

G	a	b	c	d	…
a					
b			d $(b\cdot c)$		
c	~~d~~	d $(c\cdot b)$			
d					
⋮					

$\Rightarrow b\cdot c = d = c\cdot b$

szorzatok → ha itt egy sorban több egyforma elem van, az nem lehet! (*)

$a, b \in G$: $ax = b$ → van-e megoldása ennek az egyenletnek?
(a csoporton belül!)
(z = zárt, a = asszoc., e = egys., i = inverz)

i: $\exists a^{-1}$

z: $a^{-1}(ax) = a^{-1}b$

a: $(a^{-1}a)x = a^{-1}b$

i: $ex = a^{-1}b$

e: $x = a^{-1}b$ → így megoldottuk az egyenletet

H: $ya = b \rightarrow (ya)a^{-1} = ba^{-1}$

$$y(aa^{-1}) = ba^{-1}$$
$$ye = ba^{-1}$$
$$y = ba^{-1}$$

(*) mert: $c\cancel{a} = d$

$cb = d$

$ca = cb$

$a = b$

$|G| = 1 \rightarrow$

G_1	e
e	e

⇒ triviális csoport
neve: C_1

$(\{1\}, \cdot) \rightarrow$

C_1	1
1	1

$(\{0\}, +) \rightarrow$

C_1	0
0	0

identitástranszform. →

C_1	I
I	I

ez ugyanaz a csoport ⇒ IZOMORF
(csak más jelölésekkel)
ez a C_1 triv. cs.

Kételemű: C_2

C_2	e	a
e	e	a
a	a	e

C_2	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

→ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van köztük

I: identitás-tr.
T: tükrözés

C_2	I	T
I	I	T
T	T	I

a C_2 csoport absztrakt módon lefedik
(ez a három dolog izomorf)

Involutorikus művelet: ha kétszer hajtjuk végre egy objektumon, visszakapjuk ugyanazt az objektumot (pl. tükrözés)

Háromelemű: C_3

	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

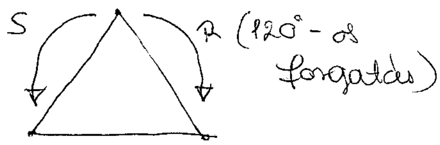
→

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	
b	b		

C_3	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

✓

egyenlő oldalú háromszög forgatása



C_3	1	R	S
1	1	R	S
R	R	S	1
S	S	1	R

360°-os forgatás

$R^3 = R^6 = \dots = 1$

$a^n = e$ (*)

C_n ⇒ szabályos n-szög forgatásának csoportja (n-elemű)

(M) C = ciklikus

(*) $a^{-2}, a^{-1}, a^0 = e, a, a^2, \dots, a^n = e$

$a^{-1} = a^{n-1}$

stb., így:

	1	R	R^2
1	1	R	R^2
R	R	R^2	1
R^2	R^2	1	R

→ ez az R elem generálja a többi ~~...~~ elforgatást (csoportelemet)

Szabályos ötszög szimmetriacsoportja: C_5

(ciklikus permutáció)

C_5	1	R	R^2	R^3	R^4
1	1	R	R^2	R^3	R^4
R	R	R^2	R^3	R^4	1
R^2	R^2	R^3	R^4	1	R
R^3	R^3	R^4	1	R	R^2
R^4	R^4	1	R	R^2	R^3

(M) Az eddig felírt csoportok mind kommutatívak! (ezért szimmetrikus ez a tábla)

Komplex egységgyökök: $\varepsilon_n^k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$

$(\varepsilon_n)^n = 1$ ← izomorf a szabályos n-szög forgatásával

Ha $H \subset G$ és H is csoport ugyanarra a műveletre nézve, akkor H részcsoport.

Négyelemű csoport:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			
b	b			
c	c			

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c		
c	c	b		

✓

G_1	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

✓

G_2	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

✓

G_3	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

$b = a^2$

$c = ab = a^3$

⇓

C_4	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

⟺

$a = b^2$

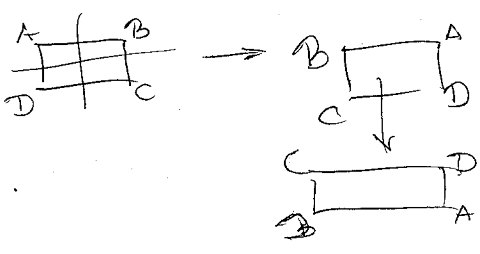
C_4	e	b^2	b	b^3
e	e	b^2	b	b^3
b^2	b^2	e	b^3	b
b	b	b^3	b^2	e
b^3	b^3	b	e	b^2

ez viszont nem C_4!

tehát Négyelemű csoportból kétféle van: C_4 és Klein-csoport

$= D_2$

pl. téglalap:

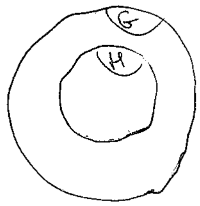


stb!

Ötelemű csoportból egy van: a C_5

Prím-elemű csoportokból csak egy van! : C_k

H részcsoport: $H < G$



(M) önmagának minden csoport részcsoportja

(M) $\{e\}$ is részcsoport

~~Lagrange-tétel~~

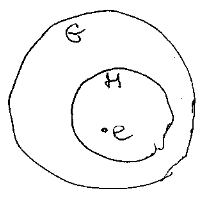
(T) $|H| \mid |G|$: a részcsoport elemeinek száma osztója a csoport elemei számának : Lagrange-tétel

$\boxed{10.02.}$

Definiáló relációk: nem következnek a csoport tulajdonságaiból, de jellemzőek az adott csoportra; elemek közötti relációk

Generáló elemek: szorzatai és hatványai segítségével előáll a csoport összes eleme (ezek szabadon választhatók)

Lagrange-tétel bizonyítása:

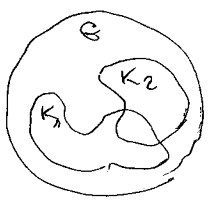


$|G| = N < \infty$

$H \subset G$

$H < G$ (H részcsoportja G-nek)(így H biztosan nem $\emptyset$)

$|H| \mid |G|$



$K_1 \subset G$; $K_2 \subset G$

(M)(csoport részhalmaza: komplexus)

$K = K_1 \cdot K_2 = \{a \cdot b \mid a \in K_1, b \in K_2\}$

(M) $a \cdot b \in G$! (mivel G csoport) $\rightarrow K \subset G$

$K = K_1 \cdot K$: zárt, asszociatív, semleges elem: $E = \{e\}$

A komplexusszorzás egységelemes félcsoportot alkot.

Spec: $\{a\}\cdot K = \{a\cdot k \mid k\in K\}$ röviden: aK

$(Ka = \{ka \mid k\in K\})$

$H < G$

$aH = \{ah \mid h\in H\}$

- 1. eset: $a\in H \to ah\in H$
- 2. eset: $a\notin H \to aH\cap H = \emptyset$

Bizonyítás:

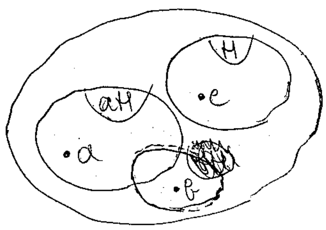
Tfh. $aH\cap H \neq \emptyset \to \exists x\in H\cap aH$

$x\in aH: \exists h\in H: x = ah \;/h^{-1}$

$xh^{-1} = (ah)h^{-1} = a(hh^{-1}) = ae = a$

$a = xh^{-1}: x\in H: h^{-1}\in H$

ekkor $a\in H$ ↯ (a legelején feltettük, hogy $a\notin H$)



$b\notin H$

$b\notin aH$

M: az egységelem CSAK a H-ban van benne

Tfh. $y\in (aH)\cap(bH)$

$\exists h_1\in H: y = ah_1$

$\exists h_2\in H: y = bh_2$

$h_1\neq h_2$

$ah_1 = ah_2$ ↯

$y = ah_1 = bh_2 \;/h_2^{-1}$

$(ah_1)(h_2^{-1}) = (bh_2)(h_2^{-1}) = be = b$

$b = (ah_1)(h_2^{-1}) = a\underbrace{(h_1h_2^{-1})}_{h_3} = ah_3 \in aH$

$b\in aH$ ↯

$|aH| = |H|$

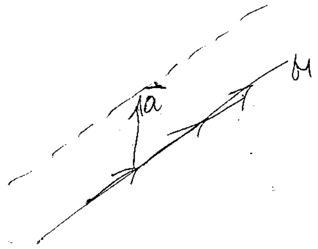
$G = H\cup(aH)\cup(bH)\cup(cH)\cup\ldots\cup(kH)$

$|G| = k|H| \quad k\in\mathbb{N}$

Q.E.D.

Elnevezések:

aH = H mellékosztálya



(P) Sík vektorai = G csoport (összeadásra)

Egy egyenesbe eső vektorok = H részcsoport

$\vec a + H$ mellékosztály (($\vec a$-val eltolt egyenes))

↳ végtelen sok mellékosztály := az egyenessel párhuzamos többi egyenes (uniójuk kiadja G-t)

(P2) $G = (\mathbb{Z}, +)$

H = (hárommal osztható számok, +)

mellékosztály pl.: $4+H$
$(-1)+H$ (ekvivalencia osztályokra bontottuk, több eset nincs)

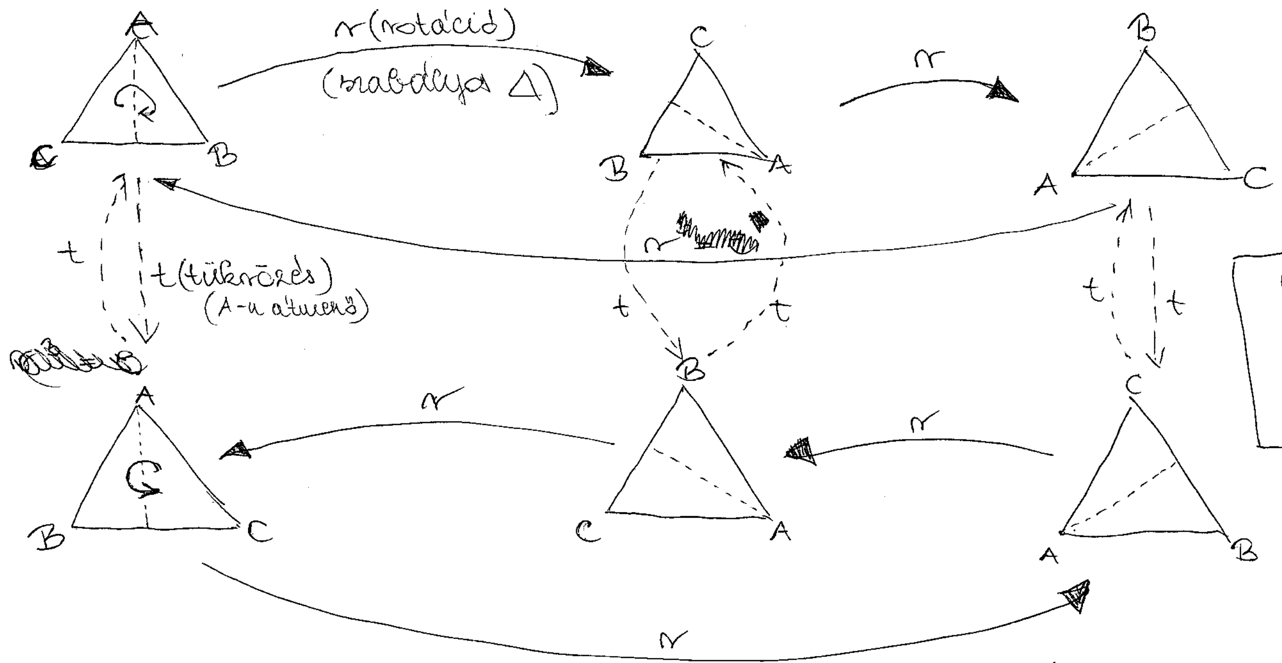
↓

Ezek nem alkotnak csoportot, mert pl.:

$(4+H) = \{\dots, -2, 1, 4, 7, \dots\} \to 1+4 = 5 \notin (4+H)$

(M) általában a jobboldali mellékosztályok nem egyeznek a baloldali mellékosztályokkal ($aH \neq Ha$) (a fenti biz. ban $aH = Ha$)

A legkisebb nem kommutatív csoport: D_3



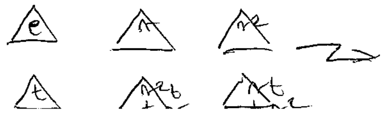
Definiáló relációk

$r^3 = e$

$t^2 = e$

$rt = tr^2$

$\boxed{r \cdot t \neq t \cdot r}$ $r^3 = e$



$\Rightarrow \quad tr = r^2 t$

$rt = tr^2$ (ugyanúgy, ahogy az operátoroknál, az először „ható" műveletet írjuk jobbra)

$$\left\{\begin{array}{l} a, b \in G \;;\; a^{-1}, b^{-1} \\ a \cdot a \cdot b^{-1} \cdot b \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} = e \end{array}\right\}$$ ez a csoportaxiómákból következik

ezek viszont nem!
(ezek definiáló relációk)

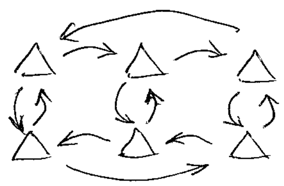
A generáló elemeket szabadon választhatjuk! Például a háromszögeknek választhattuk volna a B-n átmenő tengelyt is tükörtengelynek.

$rtrt = tt = e$

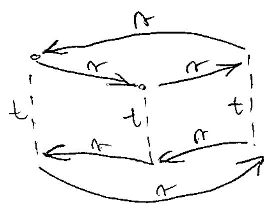
$rt = tr^2 \quad /r$

$rtr = (tr^2)r = t(r^2 r) = tr^3 = t$

Ezt gráfokkal is meg lehet adni:

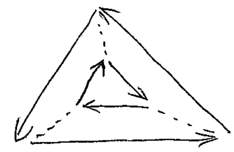


(zárt kör = e)



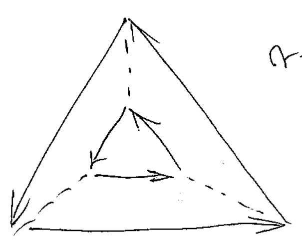
Jelölés: (t-nél) $\longleftrightarrow$ helyett - - - -

ugyanez máshogy lerajzolva:



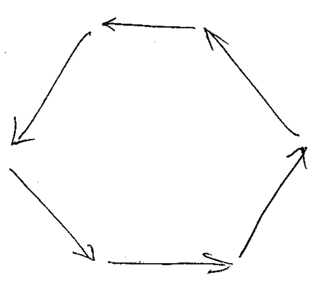
(M) Ennek a gráfnak minden csúcsa ekvivalens: van egy „befutó", egy „kifutó" és egy kétirányú éle minden csúcsnak

Példa egy kommutatív csoport gráfjára:



$rt = tr$

C_6 csoport gráfja:



(P) NH_3 (nem szabályos tetraéder! (kapor))

↳ C_3 csoport

$\boxed{\begin{aligned} r^3 &= e \\ t^2 &= e \\ rt &= tr^2 \end{aligned}}$

ennek a C_3 részcsoportja

D_3	e	r	r^2	t	tr	tr^2
e	e	r	r^2	t	tr	tr^2
r	r	r^2	e	tr^2	t	tr
r^2	r^2	e	r	tr	tr^2	t
t	t	tr	tr^2	e	r	r^2
tr	tr	tr^2	t	r^2	e	r
tr^2	tr^2	t	tr	r	r^2	e

$$(rt)r = (tr^2)r = tr^3 = t$$
$$r(tr^2) = (rt)r^2 = (tr^2)r^2 = tr$$
$$r^2(tr^2) = (r^2t)r^2 = (tr)r^2 = t$$
$$(tr)(tr) = t(rt)r = t(tr^2)r = \underset{e}{\underset{\parallel}{t^2}}\,\underset{e}{\underset{\parallel}{r^3}}$$

Hf: D_3-hoz hasonlóan írjuk fel a szabályos ötszög definiáló relációit, meg ert, adjunk neki nevet

$\boxed{10.09.}$

Prezentáció: megadjuk a generátor elemeket, és a definiáló relációkat

Diéder: két lappal határolt test ~~[illegible]~~

N oldalú diéder csoportja: D_n (pl. a fenti D_3)

$|D_n| = 2n$

D_n	e	r	$\dots$	r^{n-1}	t	tr	tr^2	$\dots$	tr^{n-1}
e	e	r		r^{n-1}					
r	r	r^2		e					
$\vdots$				$\vdots$					
r^{n-1}	r^{n-1}	e		r^{n-1}					
t					e				
tr						e			
tr^2							e		
$\vdots$								$\ddots$	
tr^{n-1}									e

$\boxed{\begin{aligned} r^n &= e \\ t^2 &= e \\ rt &= tr^{n-1} \end{aligned}}$

(H) Klein-csoport $\cong D_2$

(P) Stringek konkatenálása $\Rightarrow$ egységelemes félcsoport
• egységelem: "" (üres string)

(P2) Str. konk. + Aa, Bb, aA, ... kiejtik egymást

$aBbA = aA = ""$

$(aB)^{-1} = bA$

Ez egy szabad csoport = F (free)

Buborék-algoritmus (bubble sort):

$\begin{bmatrix} \vdots \\ r \\ t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vdots \\ t \\ r^2 \end{bmatrix}$ (a t, mint egy buborék, feljebb lebegett)

$\ldots tt \Rightarrow \ldots \cancel{tt}$ (kiejtik egymást)

Tétel: ilyen algoritmust nem minden csoport esetén lehet felírni. (?)

Végtelen elemű csoport:

$aa = e$
$bb = e$
$cc = e$
$abcabc = e$

(ism)

$H < G$
aH
$|aH| = |H|$
$G:H \Rightarrow$ a H részcsoport indexe $= \frac{|G|}{|H|}$

(M) egységelem: önmagában csoportot alkot

(M) $e + t \Rightarrow$ kételemű részcsoport

$e + tr \Rightarrow$ — " — — " —

$e + tr^2 \Rightarrow$ — " — — " —

$\sim C_2$	e	t
e	e	t
t	t	e

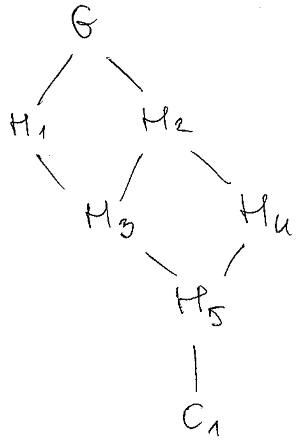
$\sim C_2$	e	tr
e	e	tr
tr	tr	e

$\sim C_2$	e	tr^2
e	e	tr^2
tr^2	tr^2	e

$\sim C_2$ = izomorf a C_2-vel

(M) $e + r + r^2 \sim C_3$ (3elemű részcsoport)

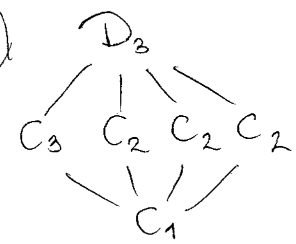
Részcsoport-struktúra:



(H_2 részcsoportja G-nek, H_5 részcsoportja H_3-nak és H_4-nek, a C_1 (egységelem) részcsoportja az összes felette levőnek, stb)

$\Rightarrow$ ez egy háló

(P)



Mellékosztályok: C_3 mellékosztályai? (ez normálosztó)

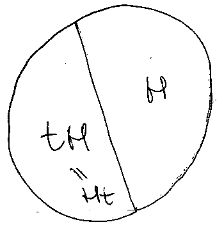
$H = \{e, r, r^2\}$

$rH = \{re, rr, rr^2\} = \{r, r^2, e\} = H$

$t \cdot H = \{te, tr, tr^2\}$

$(tr)H = \{tre, trr, trr^2\} = \{tr, tr^2, t\} = tH$

$Ht = \{et, rt, r^2t\} = \{t, tr^2, tr\}$



C_2 mellékosztályai? (ez nem normálosztó)

$H = \{e, t\}$

$rH = \{re, rt\} = \{r, tr^2\}$

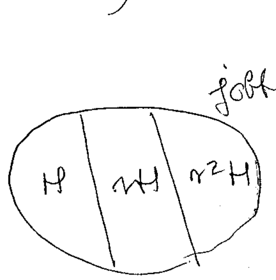
$(tr^2)H = \{tr^2e, tr^2t\} = \{tr^2, r\}$

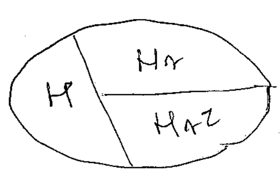
$r^2H = \{r^2e, r^2t\} = \{r^2, tr^2\}$

$Hr = \{er, tr\} = \{r, tr\} \neq rH$

$Hr^2 = \{er^2, tr^2\} = \{r^2, tr^2\} \neq r^2H$

jobboldali mellékosztályok





baloldali mellékosztályok

Invariáns részcsoport / normális részcsoport / normálosztó:

$G: \quad N < G \qquad \forall a \in G: aN = Na$

Jelölés: $N \triangleleft G$

$aN = \{an : n \in N\}$

$Na = \{na : n \in N\}$

$aN = Na$ formálisan:

$\forall a \in G: \forall n_1 \in N \quad \exists n_2 \in N: \quad an_1 = n_2 a$

$an_1a^{-1} = n_2$

$\forall a \in G: \forall n \in N: \quad ana^{-1} \in N$

$aNa^{-1} \subset N$

$ana^{-1} \Rightarrow$ ennek a műveletnek a neve: konjugálás

(nem összekeverendő a komplex konjugálttal)

Konjugálás:

$G \ni g: \quad g' = hgh^{-1}$

M) ha a csoport kommutatív: $g' = hgh^{-1} = (hh^{-1})g = g \to g' = g$

Tehát a konjugálásnak nemkommutatív csoportokban van jelentősége.

$\exists h \in G: g' = hgh^{-1}: \quad g' \sim g$ (jelölés)

- reflexív: $g \sim g: \quad g = ege^{-1}$
- szimmetrikus: $g' \sim g \Rightarrow g \sim g'$

B) $h^{-1}g'h = h^{-1}(hgh^{-1})h = (h^{-1}h)g(h^{-1}h) = ege = g$

$h^{-1}g'(h^{-1})^{-1} = g$

- tranzitív: $g_2 \sim g_1 \wedge g_3 \sim g_2 \Rightarrow g_3 \sim g_1$ B) $\to$

(B) $g_2 = h_1 g_1 h_1^{-1} \qquad g_3 = h_2 g_2 h_2^{-1}$

$$g_3 = h_2 (h_1 g_1 h_1^{-1}) h_2^{-1} = (h_2 h_1) g_1 (h_1^{-1} h_2^{-1}) = h_3 g_1 h_3^{-1}$$

(M) $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = e$

(M) Konjugált osztályok jelölése: C

$$C(r) = \{ere^{-1};\ rrr^{-1};\ r^2 r (r^2)^{-1},\ trt^{-1},\ (tr)r(tr)^{-1},\ (tr^2) r (tr^2)^{-1}\} =$$

$$= \{ere,\ rrr^2,\ r^2rr,\ trt,\ trrtr,\ tr^2rtr^2\} =$$

$$= \{r, r, r, r^2, r^2, r^2\} = \{r, r^2\}$$

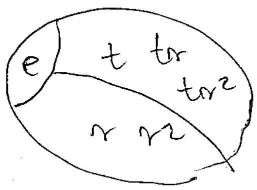
$$C(t) = \{ete^{-1},\ rtr^{-1},\ r^2 t (r^2)^{-1},\ ttt^{-1},\ (tr)t(tr)^{-1},\ (tr^2)t(tr^2)^{-1}\} =$$

$$= \{ete,\ rtr^2,\ r^2tr,\ ttt,\ trttr,\ tr^2ttr^2\} =$$

$$= \{t, tr, tr^2, t, tr^2, tr\} = \{t, tr, tr^2\}$$

$$C(e) = \{eee^{-1}\} = \{e\}$$

Konjugált osztályok:



$$D_3 = \{e\} \cup \{r, r^2\} \cup \{t, tr, tr^2\}$$

(Hf: ugyanezt felírni D_5-re)

$$D_5 = \{e\} \cup \{r, r^4\} \cup \{r^2, r^3\} \cup \{t, tr, tr^2, tr^3, tr^4\}$$

$|D_3| = 6 \qquad K = 3$ (3 konjugált osztályból áll)

$|D_5| = 10 \qquad K = 4$

$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$

$10 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2.$

10.16.

n-ed rendű szimmetrikus csoport: S_n (permutációs csoport)

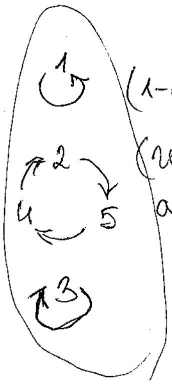
$|S_n| = n!$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&5&1\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&3&2&4\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&2&4&1\end{pmatrix}$$

Permutációk szorzata

ennek az inverze

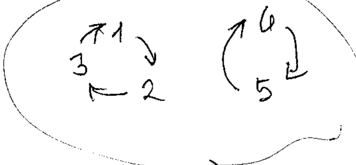
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&4&2\end{pmatrix}$$



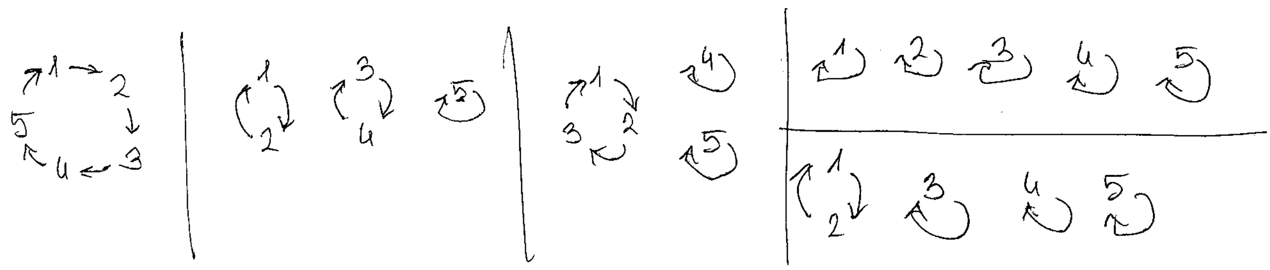
(1-es átment az egyesbe)

(2es ~~átment~~ az 5-ösbe, az 5-ös a 4-esbe, stb.)

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{pmatrix} \longrightarrow \text{kommutáló permutációk}$$



A halmazt felosztjuk valahogy, és a részhalmazokat permutáljuk

Szorzástábla: $5! \times 5! = 120 \times 120$

A fenti példánál 7-féleképpen tudjuk felosztani a halmazt.

3 elemmel: $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\ & & \end{pmatrix}$

Két elem felcserélése: transzpozíció

Bármelyik permutáció felírható transzpozíciók szorzataként

Egységelem: nulla darab csere (páros csere)

Alternáló csoport: A_n

$A_n < S_n$ (S_n páros permutációi)

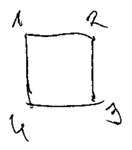
$|A_n| = \frac{n!}{2}$

Fontos: A_5 (S_5 páros permutációi)

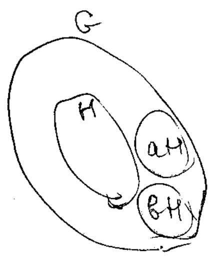
- köze van az ikozaéder szimmetriáihoz
- Abel ezzel (mint később kiderült; akkor még nem volt csop. e.) bizonyította, hogy az 5. fokú egyenleteknek nincs megoldóképlete

  Mert: A_5-nek nincs invariáns részcsoportja

(T) ∀ csoport előáll egy permutációcsoport részcsoportjaként



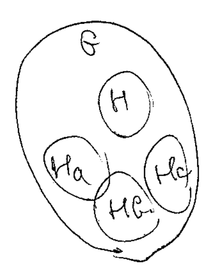
$\to A_4 \to \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ (tükrözés) $\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$ (ilyen pl. nincs!)



$H < G$

$\forall h_1, h_2 \in H$

$h_1 h_2^{-1} \in H$



$N < G$

$\forall a \in G: \ aN = Na$

N normális részcsoport

$$\left.\begin{array}{l} \forall n_1 \in N : \exists n_2 \in N : \ a n_1 = n_2 a \\ \forall n \in N : \ n' = a n a^{-1} \in N \end{array}\right\} N \triangleleft G$$

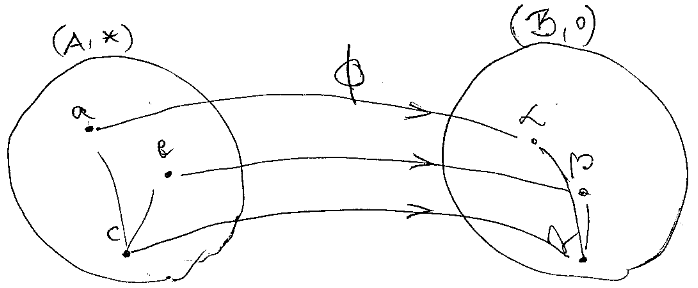
(N invariáns részcs.ja G-nek)

Homomorfizmus:

(két algebrai struktúra:)

(hasonló)
homomorfizmus: $\nexists \phi^{-1}$

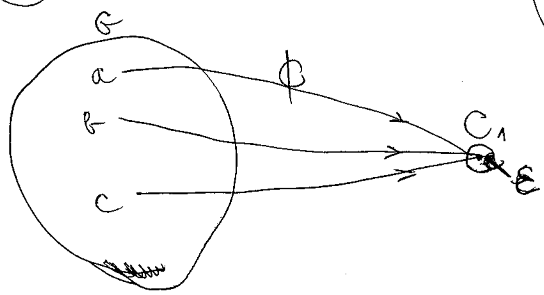
izomorfizmus: $\exists \phi^{-1}$
(azonos)
(pl. logaritmus)



$c = a * b$ $\qquad$ $\gamma = \alpha \circ \beta$

$$\phi(c) = \phi(a*b) = \alpha \circ \beta = \phi(a) \circ \phi(b)$$

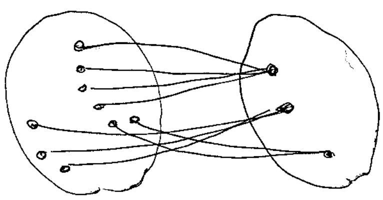
(P) Triviális homomorfizmus:
(Vkez egységelemet rendelek)

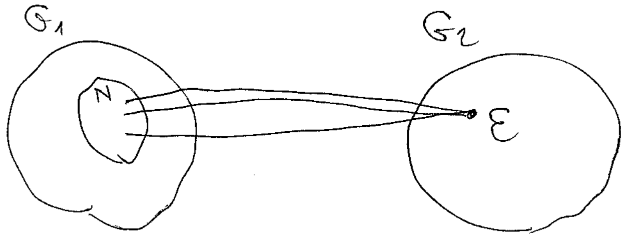


$a \in G$

$\phi(a) = \varepsilon$

Ha nem invertálható:





N: ősképe, (az egységelem ősképe) a homomorfizmus magja

$a \in N \subseteq G$

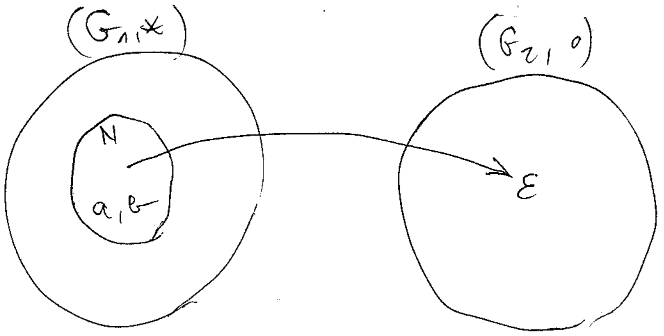
$\phi(a) = \varepsilon$

$N = \mathrm{Ker}\,\phi$

N: nemcsak részhalmaz, hanem részcsoport is

Bizonyítás: ↳

(B)



$\phi(a * b) = \phi(a) \circ \phi(b)$

$\varepsilon \circ \alpha = \alpha$

$b * b^{-1} = e$

$\phi(b * b^{-1}) = \phi(e) = \varepsilon$

$N = \mathrm{Ker}\,\phi \qquad \phi(a) = \varepsilon\,;\ \phi(b) = \varepsilon$

$$\phi(a * b^{-1}) = \underset{\varepsilon}{\underset{\parallel}{\phi(a)}} \circ \underset{\varepsilon}{\underset{\parallel}{\phi(b^{-1})}} = \varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon$$

$a \in \mathrm{Ker}\,\phi \ \wedge\ b \in \mathrm{Ker}\,\phi \implies a * b^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\phi$

$\mathrm{Ker}\,\phi < G$

N invariáns részcsoport is.

(B) $n \in \mathrm{Ker}\,\phi \qquad \phi(n) = \varepsilon$

$a \in G$

$n' = a * n * a^{-1}$

$$\phi(n') = \phi(a * n * a^{-1}) = \phi(a) \circ \phi(n) \circ \phi(a^{-1}) =$$

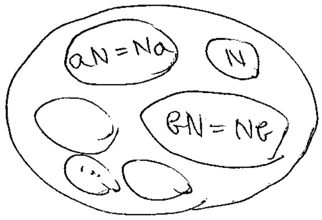
$$= \phi(a) \circ \phi(a^{-1}) = \phi(a * a^{-1}) = \phi(e) = \varepsilon$$

$n' \in \mathrm{Ker}\,\phi$

$N \lhd G \qquad \mathrm{Ker}\,\phi \lhd G$

Ez triviális. De miért?

$N \lhd G$



$K_1 \subseteq G\ ;\ K_2 \subseteq G$

$K_1 K_2 = \{ k_1 k_2 \mid k_1 \in K_1\ ;\ k_2 \in K_2 \}$

(komplexus szorzás)

$(aN)(bN)$ (→ komplexus sz.)

$(an_1)(bn_2) = (an_1)(n_3 b) = a(n_1 n_3)b = a(n_4)b = a(n_4 b) =$

$= a(bn_5) = (ab)n_5 \in (ab)N$

$(aN)(bN) = (ab)N$

$(eN)(bN) = bN$

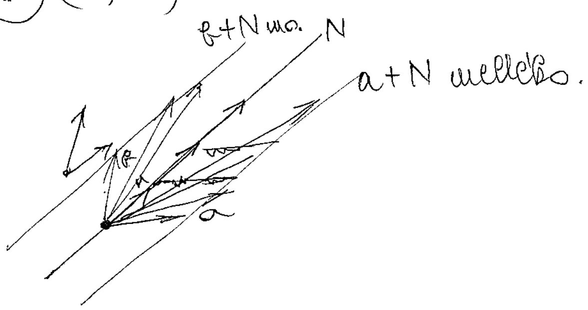
$(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = N$

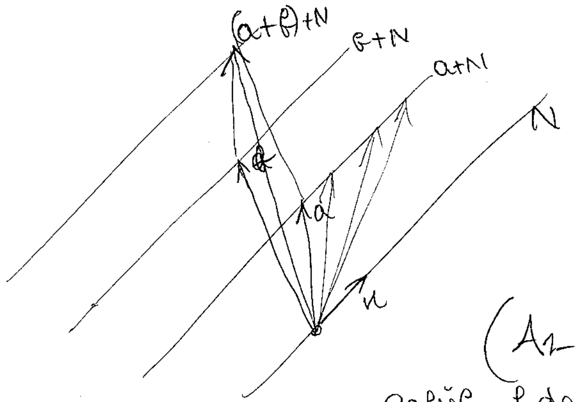
a mellékosztályok a komplexus szorzásra nézve csoportot alkotnak: G/N

G/N : a G csoport N invariáns szerinti faktorcsoportja

$$|G/N| = \frac{|G|}{|N|}$$

P) $(V, +)$

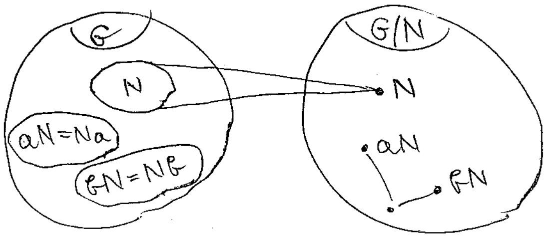




(Az egyenesen bárhova mutathat!) (a vektor)

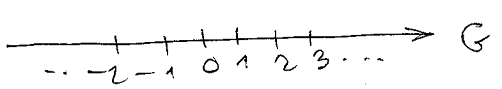
$(a+N) + (b+N) = (a+b)+N$

Faktorcsoport: „a mellékosztályok pontok lesznek"

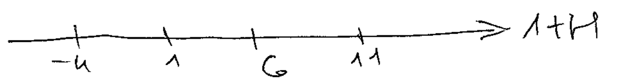


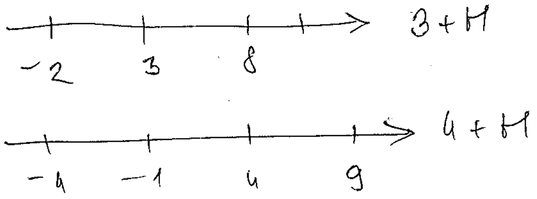
Pl: térnek faktorcsoportja a sík (a vektorokat a síkra vetítjük)

P) $(\mathbb{Z}, +) = G$



disjunkt mellékosztályok





(Két mellékosztály összege egy újabb mellékosztály)

$H \ni h = 5 \cdot k$

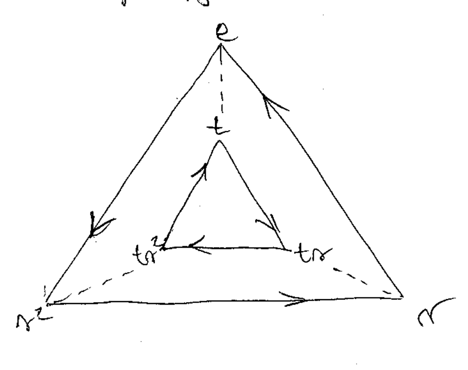
$$\left.\begin{array}{l} 2+H \ni 2+5k \\ 4+H \ni 4+5l \end{array}\right\} 2+4+5k+5l = 6+5(k+l) = 1+5(1+k+l)$$

C_5	H	$1+H$	$2+H$	$3+H$	$4+H$
H	H	$1+H$	$2+H$	$3+H$	$4+H$
$1+H$	$1+H$	$2+H$	$3+H$	$4+H$	H
$2+H$	$2+H$	$3+H$	$4+H$	H	$1+H$
$3+H$	$3+H$	$4+H$	H	$1+H$	$2+H$
$4+H$	$4+H$	H	$1+H$	$2+H$	$3+H$

$a+b \equiv c \mod 5$

C_5	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

D_3 gráfja:

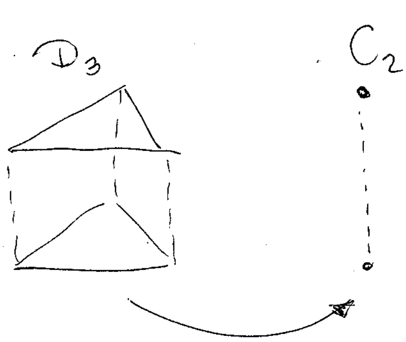


$r^2 = e$

$t^2 = e$

$rt = tr^2$

a rotációkkal nem törődünk, csak a tükrözésekkel



„összehúzzuk"

$C_3 \triangleleft D_3$

$D_3 / C_3 \sim C_2$

(M) Ha a tükrözéssel nem törődünk, és a két háromszöget húzzuk össze, akkor az ellentétes irányú vonalak kioltják egymást $\Rightarrow$ csak a triviális csoport marad: $\{e\}$

$\boxed{11.06.}$

Csoportok direkt szorzása

- bonyolultabb csoportok felépítésének egyik módszere

$(G_1, *) \to e, a, b$

$(G_2, \circ) \to \varepsilon, \alpha, \beta$

$G = G_1 \times G_2 \Rightarrow (a, \alpha)$

$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (a * b, \alpha \circ \beta)$

egységelem: (e, ε)

$$(e, \varepsilon) \cdot (a, \alpha) = (e * a, \varepsilon \circ \alpha) = (a, \alpha)$$

inverz: (a^{-1}, α^{-1})

$$(a^{-1}, \alpha^{-1}) \cdot (a, \alpha) = (a^{-1} * a, \alpha^{-1} \circ \alpha) = (e, \varepsilon)$$

$\Rightarrow$ csoportot alkotnak

jelölés: $G = G_1 \otimes G_2$

(M) A lineáris terek direkt összege ($\oplus$) megfeleltethető a csoportok direkt szorzásának. A lin. terek direkt szorzata a halmazokétól teljesen különböző.

Lusta fizikus jelölés:

$(a\alpha)(b\beta) = (ab)(\alpha\beta)$

$\varepsilon \ \alpha \ \beta \to G_2$

mátrix alakban:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & \varepsilon & \alpha & \beta \\
\hline
e & (e,\varepsilon) & (e,\alpha) & (e,\beta) \\
a & (a,\varepsilon) & (a,\alpha) & (a,\beta) \\
b & (b,\varepsilon) & (b,\alpha) & (b,\beta) \\
\vdots & (c,\varepsilon) & & \\
G_1 & & &
\end{array}$$

$H_2 \cong G_2$

H_1 részcsoport $\overset{\text{izomorf}}{\cong} G_1$

(M) A H_1 és H_2 részcsoporton belüli (egymással) szorzatok zártak.

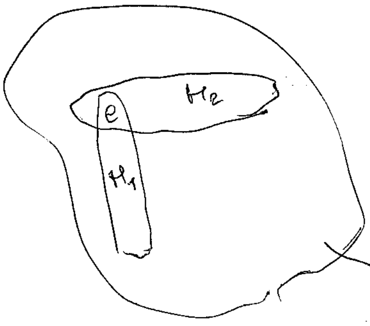
$H_1 \triangleleft G$ $\qquad\qquad$ $G/H_1 \simeq G_2$ ← (G H_1 szerinti faktorcsoportja izomorf a G_2-vel)

$H_2 \triangleleft G$ $\qquad\qquad$ $G/H_2 \simeq G_1$

↑ normálosztó

Fordítva:

- valamilyen csoport
- H_1 és H_2 kommutálnak
- H_1 és H_2 egy-egy elemének szorzataként felírható az összes elem
- ekkor elég csak H_1-et és H_2-t vizsgálni



⟹ nem egyszerű csoport

(D) egyszerű csoport: amely nem bontható ilyen "szorzatos alakban"

↓

~~Végtelen~~ Véges sok végtelen elemű halmazt alkotnak az egyszerű csoportok. Ezen kívül is vannak még egyszerű csoportok = kivételes csoportok (pl. monster group)

$\hat{F}: V^n \to V^n$ (forgatás)

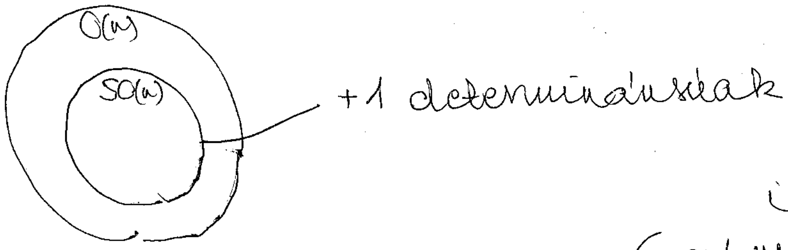
$\tilde{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}}^{-1}$

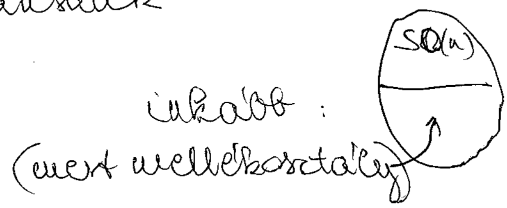
$\tilde{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}}$ → ez csoportképző tulajdonság:

$\tilde{F}_1 F_1 = 1 \qquad \tilde{F}_2 F_2 = 1$

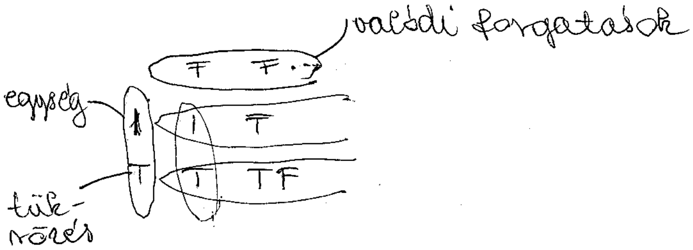
$F_3 = F_2 F_1 \qquad \tilde{F}_3 F_3 = 1 \qquad (\det \underline{\underline{F}})^2 = 1$

$\underline{\underline{T}}$ mátrixok halmaza: $O(n)$ $\rightarrow$ $(\det T)^2 = 1$





$$O(n) = SO(n) \otimes C_2$$



Kérdés: $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \rightarrow \det = -1$$

$\hookrightarrow \lambda_1 = 1 \,;\, \lambda_2 = -1$ (sajátértékei)

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi - 1 & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi - 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\varphi = \cos\left(2 \cdot \frac{\varphi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

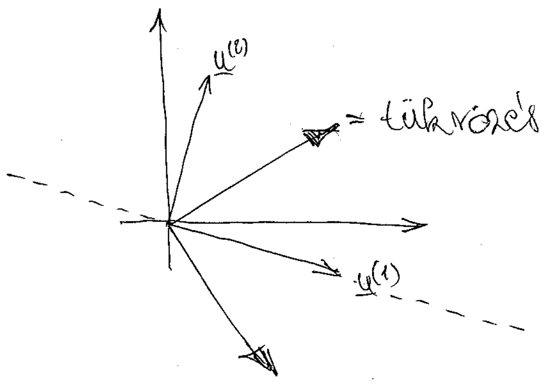
$$\cos\varphi - 1 = \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$-\cos\varphi - 1 = -2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -2\sin^2(\frac{\varphi}{2}) & -2\sin(\frac{\varphi}{2})\cos(\frac{\varphi}{2}) \\ -2\sin(\frac{\varphi}{2})\cos(\frac{\varphi}{2}) & -2\cos^2(\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sin(\frac{\varphi}{2})\cos(\frac{\varphi}{2}) \\ -2\sin^2(\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cos(\frac{\varphi}{2}) \\ -\sin(\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} = \underline{u}^{(1)}$$

$$\lambda_2 = -1 : \quad \underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\varphi}{2}) \\ \cos(\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \\ v_3 \end{bmatrix} \to \text{permutáció}$$

$$\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_1 \end{bmatrix} \to \text{szintén}$$

M Ha a két mátrixot egymás után hattatjuk, a két permutáció egymás után „végrehajtódik"

M Ezek a mátrixok permutációcsoportot? alkotnak: S_3

3! = 6 permutáció (3! db mátrix)

→ homomorfizmus a permutációcsoportok és az ilyen alakú mátrixok között

M ábrázolás: ahol a homomorfizmusnál a alcsoportok mátrixok.

Tehát ez a perm. csoportok mátrixábrázolása.

M ∀ csoportnak van ilyen ábrázolása = reguláris ábrázolás

$$\begin{array}{c|cccc} & e & a & b & c \\ \hline e & & & & \\ a & a & c & d & b \\ b & & & & \\ c & & & & \end{array}$$

ennek megfeleltethető egy mátrix, amely ezt a permutációt valósítja meg

Probléma: ez az ábrázolás túl nagy mátrixokat eredményez. → a gyakorlatban nem lehet jól használni

↓

Hogy lehet ezt „gazdaságosan" megoldani?

+ keressük az összes ábrázolást

$$G \ni g \longmapsto \hat{D}(g) : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$$

(keressük ezt a leképezést...)

Darstellung = ábrázolás

$$g_1 \longmapsto \hat{D}(g_1)$$
$$g_2 \longmapsto \hat{D}(g_2)$$
$$g_3 = g_2 g_1 \longmapsto \hat{D}(g_3) = \hat{D}(g_2)\hat{D}(g_1)$$

$$\hat{D}(g_2 g_1) = \hat{D}(g_2)\hat{D}(g_1)$$

(keresztszorzat)

$$\underline{\underline{D}}(g_2 g_1) = \underline{\underline{D}}(g_2)\underline{\underline{D}}(g_1)$$

$g \longmapsto \boxed{1}$ → triviális ábrázolás:

∀ csoportelemhez 1-et rendelünk

(∀ csoportnak ∃ triv. ábr.)

$g \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$ → szintén triv. ábr.

Keressük az összes ábrázolást! (*)

$$g \mapsto \underline{\underline{D}}(g) \qquad \underline{\underline{D}}(g_2 g_1) = \underline{\underline{D}}(g_2)\,\underline{\underline{D}}(g_1)$$

↳ tfh. van egy ábrázolásunk, ebből megalkotható: (lemásolható)

$$g \mapsto \underline{\underline{D}}'(g) = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{D}}(g)\,\underline{\underline{R}}^{-1}$$

Ha két mátrixábrázolásnak ugyanaz a spurja ($\mathrm{Sp}D = \mathrm{Sp}D'$), akkor az egyik a másiknak a „másolata" „megegyeznek". → ekvivalens ábrázolások

$$D'(g_2)D'(g_1) = \left(RD(g_2)R^{-1}\right)\left(RD(g_1)R^{-1}\right) =$$

$$= RD(g_2)\left(R^{-1}R\right)D(g_1)R^{-1} = R\left(D(g_2)D(g_1)\right)R^{-1} =$$

$$= RD(g_2 g_1)R^{-1} = D'(g_2 g_1) \Rightarrow D' \sim D \quad \text{(ekvivalensek)}$$

Egy ábrázolásból végtelen másik ekvivalens ábrázolás alkotható.

Emiatt: (*) Keressük az összes NEM ekvivalens ábrázolást!

$$G \ni g \mapsto \underline{\underline{D}}^{(1)}(g) = \quad 2\times 2\text{-es}$$

$$\mapsto \underline{\underline{D}}^{(2)}(g) = 3\times 3\text{-as}$$

Ebből a kettőből létrehozható egy 5×5-ös blokkdiagonális m.:

$$D(g) = \begin{bmatrix} D^{(1)}(g) & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & D^{(2)}(g) \end{bmatrix} \qquad D(g) = \begin{bmatrix} \square & \square & 0 & 0 & 0 \\ \square & \square & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$D(g_2)D(g_1) = \left[\begin{array}{c|c} D^{(1)}(g_2) & \\ \hline & D^{(2)}(g_2) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} D^{(1)}(g_1) & \\ \hline & D^{(2)}(g_1) \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} D^{(1)}(g_2)D^{(1)}(g_1) & 0 \\ \hline 0 & D^{(2)}(g_2)D^{(2)}(g_1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} D^{(1)}(g_2g_1) & \\ \hline & D^{(2)}(g_2g_1) \end{array}\right] =$$

$= D(g_2g_1)$ → tehát ez is ábrázolás

$D = D^{(1)} \oplus D^{(2)}$ → ez a mátrixok direkt összege

$$\underline{\underline{R}} \cdot \left[\begin{array}{cc|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \underline{\underline{R}}^{-1}$$ → ezen nem látszik, hogy blokkdiagonális

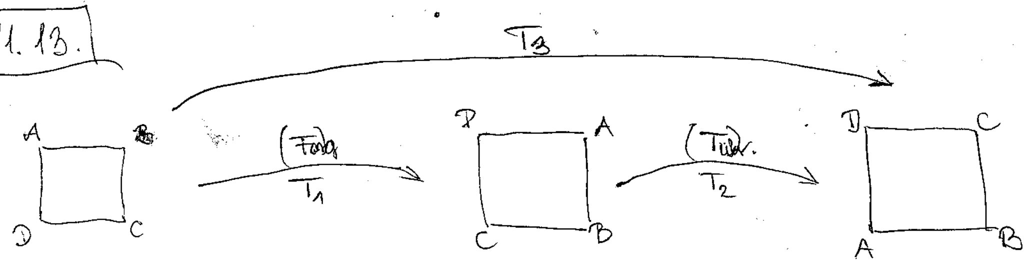
Emiatt: csak azokat az ábrázolásokat keressük, amelyek már nem szedhetők szét ilyen blokkokra**

(D) Redukálhatatlan (= irreducibilis) ábrázolás: nem bontható szét kisebb blokkokra

(D) Redukálható (= reducibilis): szétszedhető

** Megadható: Minden csoportnak véges sok inekvivalens és irreducibilis ábrázolása van.

11.13.



$$x' = T_1 x$$

$$x'' = T_2 x' = T_2 (T_1 x)$$

$$x'' = T_3 x \qquad\qquad T_3 = T_2 T_1$$

(P) Mérési eredmények (ez egy n komponensű vektor)

$$\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \vdots\\ \xi_n\end{matrix} \xrightarrow{\underline{\underline{S}}(T_1)} \begin{matrix}\xi'_1\\ \xi'_2\\ \xi'_3\\ \vdots\\ \xi'_n\end{matrix} \xrightarrow{\underline{\underline{S}}(T_2)} \begin{matrix}\xi''_1\\ \xi''_2\\ \vdots\\ \xi''_n\end{matrix}$$

transzf. utáni mérési eredmények →

újabb tr. →

(mit csinált velük a tr.?)

$$\underline{\xi}' = \underline{\underline{S}}(T_1)\,\underline{\xi}$$

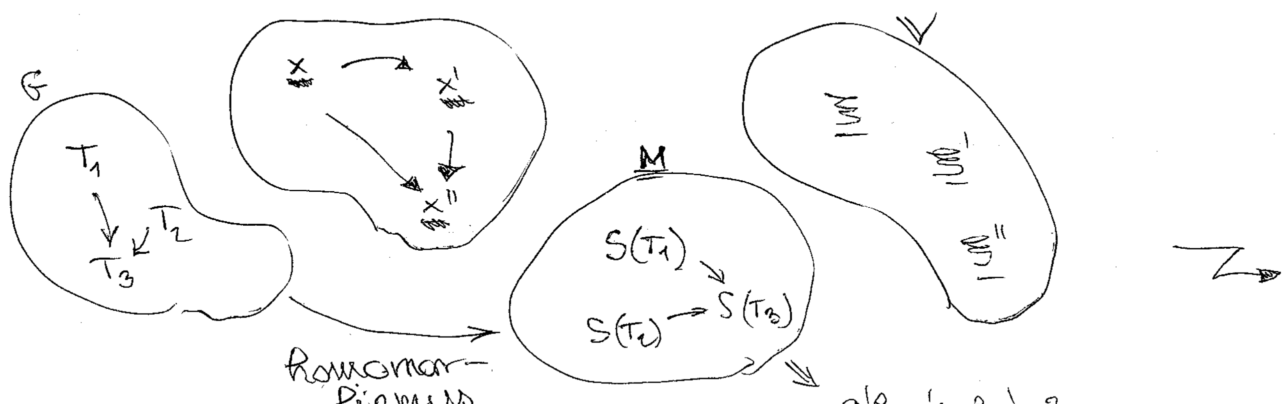
$$\underline{\xi}'' = \underline{\underline{S}}(T_2)\,\underline{\xi}'$$

$$\underline{\xi}'' = \underline{\underline{S}}(T_3)\,\underline{\xi}$$

$$\underline{\xi}'' = \underline{\underline{S}}(T_2)\left(\underline{\underline{S}}(T_1)\,\underline{\xi}\right) = \left(\underline{\underline{S}}(T_2)\,\underline{\underline{S}}(T_1)\right)\underline{\xi}$$

$$\underline{\underline{S}}(T_3) = \left(\underline{\underline{S}}(T_2)\,\underline{\underline{S}}(T_1)\right) \longrightarrow$$ vektortól függetlenül igaz

$$\underline{\underline{S}}(T_2 T_1) = \underline{\underline{S}}(T_2)\,\underline{\underline{S}}(T_1)$$



7. Az ábrázoláselmélet alaptétele:

A fizikai rendszer ...

Röviden: a szimmetriák ábrázolódnak

Invariáns mennyiségek:

pl. forgatásnál a vektor hossza

Kovariáns mennyiségek

pl.

M Skalár: az adott ábrázolásra triviális ...?

Az adott szimmetriacsoport triviális ábrázolásaként transzformálódik.

Pl: [1] → forgatásra invariáns

$$G \ni g \longmapsto \hat{D}(g) : V \to V$$
$$\downarrow$$
$$\underline{\underline{D}}(g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$\hat{D}(g_2 g_1) = \hat{D}(g_2)\hat{D}(g_1)$ ← (operátorok szorzása)

$\underline{\underline{D}}(g_2 g_1) = \underline{\underline{D}}(g_2)\underline{\underline{D}}(g_1)$ ← mátrixszorzás

Ábrázolás = a csoportelemhez operátort rendelünk

Ha $g \nearrow D^{(1)}(g)$, $g \searrow D^{(2)}(g)$ $\Longrightarrow$ $\begin{bmatrix} D^{(1)}g & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{bmatrix}$ → ez az új ábrázolás a két eredeti direkt összege:

$D = D^{(1)} \oplus D^{(2)}$

$\underline{R}\,\underline{D}\,\underline{R}^{-1}$ → nem látszik, hogy blokkdiag.

$$\begin{bmatrix} \ & \ & 0 & 0 & 0 \\ \ & \ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ & \ & \ \\ 0 & 0 & \ & \ & \ \\ 0 & 0 & \ & \ & \ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

← De így ki lehet választani

Az ötdim. lin. térben ezek a vektorok kétdim. alteret alkotnak. Ezek a vektorok invariánsak erre a transzf.-ra. Nem megyünk ki az altérből. ⇒ invariáns altér

(P) $[z \text{ tengely körüli forg.}] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{bmatrix}$

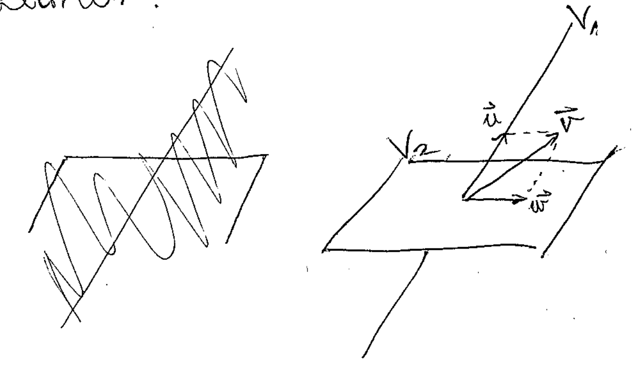
* Spec: sajátvektor → sajátaltér

(P) $[z \text{ teng. k. forg.}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{bmatrix}$

↳ Két invariáns altérből tevődik össze

(M) Bármilyen forgatásnál invariáns a forgástengely és az arra merőleges sík.

Vektortér:



(Á) Minden vektor előállítható az egyik + a másik altérbe tartozó vektor összegeként (egyértelmű a felírás)

$$V = V_1 \oplus V_2$$

$$\forall V \ni \vec{v} : \exists \vec{u} \in V_1, \vec{w} \in V_2 : \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$$

Euklideszi vektortérben érdemes úgy keresni a V_1-et, hogy ~~annak~~ az $\perp$ legyen V_2 minden vektorára.
(~~vagy~~ itt van skalárszorzat)

(V_1 a V_2-nek a kiegészítő altere)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{bmatrix}}_{} = 0 \quad \text{(merőlegesek)}$$

ortogonális kiegészítő alterek ≡ ortokomplementer

$V > V_2 \qquad V_1 = V_2^{\perp}$

$V = V_2 \oplus V_2^{\perp}$

Lehet-e egy ilyen blokkdiag. mátrixot diagonális alakra hozni főtengelytr.-val? Nem, ez itt csoportelmélet,
$\Downarrow$
Az összes (adott csoportot ábrázoló) mátrixot egyszerre kellene diagonalizálni.

$$\begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aA & & \\ & bB & \\ & & cC \end{bmatrix}$$

$G \ni g \mapsto \underline{\underline{D}}(g) : V \to V$

$V_1 < V \qquad \underline{v} \in V_1$

$\underline{\underline{D}}(g)\,\underline{v} \in V_1 \quad : \forall g \in G,\ \forall \underline{v} \in V_1$

ekkor V_1 egy invariáns altér

Nullvektor: mindig invariáns altér.
V vektortér önmagának inv. altere
} triviális

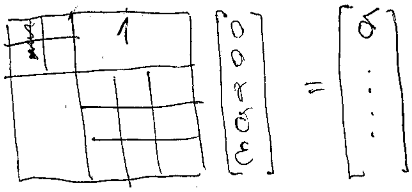
Ha $\nexists$ nemtriviális invariáns altér $\Rightarrow$ az ábrázolás irreducibilis.
Ha $\exists$ nemtriv. inv. alt. $\Rightarrow$ reducibilis ábrázolás

Ha ennek a kiegészítő altere is invariáns altér, akkor az ábrázolás teljesen reducibilis

Ezek bázistól (reprezentációtól) független állítások, tehát:

$$\vec{v} \in V_1 < V_*$$

$$\hat{D}(g)\,\vec{v} \in V_1$$

Ha:  → (csak az egyik altér invariáns) nem invariáns a kiegészítő altér

Reducibilis, de nem teljesen reducibilis. ??

(M) Véges csoportok esetén ami reducibilis, az teljesen reducibilis, végteleneknél ez nem teljesül.

(M) Kompakt végtelen csoport pl. 3dim forgatások

Nem kompakt végtelen cs. pl: Lorentz-csoport

Emiatt: Keressük az összes véges csoport összes irreducibilis ábrázolását. ?

$\boxed{11.\ 20.}$

Hermitikus skaláris szorzás: $\underline{a}^+ \underline{b}$

$$\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{c}$$

$$(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b})^+ = \alpha^* \underline{a}^+ + \beta^* \underline{b}^+$$

Ez a skalárszorzat NEM szimmetrikus! $(\underline{a}^+ \underline{b}) = (\underline{b}^+ \underline{a})^*$

Diadikus szorzás: $\underline{a}\, \underline{b}^+$

Fontos jelölés:

- oszlopvektornak megfelelő: $|a\rangle$ $\left(\equiv \underline{a} = [\,] \right)$
- sorvektornak —"— : $\langle a|$
- skalárszorzat: $\langle a|b\rangle$ • diadikus szorzat: $|a\rangle\langle b|$

bra: $\langle\,|$ ket: $|\,\rangle$ bracket: $\langle\,|\,\rangle$

$$V \ni |a\rangle$$

$$\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle = |\alpha a + \beta b\rangle$$

$$\alpha^*\langle a| + \beta^*\langle b| = \langle \alpha a + \beta b|$$

$$\langle b|\alpha a\rangle = \alpha\langle b|a\rangle$$

$$\langle \beta b|a\rangle = \beta^*\langle b|a\rangle$$

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$$

$$(\vec{a}\circ\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$$

$$\left(|a\rangle\langle b|\right)|c\rangle = |a\rangle\langle b|c\rangle$$

$$\langle e^{(k)}|e^{(l)}\rangle = \delta_{kl}$$

$$|a\rangle = \sum_k \alpha_k |e^{(k)}\rangle$$

$$\langle e^{(l)}|a\rangle = \sum_k \alpha_k \langle e^{(l)}|e^{(k)}\rangle = \sum_k \alpha_k \delta_{kl} = \alpha_l$$

$$\alpha_k = \langle e^{(k)}|a\rangle$$

$$|a\rangle = \sum_k \alpha_k |e^{(k)}\rangle = \sum_k |e^{(k)}\rangle\langle e^{(k)}|a\rangle = \overbrace{\sum_k \left(|e^{(k)}\rangle\langle e^{(k)}|\right)}^{\mathbb{1}}|a\rangle$$

$$|u\rangle = \hat{A}\,|v\rangle$$

$$A_{kl} = \langle e^{(k)}|\,\hat{A}\,|e^{(l)}\rangle \quad = \text{szendvics} \qquad \boxed{\quad\quad}\left(\boxed{\quad}\boxed{\,}\right)$$

$$\boxed{\;a\;}\,\boxed{A}\,\boxed{b} = c \in \mathbb{C}$$

$$\left(\boxed{\;\;a\;\;}\,\boxed{\;A\;}\,\boxed{b}\right)^{+} = \boxed{\;\;b\;\;}^{+}\,\boxed{A^{+}}\,\boxed{a}$$

$$\boxed{\langle u|\,\hat{A}\,|v\rangle = \langle v|\,\hat{A}^{+}\,|u\rangle^{*}}$$

$\mathbb{R}$:

$\hat{H}^{+} = \hat{H}$: önadjungált / hermitikus (szimmetrikus)

$\hat{A}^{+} = -\hat{A}$: antihermitikus (antiszimmetrikus)

$\hat{U}^{+} = \hat{U}^{-1}$: unitér (ortogonális)

$$|a'\rangle = \hat{U}|a\rangle$$

$$|b'\rangle = \hat{U}|b\rangle$$

$$\langle a'| = \langle a|\hat{U}^{+}$$

$$\langle a'|b'\rangle = \left(\langle a|\hat{U}^{+}\right)\hat{U}|b\rangle =$$

$$= \langle a|\underbrace{\hat{U}^{+}\hat{U}}_{\uparrow}|b\rangle = \langle a|b\rangle$$

⇒ Az unitér transzf. nem változtatja meg a skalárszorzat eredményét

$$G \ni g \longmapsto \hat{D}(g) : V \to V$$

$$|v\rangle \longmapsto |v'\rangle = \hat{D}(g)|v\rangle$$

$$\forall\, g_1, g_2 \in G : \quad \hat{D}(g_1 g_2) = \hat{D}(g_1)\hat{D}(g_2)$$

(D) Hű ábrázolás = nem csak homomorfizmus, hanem izomorfizmus is.

$V > U$

(D) U akkor invariáns altér, ha:

$\forall |u\rangle \in U < V$

$\forall g \in G \quad \hat{D}(g)|u\rangle \in U$

Ortogonális kiegészítő alterek

$V = U \oplus W$

$U < V \qquad W < V$

$\forall |v\rangle \in V \qquad |v\rangle = |u\rangle + |w\rangle$

$|u\rangle \in U \qquad |w\rangle \in W$

$\langle u|w\rangle = 0$

$W = U^{\perp}$

$\hat{D}(g) \qquad |w\rangle \in W$

$|w'\rangle = \hat{D}(g)|w\rangle$

$|u\rangle \in U$

(M) ennek eredménye egy komplex szám

$\langle u|w'\rangle = \langle u|\hat{D}(g)|w\rangle^*$

$\langle w|\hat{D}^+(g)|u\rangle = \rightarrow$ tfh. $\hat{D}$ unitér $\rightarrow \quad = \langle w|\hat{D}(g)^{-1}|u\rangle =$

(M) $\hat{D}(e) = 1$ és $\hat{D}(g^{-1}) = \hat{D}(g)^{-1}$ $\qquad = \Rightarrow$

$= \langle w | \hat{D}(g^{-1}) | u \rangle = 0$

$\Rightarrow$ a kiegészítő altér is invariáns (ha unitér az ábrázolás)*

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \gamma\\ \delta\\ \varepsilon\end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 0 & \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vdots\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ ez az altér invariáns

$$\left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 0 & \end{array}\right] \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \gamma\\ \delta\\ \varepsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ \vdots\end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ a kiegészítő altér nem invariáns

*de sajnos nem mindig unitér

(M)
Ha nincs nemtriviális invariáns altér $\Rightarrow$ irreducibilis az ábrázolás.
Ha van: reducibilis.

$\vec{a} = \sum_k a_k \vec{e}^{(k)}$ $\qquad \vec{b} = \sum_l b_l \vec{e}^{(l)}$

$\vec{a}\vec{b} = \sum_k \sum_l a_k b_l \left(\vec{e}^{(k)} \vec{e}^{(l)}\right) = \sum_k \sum_l a_k b_l g_{kl}$ $\Rightarrow$ a skalárszorzat önkényesen definiált művelet

(M) Ha a "g_{kl}" mátrix szimm. és sé. ei pozitívak, akkor „jó a skaláris szorzás".

Definiáljunk egy másik skaláris szorzást ugyanazon a vektortéren.

eddig: $\langle a | b \rangle$

most: $(a|b) = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} \langle \hat{D}(h) a \,|\, \hat{D}(h) b \rangle$

$N = |G|$ (csop. elemeinek sz.) $\qquad |D(h)a\rangle = \hat{D}(h)|a\rangle$

Erre az új skaláris szorzásra nézve már unitér lesz az összes ábrázolás. (a $\hat{D}(g)$ operátor unitér lesz erre nézve)

$$\left(D(g)a \middle| D(g)b \right) = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} \langle D(h)D(g)a | D(h)D(g)b \rangle =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{h\in G} \langle D(hg)a | D(hg)b \rangle =$$

(M) hg ugyanúgy csoportelem: $h' := hg$, ugyanazok a csoportelemek, csak más sorrendben.

$$= \frac{1}{N}\sum_{h'\in G} \langle D(h')a | D(h')b \rangle = (a|b)$$

(M) Végtelen csoportokban ez nem feltétlenül működik, mert a $\sum$ nem biztos, h. konvergens.
Pl: forgáscsoportoknál működik

Gram-Schmidt ortogonalizáció.

$\langle e^{(k)} | e^{(l)} \rangle = \delta_{kl}$ (Mindkettő bázis, lin. fgtlenek, ugyanannyi van belőlük)

$\left(f^{(k)} | f^{(l)} \right) = \delta_{kl}$

Létezhet olyan $\hat{R}$, hogy:

$\forall k: \hat{R} e^{(k)} = f^{(k)}$

ekkor $\forall k: \hat{R}^{-1} f^{(k)} = e^{(k)}$

$\underline{x} = \sum_k x_k e^{(k)}$ $\quad$ $y = \sum_k y_k e^{(l)}$

$$\langle x|y\rangle = \sum_k\sum_l x_k y_l \langle e^k | e^l \rangle = \sum_k\sum_l x_k y_l \delta_{kl} = \sum_k x_k y_k$$

$$x' = \hat{R} x = \hat{R} \sum_k x_k e^{(k)} = \sum_k x_k \hat{R} e^{(k)} = \sum_k x_k f^{(k)}$$

$$y' = \hat{R} y = \sum_\ell y_\ell f^{(\ell)}$$

$$(x' | y') = \sum_k \sum_\ell x_k y_\ell \left(f^{(k)} | f^{(\ell)} \right) = \sum_k x_k y_k$$

$$(Rx | Ry) = \langle x | y \rangle \qquad (x|y) = \langle R^{-1} x | R^{-1} y \rangle$$

$$D'(g) = R^{-1} D(g) R$$

$$\langle D'(g) x | D'(g) y \rangle = \langle R^{-1} D(g) R x | R^{-1} D(g) R y \rangle =$$

$$= \left(D(g) R x | D(g) R y \right) = \left(Rx | Ry \right) = \langle x | y \rangle$$

$\langle D'(g) x | D'(g) y \rangle = \langle x | y \rangle \Rightarrow$ a $D'(g)$ operátor UNITER

ÍGY**, ezek után kimondhatjuk, hogy ha az ábrázolás uniter, akkor véges csoportok esetén $\forall$ reducibilis ábrázolás teljesen reducibilis is.

**(ezzel az új skalárszorzattal kiegészítve)

(M) irrep = irreducibilis ábrázolás

$\forall g$-re : $\underline{\underline{D}}(g) \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{D}}(g)$ $\rightarrow$ minden mátrixszal kommutál***

11.27.

Irreducibilis ábrázolások tulajdonságai
(a Schur-lemmák irred. ábr.-ra vonatkoznak)

Schur lemmák:

$G \ni g \longmapsto \underline{\underline{D}}(g)$ irred.

$\forall g \in G \; : \; [\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{D}}(g)] = 0$ **

(M) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$ kommutálnak

$f(\underline{\underline{A}})$ $\quad$ $g(\underline{\underline{A}})$

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$

ekkor létezik egy olyan harmadik, amelynek f-e az a kettő

1. Schur lemma:

** ekkor $\underline{\underline{A}} = \lambda \cdot \underline{\underline{1}}$

(B)

$\underline{\underline{A}}\underline{v} = \lambda \underline{v}$ $\qquad$ ($\rightarrow$ v önmagában altér)

$\underline{v} \in U \underset{\text{invar.}}{<} V$

$\underline{v}' = \underline{\underline{D}}(g)\underline{v}$ $\qquad$ $\underline{\underline{A}}\underline{v}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{D}}(g)\underline{v} = \underline{\underline{D}}(g)\underline{\underline{A}}\underline{v} =$

$= \underline{\underline{D}}(g)\lambda\underline{v} = \lambda\underline{\underline{D}}(g)\underline{v} = \lambda \underline{v}'$

(tehát a $\underline{v}'$ is sajátvektora $\underline{\underline{A}}$-nak)

Ekkor $U = \{0\}$ vagy $U = V$

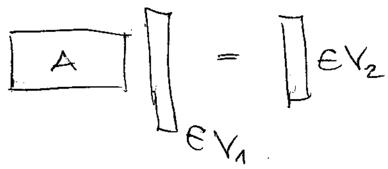
Tehát $\underline{\underline{A}} = \lambda \underline{\underline{1}}$ (Q.E.D.)

2. Schur lemma

(ehhez általánosítanunk kell a lin. leképezés fogalmát)
operátor ?

$A : V_1 \to V_2$

$A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha(Av_1) + \beta(Av_2)$



(M) lin. leképezés spec. esete a lin. operátor
(operátor: ugyanabba a halmazba képez ?)
térbe

$G \ni g \to \underline{\underline{D}}^{(1)}(g)$ irred.; $V_1 \to V_1$

$G \ni g \to \underline{\underline{D}}^{(2)}(g)$ irred.; $V_2 \to V_2$

$A : V_1 \to V_2$

$D^{(2)}(g)\, A = A\, D^{(1)}(g) \qquad \forall g \in G$

$V_2 \; V_2 \; V_1 \qquad V_2 \; V_1 \; V_1$

((Melyik az az $\underline{\underline{A}}$, amelyik ezt csinálja?))**

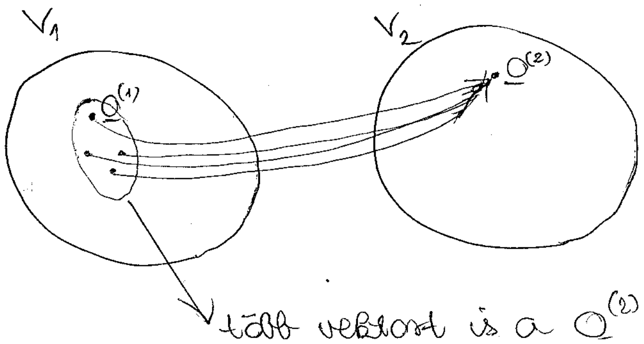
** $\left[\underline{\underline{A}} = 0 \text{ vagy } \exists \underline{\underline{A}}^{-1}\right]$ → ez a lemma

ekkor négyzetes, tehát a két tér ua. dimenziójú (viszont feltettük az elején, hogy kül.)

$\underline{v} \in \operatorname{Ker} \underline{\underline{A}} < V_1$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{0}^{(2)}$

ez a homomorfizmus magja: $\boxed{\operatorname{Ker} \underline{\underline{A}}}$



több vektort is a $0^{(2)}$-ba képez (ez a leképezés magja)

$G \ni g \quad \underline{\underline{D}}^{(1)}(g)$

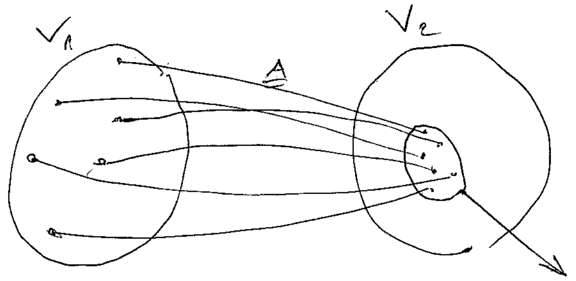
$\underline{v}' = \underline{\underline{D}}^{(1)}(g)\,\underline{v} \qquad \underline{\underline{A}}\,\underline{v}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{D}}^{(1)}(g)\,\underline{v} = \underline{\underline{D}}^{(2)}(g)\,\underline{\underline{A}}\,\underline{v} =$

$= \underline{\underline{D}}^{(2)}(g)\,\underline{0} = \underline{0}$

$\underline{v}' \in \mathrm{Ker}\,\underline{\underline{A}}$

(M) $\underline{0}^{(1)} \Rightarrow$ az 1-es tér nullvektora

$\mathrm{Ker}\,\underline{\underline{A}}$ inv. $\nearrow \{\underline{0}^{(1)}\}$, $\searrow V_1$



(A) $\mathrm{Im}\,\underline{\underline{A}}$ altér $= \mathrm{Im}\,\underline{\underline{A}} < V_2$

$\mathrm{Im}(\underline{\underline{A}}) \subset V_2$

$V_2 \ni u \in \mathrm{Im}\,\underline{\underline{A}}$

$\exists v \in V_1 \qquad \underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$

$\underline{u}' = \underline{\underline{D}}^{(2)}(g)\,\underline{u} = \underline{\underline{D}}^{(2)}(g)\,\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = A\,\underbrace{\underline{\underline{D}}^{(1)}(g)\,\underline{v}} = A\,v'$

$\underline{u}' \in \mathrm{Im}\,\underline{\underline{A}} \longrightarrow \mathrm{Im}\,\underline{\underline{A}}$ invariáns altér

$\mathrm{Im}\,\underline{\underline{A}}$ $\nearrow \{\underline{0}^{(2)}\}$, $\searrow V_2$

Négy eset:

1.) $\mathrm{Ker}\,\underline{\underline{A}} = \{0^{(1)}\}$
$\quad \mathrm{Im}\,\underline{\underline{A}} = \{0^{(2)}\}$ $\Rightarrow V_1 = \{0^{(1)}\}$

2.) $\mathrm{Ker}\,A = V_1$
$\quad \mathrm{Im}\,A = \{0^{(2)}\}$. $\Rightarrow A = 0$ (Schur)

3.) $\mathrm{Ker}\, A = V_1$

$\mathrm{Im}\, A = V_2$ $\Rightarrow$ $V_2 = \{0^{(2)}\}$

ekvivalens ábrázolások!

4.) $\mathrm{Ker}\, A = \{0^{(1)}\}$

$\mathrm{Im}\, A = V_2$ $\Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow \dim V_1 = \dim V_2 \Rightarrow D^{(1)} \sim D^{(2)}$

Konstruáljunk ilyen $\underline{A}$ mátrixot!

$\underline{\underline{B}} : V_1 \longrightarrow V_2$

$$A = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} D^{(2)}(h^{-1})\, B\, D^{(1)}(h) \quad : \quad V_1 \longrightarrow V_2$$

$$V_2 \leftarrow V_2 \leftarrow V_1 \leftarrow V_1$$

A' A „tudja" Schur 2. feltételeit

$$D^{(2)}(g)\, A = A\, D^{(1)}(g)$$

$$D^{(2)}(g)^{-1} = D^{(2)}(g^{-1})$$

$$A = D^{(2)}(g^{-1})\, A\, D^{(1)}(g)$$

$$A' = D^{(2)}(g^{-1})\, A\, D^{(1)}(g) = D^{(2)}(g^{-1}) \left(\frac{1}{N} \sum_{h \in G} D^{(2)}(h^{-1})\, B\, D^{(1)}(h) \right) D^{(1)}(g) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{h \in G} D^{(2)}(g^{-1})\, D^{(2)}(h^{-1})\, B\, D^{(1)}(h)\, D^{(1)}(g) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{h \in G} D^{(2)}(g^{-1} h^{-1})\, B\, D^{(1)}(hg) = [h' := hg] =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{h \in G} D^{(2)}(h'^{-1})\, B\, D^{(1)}(h') = A \quad \checkmark$$ bármilyen B-re

$$A = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} D^{(2)}(h^{-1})\, B\, D^{(1)}(h) \begin{cases} \rightarrow 0 \\ \rightarrow \underline{\underline{\lambda}} \quad (V_1 = V_2) \end{cases}$$

Mennyi a λ?

ha $V_1 = V_2$: $\exists\, \mathrm{Sp}\, A$

$$\mathrm{Sp}\,A = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} \mathrm{Sp}\left(D(h^{-1})\,B\,D(h)\right) = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} \mathrm{Sp}\left(D(h)D(h^{-1})\,B\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{h\in G} \mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(B)$$

$$\mathrm{Sp}\,A = \mathrm{Sp}(\lambda I) = \lambda \cdot n_1 \qquad (n_1 = \dim V_1)$$

$$\lambda = \frac{1}{n_1}\mathrm{Sp}\,B$$

Meg akarjuk mutatni, hogy véges sok irreducibilis ábrázolás van:

(vegyük a μ. és ν. ábrázolást:) $D^{(\mu)}$ $D^{(\nu)}$

$$A = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} D^{(\mu)}(h^{-1})\,B\,D^{(\nu)}(h) = \delta_{\mu\nu}\frac{1}{n_\mu}(\mathrm{Sp}B)\,I$$

(a V_μ egységoperátora)

$$\left(1_{V_\mu} \quad \dim V_\mu = n_\mu \quad D^{(\mu)}: V_\mu \to V_\mu\right)$$

$$A_{kl} = \frac{1}{N}\sum_{h\in G}\sum_{p}^{n_\mu}\sum_{q}^{n_\nu} D^{(\mu)}(h^{-1})_{kp} B_{pq} D^{(\nu)}(h)_{ql} =$$

$$= \delta_{\mu\nu}\frac{1}{n_\mu}\left(\sum_q B_{qq}\right)\delta_{kl}$$

$$B_{qq} = \sum_p \delta_{qp} B_{pq}$$

$$A_{kl} = \sum_{p}^{n_\mu}\sum_{q}^{n_\nu}\frac{1}{N}\sum_{h\in G} D^{(\mu)}(h^{-1})_{kp} B_{pq} D^{(\nu)}(h)_{ql} =$$

$$= \sum_p\sum_q \delta_{pq} B_{pq}\,\delta_{\mu\nu}\,\delta_{kl}\frac{1}{n_\mu} =$$

$$= \sum_p\sum_q\left(\frac{1}{N}\sum_{h\in G} D^{(\mu)}(h^{-1})_{kp} D^{(\nu)}(h)_{ql} - \frac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{pq}\delta_{kl}\right)B_{pq} = 0$$

$\forall B$-re!

$\Longrightarrow$ 2.

→ Ortogonalitási összefüggés:

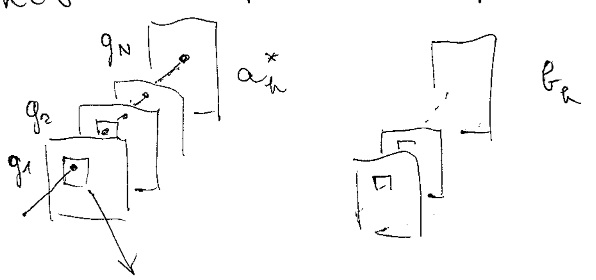
$$\frac{1}{N}\sum_{R\in G} D^{(\mu)}(R^{-1})_{kp}\, D^{(\nu)}(R)_{ql} = \frac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{pq}\delta_{kl}$$

Tfh D unitér:

$$D(R^{-1}) = D(R)^{-1} = D(R)^{+}$$

$$D(R^{-1})_{kp} = \left(D(R)^{+}\right)_{kp} = D(R)^{*}_{pk}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{R\in G} D^{(\mu)}(R)^{*}_{pk}\, D^{(\nu)}(R)_{ql} = \frac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{pq}\delta_{kl} \Rightarrow$$



$\rightarrow \sum a_k^* b_k$

- az így kapott (N dim.) vektorok mind ortogonálisak egymásra
- a vektorok száma: $\sum_\mu n_\mu^2 \leq N$ (itt egyenlőség van, később látjuk be)
- tehát véges sok ilyen ábrázolás van ✓

(P) D_3 : • $1^2 + 1^2 + 2^2$
• $\sum^{6} 1^2$

Vegyük a spurját!

$$\sum_p\sum_q \frac{1}{N}\sum_{R\in G} D^{(\mu)}(R)^{*}_{pp}\, D^{(\nu)}(R)_{qq} = \frac{1}{n_\mu}\sum_p\sum_q \delta_{\mu\nu}\delta_{pq}\delta_{pq} =$$

$$= \frac{\delta_{\mu\nu}}{n_\mu}\sum_p\sum_q \delta_{pq}\delta_{pq} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{n_\mu}\sum_p \delta_{pp} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{n_\mu} n_\mu = \delta_{\mu\nu}$$

(D) Ábrázolás karaktere: $\eta(g)$

$$G \ni g \longmapsto \hat{D}(g) \longrightarrow \underline{\underline{D}}(g)$$

$$\eta(g) = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{D}}(g)$$

$$D' = RDR^{-1} \qquad \mathrm{Sp}\,D' = \mathrm{Sp}\,D$$

$D^{(\mu)}$ irred. $\quad \chi^{(\mu)}(g) = \mathrm{Sp}\left(D^{(\mu)}(g)\right)$

$$\frac{1}{N}\sum_{h\in G} \chi^{(\mu)}(h)^* \, \chi^{(\nu)}(h) = \delta_{\mu\nu}$$

(M) véges fv $\longleftrightarrow$ vektor

$$G \ni g \longmapsto f(g) \in G$$

$f \in \Phi \qquad$ (f a Φ tér eleme)

$$\langle f | p \rangle = \frac{1}{N}\sum_{h\in G} f(h)^* \, p(h)$$

~~XXX~~ $\Rightarrow$ $\left\langle D^{(\mu)}_{pk} \middle| D^{(\nu)}_{q\ell} \right\rangle = \dfrac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{pq}\delta_{k\ell}$ (ortogonalitási öf.)

$$\langle \chi^{(\mu)} | \chi^{(\nu)} \rangle = \delta_{\mu\nu}$$

(A') Ha megadjuk az irred. ábr. karaktereit $\Rightarrow$ megadtuk az ábrázolást $\Rightarrow$ karaktertáblázat

Karaktertáblázat:

$$\begin{array}{c|ccc} & g_1 & \cdots & g_N \\ \hline \chi^{(1)} & - & - & - \\ \chi^{(2)} & - & - & - \\ \vdots & & & \end{array}$$

Pontosan mekkora lesz ez a táblázat?

$\chi(g) = \mathrm{Sp}\, D(g)$

$D'(g) = R D(g) R^{-1}$

$\chi'(g) = \mathrm{Sp}\, D'(g) = \chi(g)$

$g' = h g h^{-1} \qquad g' \sim g$

$$D(g') = D(hgh^{-1}) = D(h) D(g) D(h^{-1})$$

$$\chi(g') = \mathrm{Sp}\, D(g') = \mathrm{Sp}\big(D(h) D(g) D(h^{-1})\big) =$$

$$= \mathrm{Sp}\big(D(h^{-1}) D(h) D(g)\big) = \mathrm{Sp}(D(g)) = \chi(g)$$

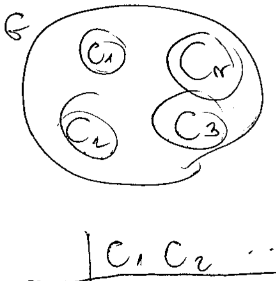
Centrális függvények tere = altér (egy konj. osztályon belül ugyanazt az értéket veszik fel)

C

Konjugált osztályok száma $:= r$

$C < \Phi \qquad f(hgh^{-1}) = f(g)$

$\dim C = r \; ; \; \dim \Phi = N$



$$\begin{array}{c|cccc} & C_1 & C_2 & \cdots & C_r \\ \hline \chi^{(1)} & - & - & - & - \\ \chi^{(2)} & - & - & - & - \\ \vdots & & & & \end{array}$$

$\Longrightarrow$ konjugált osztályok

A' Ez egy négyzetes táblázat = Burnside-tétel véges csoport irreducibilis ábr. száma?

Burnside-tétel: a karakterek száma megegyezik a konjugált osztályok számával

A karakterek a centrális fvek terében ortogonális bázist alkotnak.
= konj. oszt.?

Burnside-tétel 2. fele: $\sum_{\mu=1}^{r} n_\mu^2 = N$

	$\{e\}$	
$\chi^{(1)}$	n_1	...
$\chi^{(2)}$	n_2	...
$\vdots$	$\vdots$	
$\chi^{(r)}$	n_r	...

	$\{e\}$	$\{r\}$	$\{t\}$
	1		
	1		
	2		

12.04.

- „csoportokat lehet integrálni" $\rightarrow$ paraméterezéssel
- ha ez az integrál véges $\rightarrow$ kompakt csoport
- véges csoport: minden ábrázolás leképezhető unitérre?

$D^{(\mu)}_{kl}(g)$ ($\rightarrow$ μ. irred. ábrázolás kl. eleme)

$$\langle D^{(\mu)}_{kl}(g), D^{(\nu)}_{pq}(g)\rangle = \frac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{kp}\delta_{lq} = \frac{1}{N}\sum_g D^* D$$

($\sum n_\mu^2$ egyenletre merőleges mátrix)

$\sum n_\mu^2 = N$

Ábrázolás spurja: $\eta(g) = \mathrm{Sp}\, D(g)$

Irred. ábr. esetén: $\chi^{(\mu)}(g) = \mathrm{Sp}\, D^{(\mu)}(g)$

$$\langle \chi^{(\mu)}(g) \,|\, \chi^{(\nu)}(g) \rangle = \delta_{\mu\nu}$$

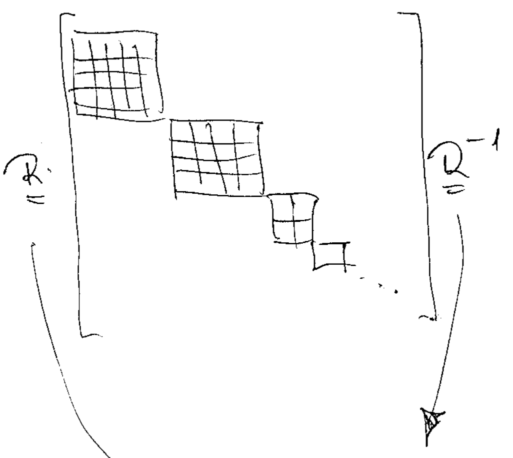
$g' = hgh^{-1}$ → ekvivalencia reláció → konjugált osztályokra bontható vele az ábr.

$Sp\, D(g) = Sp\, D(g')$

Képzeljünk el egy reducibilis ábr.-t!

↳ felbontható irred.-ekre:

↳ ábrázolás multiplicitása: hányszor fordul elő a μ. irred. ábr.



$$D = \sum_{\oplus} m_\mu D^{(\mu)}$$

$$\eta(g) = \sum m_\mu \chi^{(\mu)}(g)$$

ekkor a spurja nem változik!

Hogy kapjuk meg az m-eket? skaláris szorzással

(M) $\vec{v} = \sum_k c_k \vec{e}^{(k)}$ $\qquad \vec{e}^{(k)} \vec{e}^{(l)} = \delta_{kl}$

$$\vec{v}\vec{e}^{(l)} = \sum_k c_k \vec{e}^{(k)} \vec{e}^{(l)} = c_l$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \chi^{(\nu)} | \eta \rangle = \langle \chi^{(\nu)} | \sum_\mu m_\mu \chi^{(\mu)} \rangle =$$

$$= \sum_\mu m_\mu \langle \chi^{(\nu)} | \chi^{(\mu)} \rangle = \sum_\mu m_\mu \delta_{\mu\nu} = m_\nu$$

$$\boxed{m_\mu = \langle \chi^{(\mu)} | \eta \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \chi^{(\mu)}(g)^* \eta(g)}$$

⇒ ábrázolás redukálása?

Honnan tudjuk, hogy reduc.-e?

$$\langle \eta | \eta \rangle = \langle \sum_\mu m_\mu \chi^{(\mu)} | \sum_\nu m_\nu \chi^\nu \rangle = \sum_\mu \sum_\nu m_\mu m_\nu \langle \chi^\mu | \chi^\nu \rangle =$$

$$= \sum_\mu \sum_\nu m_\mu m_\nu \delta_{\mu\nu} = \sum_\mu m_\mu^2 = (**)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G} \eta(g)^* \eta(g) = \frac{1}{N} \sum_g |\eta(g)|^2$$

(**) ha ez $= 1$, akkor irreducibilis

ha $\neq 1$, akkor reducibilis

(T): Kommutatív csoport összes irreduc. ábrázolása egydimenziós.

	1	T
1	1	T
T	T	1

$\longrightarrow$

	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

$\longrightarrow e^{i \frac{2\pi}{n} k}$

elemszáma

G	$s_1 C_1$	$s_2 C_2$	....	$s_r C_r$
χ^1				
χ^2		$\chi^{(\mu)}(C_k)$		
⋮				
χ^r				

$\longrightarrow$ konjugált elemosztályok (r db)

$\longrightarrow$ ez NEM szorzástábla!

$$\langle \chi^{(\mu)} | \chi^{(\nu)} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \chi^{(\mu)*}(g) \chi^{(\nu)}(g) = *** \rightarrow$$

$s_k := |C_k|$ (konj. oszt. elemszáma)

$$\sum_{k=1}^{r} s_k = N = |G| \rightarrow (***)$$

$$\text{***} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{r} s_k\, \chi^{(\mu)}(C_k)^*\, \chi^{(\nu)}(C_k)$$

(M) C_k helyére neveket szoktak írni. Pl: D_3

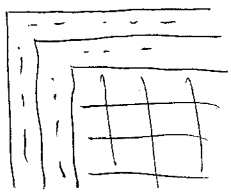
$$D_3 = \{e, r, r^2, t, tr, tr^2\} = \underbrace{\{e\}}_{E} \cup \underbrace{\{r, r^2\}}_{R} \cup \underbrace{\{t, tr, tr^2\}}_{T}$$

elemszám!

****

D_3	1E	2R	3T
A	1	1	1
B	1	x	y
C	2	(stb. köv. oldalon)	

(M) $\chi^{(k)}$ -helyére is neveket írnak (alkalmazástól függően különböző)



→ ua. a csoport két különböző elnevezéssel

χ^1	n_1	1	1	1 ...
χ^2	n_2			
$\vdots$	$\vdots$			
χ^r	n_r			

$$n_\mu = \dim \chi^\mu$$

(M) $\vec{v} = \sum_k c_k \vec{e}^{(k)} = \sum (\vec{v}\cdot\vec{e}^{(k)})\,\vec{e}^{(k)} = \Big(\underbrace{\sum (\vec{e}^{(k)} \circ \vec{e}^{(k)})}_{I}\Big)\vec{v}$

$$\sum_k e_l^{(k)} e_m^{(k)} = \delta_{lm}$$

$$\sum_m e_m^{(k)} e_m^{(l)} = \delta_{kl}$$

$$\begin{bmatrix} e_1^{(1)} & e_2^{(1)} & \cdots & e_n^{(1)} \\ e_1^{(2)} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ e_1^{(n)} & \cdots & & e_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

a sorok és az oszlopok is ortogonálisak

⇓

ez egy ortogonális mátrix

Sorok ortogonalitása:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{r} s_k\, \chi^{(\mu)}(C_k)^*\, \chi^{(\nu)}(C_k) = N\delta_{\mu\nu}}$$

Oszlopok:

$$\boxed{\sum_{\mu=1}^{r} \chi^{(\mu)}(C_k)^*\, \chi^{(\mu)}(C_l) = \frac{N}{s_k}\delta_{kl}}$$

**** 2 → ennek alapján ki tudjuk tölteni a táblázatot ****

Ⓟ D_3 kitöltése az előző 2 képlet segítségével.

D_3	1E	2R	3T
A	1	1	1
B	1	x	y
C	2	−1	0

$\leftarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ → Ez a D_3 karaktertáblája.

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1x + 3\cdot 1y &= 0 \\ 1\cdot 1^2 + 2x^2 + 3y^2 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

$$2x + 3y = -1$$

$$2x^2 + 3y^2 = 5$$

Hf: ue. D_5-re

$D_5 = e, r, r^2, r^3, r^4, t, tr, tr^2, tr^3, tr^4 =$

$= \{e\} \cup \{r, r^4\} \cup \{r^2, r^3\} \cup \{t, tr, tr^2, tr^3, tr^4\}$

$\Downarrow$

4×4-es táblázat

Hf. ezt kitölteni a fentiek alapján.

D_5	1E	2R	$2R^2$	5T
A	1	1	1	1
B	1			
C	2			
D	2			

$r^3 = e$ → pl. 120°-os elforgatás: $\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$

$t^2 = e$ → pl. $\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$

$rt = tr^2$

$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\quad \underline{\underline{R}}^3 = \underline{\underline{1}}$

ez ezek a csoportnak a 2×2-es irred. ábrázolása

$\underline{\underline{R}}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$n_\mu = \langle \chi^\mu | \eta \rangle$

(P) $D = A \oplus B \oplus 2C$

D_3	1E	2R	3T
A	1	1	1
B	1	1	−1
C	2	−1	0
χ	6	0	0

$D = A \oplus B \oplus 3C$

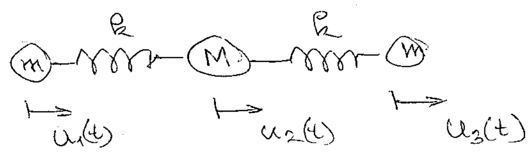
D_3	1E	2R	3T
A	1	1	1
B	1	1	−1
C	2	−1	0
χ	8	−1	0

$\boxed{12.11.}$

CO_2 molekula:

- klasszikusan: rugókkal összekötött golyók (az egyensúlyi helyzettől mérjük a kitérést!)

Rezgésekből vettük tegnap!



$$m\ddot{u}_1 = k(u_2 - u_1)$$
$$M\ddot{u}_2 = k(u_1 - u_2) + k(u_3 - u_2)$$
$$m\ddot{u}_3 = k(u_2 - u_3)$$

(a jobboldalon levő erők összege nulla)

$$\ddot{u}_1 = -\frac{k}{m}u_1 + \frac{k}{m}u_2 + 0u_3$$

$$\ddot{u}_2 = \frac{k}{M}u_1 - \frac{2k}{M}u_2 + \frac{k}{M}u_3$$

$$\ddot{u}_3 = 0 \cdot u_1 + \frac{k}{m}u_2 - \frac{k}{m}u_3$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^{\cdot\cdot} = \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & 0 \\ \frac{k}{M} & -\frac{2k}{M} & \frac{k}{M} \\ 0 & \frac{k}{M} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\ddot{u}} = -\underline{\underline{A}}\,\underline{u} \qquad \begin{cases} \underline{u}(t=0) = \underline{u}_0 \\ \underline{\dot{u}}(t=0) = \underline{v}_0 \end{cases}$$

Tfh. $\underline{u}(t) = \underline{a} \cdot e^{i\omega t}$

$$\underline{\ddot{u}}(t) = -\omega^2 \underline{a}\, e^{i\omega t}$$

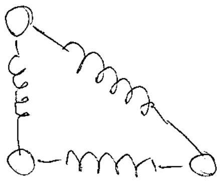
$$-\omega^2 \underline{a}\, e^{i\omega t} = -\underline{\underline{A}}\,\underline{a}\, e^{i\omega t}$$

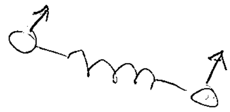
$$\underline{\underline{A}}\,\underline{a} = \omega^2 \underline{a} \quad \longrightarrow \text{sajátértékprobléma}$$

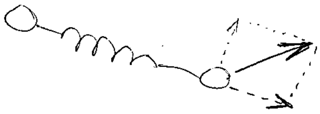
$\updownarrow$

(M) Ha sokadfokú az egyenlet, de valahogy szimm. a r., felbontható több alacsonyabb fokú egyenletre.

elmozdulás vektorral

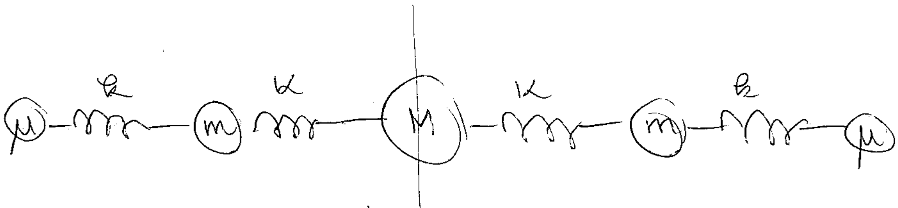


Pl:  (nem nyúlik meg a rugó)

Pl: 

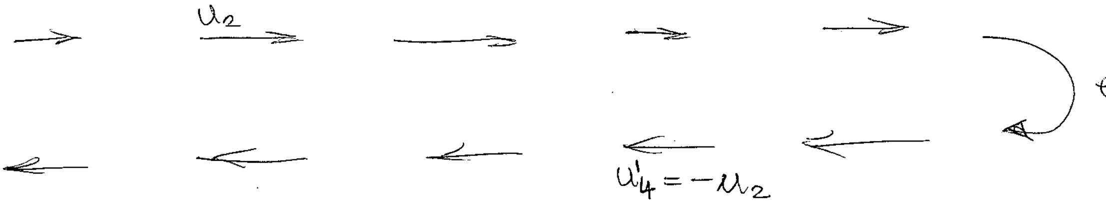
→ így már megnyúlik a rugó.
→ Mennyire? a vektort le kell vetíteni

Zérus módus: „nulla frekvenciájú rezgés" = eltolás (a szimmetria miatt) („a rugók nem nyúlnak meg") (merev testek: 3 eltolás, 3 elforgatás → 6 db zérus frekvencia)



ennek az rendszernek
C_2 szimmetriája van:

C_2	1	T
1	1	T
T	T	1



$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \\ u'_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & -1 \\ & & & -1 & \\ & & -1 & & \\ & -1 & & & \\ -1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

→ reducibilis ábrázolás

„A fizikai rendszeren ábrázolódik a rendszer szimmetriája"

Tükrözésre szimm. $\Longleftrightarrow$ a tükr. r. ugyanazokat az egyenleteket elégíti ki, mint az eredeti.

$$(\underline{\underline{T}}\,\underline{u})'' = -\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{T}}\,\underline{u})$$

$$-\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = -\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{u} \quad \forall\, \underline{u}\text{-ra}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}$$

$$[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{T}}] = 0$$

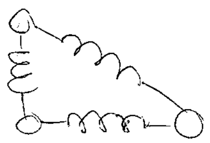
A szimmetriát leíró operátor kommutál a dinamikát leíró operátorral.

$\Downarrow$

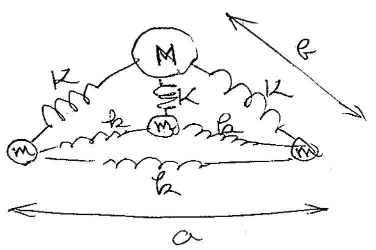
Ekkor az egyik sajátvektora benne van a másik op. saját-alterében.

(M) $\underline{\underline{T}}$-nek általában többszörös sajátértékei vannak.

Mo: az $\underline{\underline{A}}$-t a sajátalterekben írjuk fel $\rightarrow$ blokkdiagonális

(M) 
itt $3N \overset{?}{\times} 3N$-es az $\underline{\underline{A}}$ mátrix ($12 \overset{?}{\times} 12$-es), de ezt nem akarjuk felírni

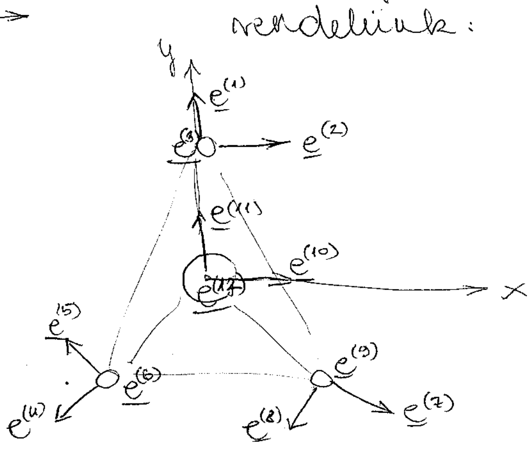
(P) Ammónia molekula: lapított tetraéder



szimmetriacsoportja: D_3 $\quad (G = D_3)$

mindegyik golyóhoz sajátbázist rendelünk:

felülnézetből:



120°-os forgatás:

$\hat{R}\underline{e}^{(1)} = e^{(4)}$
$Re^{(2)} = e^{(5)}$
$Re^{(3)} = e^{(6)}$
$Re^{(4)} = e^{(7)}$
$Re^{(5)} = e^{(8)}$
$Re^{(6)} = e^{(9)}$
$Re^{(7)} = e^{(1)}$
$Re^{(8)} = e^{(2)}$
$Re^{(9)} = e^{(3)}$

$Re^{(10)} = -\frac{1}{2}e^{(10)} + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{(11)}$

$Re^{(11)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{(10)} - \frac{1}{2}e^{(11)}$

$Re^{(12)} = e^{(12)}$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{12} \end{bmatrix} \in V$$

$$A_{kl} = \vec{e}^{(k)}\left(\hat{A}\vec{e}^{(l)}\right)$$

$\{\vec{e}^{(k)}\}$ = ortonormált bázis a 12 dim. térben.

$R_{11} = 1$

$$\underline{\underline{R}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
 & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & & \\
\hline
1 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \\
 & & & & & & & & & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \\
 & & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]$$

$$\boxed{\underline{\underline{R}}^3 = \underline{\underline{1}}}$$

$\Downarrow$

(3 forgatás visszavisz az eredeti állapotba)

Tükrözések.

$Te^{(1)} = e^{(1)}$

$Te^{(2)} = -e^{(2)}$

$Te^{(3)} = e^{(3)}$

$Te^{(4)} = e^{(7)}$

$Te^{(5)} = -e^{(8)}$

$Te^{(6)} = e^{(9)}$

$Te^{(7)} = e^{(4)}$

$Te^{(8)} = -e^{(5)}$

$Te^{(9)} = e^{(6)}$

$Te^{(10)} = -e^{(10)}$

$Te^{(11)} = e^{(11)}$

$Te^{(12)} = e^{(12)}$

$$\underline{\underline{T}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
1 & & & & & & & & & & & \\
 & -1 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & -1 & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & & \\
\hline
 & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & -1 & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & -1 & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]$$

$$\boxed{\underline{\underline{T}}^2 = \underline{\underline{1}}}$$

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{R}}^2$$

definiáló relációk

Ezek a matrixok ábrázolják a csoportot: $\underline{\underline{1}}, \underline{\underline{R}}, \underline{\underline{R}}^2, \underline{\underline{T}}, \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{R}}, \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{R}}^2$

(természetes ábrázolás)

Igazából csak a mátrixok spurjára van szükség. Minden konjugált elemosztályból csak egy kell.

$$D_3 = \{e\} \cup \{r, r^2\} \cup \{t, tr, tr^2\}$$

$\eta(e) = 12 \quad = (Sp(\mathbb{1}))$

$\eta(r) = 0$

$\eta(t) = 2$

(M) $\underline{R}$-nél pl. elég lett volna a jobb alsó kis mátrixot meghatározni (N atom)

Karaktertábla:

D_3	1E	2R	3T
A	1	1	1
B	1	1	−1
C	2	−1	0
D	12	0	2

$$D = \sum_\mu m_\mu D^{(\mu)}$$

$$\eta(g) = \sum_\mu m_\mu \chi^{(\mu)}(g)$$

$$\langle \chi^{(\mu)} | \chi^{(\nu)} \rangle = \delta_{\mu\nu}$$

$$m_\mu = \langle \chi^{(\mu)} | \eta \rangle$$

m_A = „A" ábrázolás multiplicitása

$$m_A = \langle \chi^{(A)} | \eta \rangle = \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 12 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 2) = 3$$

$$m_B = \langle \chi^{(B)} | \eta \rangle = \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 12 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3(-1) \cdot 2) = 1$$

$$m_C = \langle \chi^{(C)} | \eta \rangle = \frac{1}{6}(1 \cdot 2 \cdot 12 + 2(-1) 0 + 3 \cdot 0 \cdot 2) = 4$$

$D = 3A + 1B + 4C \longrightarrow$ ez az ábrázolás redukciója

$\downarrow$ 3 dim altér

$\downarrow$ 1 dim altér

$\downarrow$ 8 dim altér (amelyben 4-szer valósul meg az ábrázolás) $\rightarrow$

$$G \ni g \longmapsto \hat{D}(g) \quad \text{reducibilis}$$

$$D = \sum_\mu m_\mu D^{(\mu)} \quad \text{irreducibilisek}$$

$$m_\mu = \langle \chi^{(\mu)} | \eta \rangle \qquad \eta = \mathrm{Sp}\, D$$

$$\hat{P}_\mu = m_\mu \langle \chi^\mu | \hat{D} \rangle = \qquad \hat{P} = \text{projektor}$$

$$= \frac{m_\mu}{N} \sum_{g \in G} \chi^{(\mu)}(g)^* \hat{D}(g)$$

a példánknál:

$$\hat{P}_A = \frac{1}{6}\left(1 + R + R^2 + T + TR + TR^2\right)$$

$$\hat{P}_B = \frac{1}{6}\left(1 + R + R^2 - T - TR - TR^2\right)$$

$$\hat{P}_C = \frac{2}{6}\left(2\,1 - R - R^2\right)$$

(ábrázolás dimenziója!)

$$\hat{P}_A \underline{e}^{(1)} = \frac{1}{6}\left(e^{(1)} + e^{(4)} + e^{(7)} + e^{(1)} + e^{(7)} + e^{(4)}\right) = \underbrace{\frac{e^{(1)} + e^{(4)} + e^{(7)}}{3}}_{\text{ez az } e^{(1)} \text{ vetülete (a 12 dim térben!)}}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P}_A e^{(2)} = \frac{1}{6}(e^2 + e^5 + e^8 - e^2 - e^8 - e^5) = 0$$

$$P_A e^{(3)} = \frac{1}{6}(e^3 + e^6 + e^9 + e^3 + e^9 + e^6) = \frac{e^3 + e^6 + e^9}{3}$$

$$Pe^{(4)} = e^{(1)} \; ; \; Pe^{(5)} = e^{(2)} \; ; \; Pe^{(6)} = e^{(3)}$$

$$Pe^{(7)} = e^{(1)} \; ; \; Pe^{(8)} = e^{(2)} ; \; Pe^{(9)} = e^{(3)} ;$$

$$P_A e^{(10)} = \frac{1}{6}(\rightarrow + \nwarrow + \swarrow + \leftarrow + \searrow + \nwarrow) = 0$$

$$P_A e^{(11)} = \frac{1}{6}(\uparrow + \swarrow + \searrow + \uparrow + \searrow + \swarrow) = 0$$

$$P_A e^{(12)} = e^{(12)}$$

Szimmetrikus sajátvektorok:
- $Pe^{(1)} =$
- $Pe^{(3)} =$
- $e^{(12)}$

$$P_B e^{(1)} = \frac{1}{6}(e^1 + e^4 + e^7 - e^1 - e^7 - e^4) = 0$$

$$P_B e^{(2)} = \frac{1}{6}(e^2 + e^5 + e^8 - (-e^2) - (-e^8) - (-e^5)) = \frac{e^2 + e^5 + e^8}{3}$$

itt meg is állunk, hiszen B egydim, úgy ez a sajátvektor

$$P_C e^{(1)} = \frac{2}{6}(2e^1 - e^4 - e^7)$$
$$P_C e^{(4)} = \frac{2}{6}(2e^4 - e^7 - e^1)$$
$$P_C e^{(7)} = \frac{2}{6}(2e^7 - e^1 - e^4)$$

2 db lin fgtlen vektort ad

$$\left.\begin{aligned} P_c e^2 &= \frac{2}{6}(2e^2 - e^5 - e^8) \\ P_c e^5 &= \frac{2}{6}(2e^5 - e^8 - e^2) \\ P_c e^8 &= \frac{2}{6}(2e^8 - e^2 - e^5) \end{aligned}\right\} \text{2 lin. fgtlen}$$

$$\left.\begin{aligned} P_c e^3 &= \frac{2}{6}(2e^3 - e^6 - e^9) \\ P_c e^6 &= \frac{2}{6}(2e^6 - e - e) \\ P_c e^9 &= \frac{2}{6}(2e^9 - e - e) \end{aligned}\right\} \text{2 lf.}$$

$$\left.\begin{aligned} P_c e^{10} &= e^{10} \\ P_c e^{11} &= e^{11} \end{aligned}\right\} \text{ez a 2 lesz}$$

$$P_c e^{12} = 0$$

A ábrázolás:

$$s^{(1)} = \frac{e^1 + e^4 + e^2}{3}$$

$$s^{(2)} = \frac{e^3 + e^6 + e^9}{3}$$

$$s^{(3)} = e^{12}$$

B ábrázolás:

$$s^{(1)} = \frac{e^2 + e^5 + e^7}{3}$$

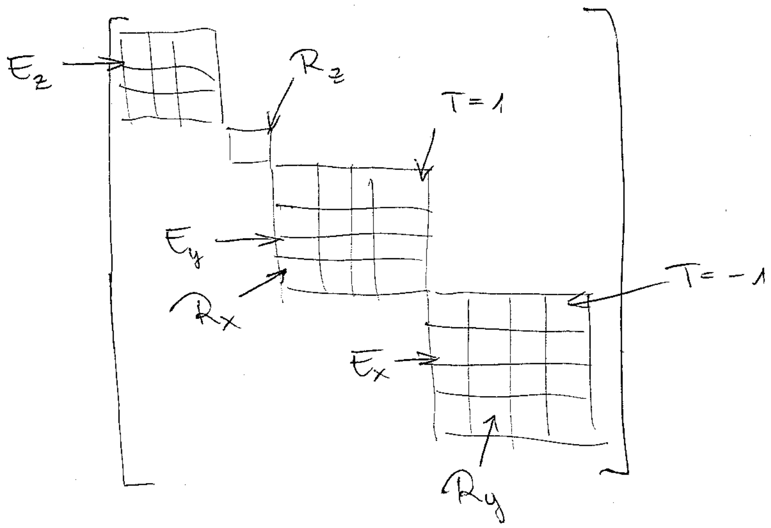
C ábrázolásnál a sajátvektorok kiválasztása: önkényesen

„első csoport": $T(2e^1 - e^4 - e^7) \rightarrow$ 8 $\nearrow$ $T = 1$, $\searrow$ $T = -1$

(stb ...)

2 db kétdim. alter:

1.		2.
e^{11}		$\frac{e^4 - e^7}{2}$
$\frac{2e^1 - e^4 - e^7}{3}$		$\frac{2e^2 - e^5 - e^8}{2}$
$\frac{e^5 - e^8}{2}$		$\frac{e^3 - e^6}{2}$
$\frac{2e^3 - e^6 - e^9}{3}$		e^{10}



E_z
R_z
$T=1$
E_y
R_x
$T=-1$
E_x
R_y