1. A csoport fogalma

1.1. Szimmetriák leszámlálása

A szimmetriák tanulmányozása természetesen elvezet a *csoport* absztrakt algebrai fogalmához. Ezt a következő elemi geometriai kérdés megválaszolásával szemléltetjük:

Hány olyan egybevágósága van a térnek, ami sajátmagába visz egy rögzített kockát?

Jelölje G a tér azon egybevágóságainak halmazát, amelyek sajátmagába viszik a kijelölt kockát. Egybevágóságon a tér sajátmagába menő távolságtartó leképezését értjük. Egybevágóságoknak képezhetjük a kompozícióját, továbbá egy egybevágóságnak – bijektív leképezés lévén – van inverze, ami szintén egybevágóság. Nyilvánvaló, hogy $f, g \in G$ esetén $f \circ g \in G$ és $f^{-1} \in G$.

Számozzuk meg a kocka csúcsait az $1, \dots, 8$ számokkal. Osztályozzuk G elemeit aszerint, hogy hova viszik az 1 csúcsot. Legyen $G_1 = \{g \in G \mid g(1) = 1\}$. Könnyen látható, hogy tetszőleges i csúcshoz létezik olyan $f_i \in G$, amire $f_i(1) = i$ (ugyanis egy rögzített lapon belül a lapközépponton átmenő, a lapra merőleges egyenes körüli 90 fokos forgatásokkal akármelyik csúcsot akármelyikbe el tudjuk vinni, a kocka középpontjára való tükrözés pedig a laphoz tartozó négy csúcsot kicseréli a másik négy csúcsra). Könnyű belátni, hogy G azon elemeinek halmaza, amelyek az 1 csúcsot i-be viszik $f_i \circ G_1 := \{f_i \circ h \mid h \in G_1\}$. (Valóban, tegyük fel, hogy $g(1) = i$. Ekkor $g(1) = f_i(1)$, tehát $f_i^{-1}(g(1)) = 1$, azaz $h = f_i^{-1} \circ g$ eleme G_1-nek, így $g = f_i \circ h \in f_i \circ G_1$. Fordítva, ha $g = f_i \circ h$ valamely $h \in G_1$-re, akkor $g(1) = (f_i \circ h)(1) = f_i(h(1)) = f_i(1) = i$.) Továbbá $f_i \circ G_1$ elemszáma megegyezik G_1 elemszámával, hiszen az $f_i \circ g = f_i \circ h$ $(g, h \in G_1)$ egyenlőséget balról f_i^{-1}-zel komponálva kapjuk, hogy $g = h$. Összefoglalva azt kaptuk, hogy $G = \bigcup_{i=1}^{8} f_i \circ G_1$ páronként diszjunkt, $|G_1|$ elemszámú részhalmazokkal való befedése G-nek. Következésképpen $|G| = 8|G_1|$. Most már elég G_1 elemszámát meghatározni.

Alkalmazzuk újra az előző gondolatmenetet: legyenek az 1 csúcs szomszédai a $2, 3, 4$ csúcsok. Osztályozzuk G_1 elemeit aszerint, hogy hova viszik a 2-es csúcsot. Mivel 1 fixen marad, a szomszédai egymás közt permutálódnak. Másfelől az 1 csúcson átmenő testátló körüli 120 fokos forgatásokkal 2 elvihető a $2, 3, 4$ mindegyikébe. Ezért ugyanúgy, mint fenn, kapjuk, hogy $|G_1| = 3|G_{1,2}|$, ahol $G_{1,2} = \{g \in G_1 \mid g(2) = 2\}$.

Az $1, 2$ csúcsokat helybenhagyó egybevágóság $3, 4$-et egymás közt permutálja, másfelől az $\overline{12}$ élen és a kocka középpontján átmenő síkra való tükrözés valóban kicseréli a $3, 4$ csúcsokat. Ezért az előbbiekhez hasonló érveléssel kapjuk, hogy $|G_{1,2}| = 2|G_{1,2,3}|$, ahol $G_{1,2,3} = \{g \in G_{1,2} \mid g(3) = 3\}$. Viszont G tetszőleges eleme fixálja a kocka középpontját, így $G_{1,2,3}$ elemei fixen hagynak négy nem egysíkú pontot. Elemi geometriábol tudjuk, hogy ilyen egybevágóság csak egy van, az identitás.

Tehát az eredeti kérdésre a válasz:

$$\begin{aligned} |G| = 8 \cdot |G_1| &= 8 \cdot 3 \cdot |G_{1,2}| = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot |G_{1,2,3}| \\ &= 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48. \end{aligned}$$

A későbbi absztrahálás érdekében megjegyezzük, hogy az előbbi számolásban a következőket használtuk ki lényegesen:

- G elemeinek lehet a kompozícióját képezni;
- A kompozíció képzése asszociatív;
- Az identikus leképezés benne van G-ben;
- Bármely G-beli leképezés inverze benne van G-ben.

Ezenkívül hivatkoztunk arra is, G elemei permutálják egy véges halmaz (a csúcsok halmaza) elemeit.

1.2. Absztrakt csoportok

1.2.1. Definíció. *Legyen G egy halmaz, amelyen adott egy kétváltozós művelet, azaz adott egy $G \times G \to G$ leképezés. Az $(a, b) \in G \times G$ pár képét jelölje $a \cdot b$, és nevezzük ezt az elemet a és b szorzatának.*

Azt mondjuk, hogy G a $\cdot$ műveletre nézve csoportot alkot, *ha teljesülnek a következők:*

(i) A művelet asszociatív, *azaz tetszőleges $a, b, c \in G$ esetén $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.*

(ii) Létezik egységelem G-ben, azaz létezik egy olyan elem G-ben –jelölje ezt az elemet 1–, amelyre fennáll, hogy tetszőleges $a \in G$ esetén $1 \cdot a = a \cdot 1$.

(iii) G minden elemének van inverze, azaz tetszőleges $a \in G$ elemhez létezik egy olyan elem –jelölje ezt az elemet a^{-1}–, amelyre $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$.

Könnyen látható, hogy a fenti axiómákból következik az egységelem és az inverz egyértelműsége.

Hagyományos elnevezések és jelölések:

1. Azt mondjuk, hogy G *Abel-csoport*, ha a művelet kommutatív, azaz tetszőleges $a, b \in G$ esetén $a \cdot b = b \cdot a$. Abel-csoport esetén szokás a műveletet összeadásnak nevezni és $+$ jellel jelölni. Ezen *additív* írásmód esetén az egységelem bevett elnevezése *nullelem*, az inverz elnevezése *ellentett*, jele $-a$.

2. Hacsak nem lesz rá külön okunk, mi csoportról beszélve a 1.2.1 Definícióban használt ún. *multiplikatív* írásmódot alkalmazzuk. Gyakran elhagyjuk a művelet jelét, és $a \cdot b$ helyett ab-t írunk.

Példák.

I. A V euklideszi tér egybevágóságai a kompozíció műveletével, jelölje ezt a csoportot $O(V)$. Itt az egységelem az identikus leképezés, és egy elem csoportbeli inverze egybeesik a leképezéskénti inverzével.

II. A tér azon egybevágóságai, amelyek sajátmagába visznek egy rögzített kockát.

III. *Szimmetrikus csoport:* Tetszőleges X halmaz esetén jelölje $S(X)$ az X halmaz összes *permutációinak* (azaz az $X \to X$ bijekcióknak) a halmazát. $S(X)$ csoportot alkot a kompozíció műveletére nézve, egységelem az identikus permutáció, csoportbeli inverz a leképezéskénti inverz.

Speciális eset: az *n-edfokú szimmetrikus csoport* $S_n = S(\{1, \dots, n\})$. Pl. legyen $n = 6$, ekkor S_6 egy eleme $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, ahol az i alatti szám $\pi(i)$. Könnyen látható, hogy tetszőleges permutáció felbontható – a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen – páronként diszjunkt elemhalmazokat mozgató ciklusok szorzataként. Például $\pi = (1\ 4\ 3) \cdot (5\ 6)$, ahol $(i_1 \cdots i_d)$ jelöli azt a permutációt, amelynél az i_1 képe i_2, i_2 képe i_3, stb., i_d képe i_1, és az alaphalmaz többi eleme fixen marad (az ilyen permutáció neve d-ciklus).

IV. $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, azaz a nem-nulla komplex számok a szorzással.

1.2.2. Definíció. *Legyen G csoport, és H nem-üres részhalmaz G-ben. Ha tetszőleges $a, b \in H$ esetén $a \cdot b \in H$ és $a^{-1} \in H$, akkor a G-beli művelet megszorítható H-ra, és így csoportot kapunk. Ilyenkor azt mondjuk, hogy H részcsoport G-ben (jele: $H \leq G$).*

Például, legyen X a tér pontjainak halmaza. Ekkor az I. pontban szereplő csoport, a tér egybevágóságainak csoportja részcsoport $S(X)$-ben. A II. pontban szereplő csoport pedig egy véges részcsoport a tér egybevágóságainak csoportjában.

1.2.3. Definíció. *Legyen A tetszőleges részhalmaz G-ben. Ekkor az A elemeiből és inverzeikből képzett véges szorzatok nyilvánvalóan részcsoportot alkotnak G-ben, ez az A által generált részcsoport, jele: $\langle A \rangle$. Azt mondjuk, hogy az A generálja G-t, ha $\langle A \rangle = G$.*

Speciálisan, egyetlen g elem által generált (rész)csoport:

$$\langle g \rangle = \{\dots, g^{-2}, g^{-1}, 1, g, g^2, g^3, \dots\}$$

Az egyetlen elem által generált csoportokat *ciklikusnak* nevezzük. Ha $g^i = g^j$ csak $i = j$ esetén áll fenn, akkor végtelen ciklikus csoportot kapunk. Ezek "ugyanolyanok" (ennek jelentését mindjárt precízen megfogalmazzuk), mint $(\mathbb{Z}, +)$ azaz az egész számok a szokásos összeadásra nézve. Amennyiben van olyan $i < j$ hogy $g^i = g^j$, akkor ezt az egyenlőséget $(g^i)^{-1} = g^{-i}$-vel szorozva nyerjük, hogy $g^{j-i} = 1$. Jelölje n a legkisebb olyan pozitív egészet, amelyre $g^n = 1$. Ekkor

$$\langle g \rangle = \{g, g^2, \dots, g^{n-1}, g^n = 1\}$$

n elemű ciklikus csoport. Ez olyan, mint $(\mathbb{Z}/n, +)$, azaz a modulo n maradékosztályok a szokásos összeadással.

1.2.4. Definíció. *Egy $g \in G$ csoportelem rendje $o(g) = |\langle g \rangle|$.*

A rend szerepét mutatja az alábbi triviális állítás:

1.2.5. Állítás. *Legyen g véges rendű elem a G csoportban. Ekkor valamely n egészre $g^n = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $o(g)$ osztója n-nek.*

Az 1.1 alfejezetben szereplő csoport elemeit beosztottuk azonos elemszámú részhalmazokba. Ez a fajta osztályozás megfogalmazható általában, tetszőleges csoport esetén. Legyen H részcsoport a G csoportban, $g \in G$. A g elem H szerinti *baloldali mellékosztálya* $gH := \{gh \mid h \in H\}$. Mivel $1 \in H$, ezért $g \in gH$, azaz minden elem benne van az ő baloldali melékosztályában. Fordítva, az is igaz, hogy egy baloldali mellékosztály *képviselhető* bármelyik elemével, azaz ha $f \in gH$, akkor $fH = gH$. Valóban, először nézzük meg az 1 mellékosztályát, azaz H-t. Legyen $h \in H$, ekkor $hH = \{hh' \mid h' \in H\} \subseteq H$, mivel H részcsoport. Másfelől tetszőleges $h' \in H$ felírható $h(h^{-1}h')$ alakban, és $h^{-1}h' \in H$ miatt kapjuk, hogy $h' \in hH$. Tehát $hH = H$ tetszőleges $h \in H$ esetén. Legyen most $f \in gH$, azaz $f = gh$ valamely $h \in H$-ra. Ekkor $fH = (gh)H = g(hH) = gH$.

Beláttuk tehát, hogy két H szerinti baloldali mellékosztály vagy diszjunkt, vagy egybeesik (ui. tegyük fel, hogy $x \in gH \cap fH$, akkor $gH = xH = fH$). Tehát a H szerinti baloldali mellékosztályok páronként diszjunkt részhalmazokkal való befedését adják G-nek. A H szerinti baloldali mellékosztályok számát H *indexének* nevezzük, és $[G : H]$-val jelöljük. Ebből az egyszerű észrevételből azonnal erős aritmetikai feltételt kapunk egy véges csoport részcsoportjának elemszámára:

1.2.6. Tétel (Lagrange tétele). *Legyen G véges csoport. Ekkor G bármelyik H részcsoportjának elemszáma osztója G elemszámának. Pontosabban szólva, fennáll a $|G| = |H| \cdot [G : H]$ egyenlőség.*

Bizonyítás. Legyen H részcsoport G-ben, és tekintsünk egy gH baloldali mellékosztályt. Mivel a $gh_1 = gh_2$ egyenlőségből (balról g^{-1}-zel szorozva) következik $h_1 = h_2$, azért a g-vel való balról szorzás megad egy $H \to gH$ bijekciót, így $|gH| = |H|$. Tehát a H szerinti baloldali mellékosztályok $[G : H]$ darab, páronként diszjunkt, $|H|$ elemszámú részhalmazzal való befedését adják G-nek, következésképpen $|G| = |H| \cdot [G : H]$.
□

1.2.7. Következmény. *Véges csoport tetszőleges elemének a rendje osztója a csoport elemszámának.*

Térjünk vissza az I. Példában szereplő O csoporthoz. A tér egybevágóságaihoz szokás előjelet rendelni. Legyen $\mathrm{sgn} : O \to \{1, -1\}$ az a leképezés, amelyik az irányítástartó egybevágóságokhoz (mozgásokhoz) 1-et, az irányításváltókhoz -1-et rendel. A $\{-1, 1\}$ halmaz is csoport a szokásos szorzással (részcsoportja a IV. Példában szereplő csoportnak). A sgn leképezés jól ismert alapvető tulajdonsága, hogy bármely két elem szorzatának képe a képek szorzata, azaz pl. irányításváltó egybevágóságok kompozíciója irányítástartó, stb. Kimondatlanul bár, de lényeges szerepet játszottak az 1.1 alfejezetben is csoportok közötti művelettartó leképezések. Legyen G az ott szereplőcsoport, és legyen $\phi : G \to S_8$ az a leképezés, ami egy a kockát sajátmagába képező egybevágósághoz hozzárendeli azt a permutációt, ahogyan g permutálja az $\{1, 2, \ldots, 8\}$ csúcsokat. Világos, hogy egybevágóságok kompozíciója úgy permutálja a csúcsokat, ahogyan a megfelelő permutációk kompozíciója.

1.2.8. Definíció. *Egy $\phi : G \to H$ csoportok közötti leképezést homomorfizmusnak nevezünk, ha művelettartó, azaz tetszőleges $a, b \in G$ esetén fennáll, hogy $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$.*

A ϕ homomorfizmust izomorfizmusnak nevezzük, ha injektív és szürjektív. Azt mondjuk, hogy G és H csoportok izomorfak, ha létezik $G \to H$ izomorfizmus.

Legyen $\phi : G \to H$ homomorfizmus. A definíciókból azonnal adódik, hogy $\phi(1_G) = 1_H$ és $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$. Továbbá, $\phi(a) = \phi(b) \Leftrightarrow \phi(a)^{-1}\phi(b) = 1 \Leftrightarrow \phi(a^{-1}b) = 1$. A

$$\ker(\phi) := \{g \in G \mid \phi(g) = 1\}$$

G-beli részhalmazt a ϕ *magjának*, míg az

$$\mathrm{im}(\phi) := \{h \in H \mid \exists g \in G : \ \phi(g) = h\}$$

H-beli részhalmazt a ϕ *képének* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{im}(\phi)$ részcsoport H-ban és $\ker(\phi)$ részcsoport G-ben. Sőt, $\ker(\phi)$ rendelkezik egy olyan tulajdonsággal is, ami nem teljesül minden részcsoportra. Nevezetesen, ha $\phi(g) = 1$, akkor tetszőleges $x \in G$ esetén $\phi(xgx^{-1}) = \phi(x)\phi(g)\phi(x^{-1}) = \phi(x) \cdot 1 \cdot \phi(x)^{-1} = 1$.

1.2.9. Definíció. *Legyen N részcsoport a G csoportban. Azt mondjuk, hogy N normálosztó (vagy normális részcsoport) G-ben (jele: $N \triangleleft G$), ha tetszőleges $n \in N$ és $g \in G$ esetén gng^{-1} is benne van N-ben.*

Ezen fogalom bevezetése után az előbbi meggondolásunk a következőképpen fogalmazható:

1.2.10. Állítás. *Homomorfizmus magja normálosztó, azaz tetszőleges $\phi : G \to H$ homomorfizmusra $\ker(\phi) \triangleleft G$.*

A H részcsoport szerinti baloldali mellékosztályokhoz hasonlóan definiálhatjuk a jobboldali mellékosztályokat is: a $g \in G$ elem H szerinti *jobboldali mellékosztálya* $Hg := \{hg \mid h \in H\}$. A normálosztóság tulajdonsága úgy is jellemezhető, hogy tetszőleges elem baloldali illetve jobboldali mellékosztálya megegyezik (a kérdéses részcsoport szerint):

1.2.11. Állítás. *A G csoport N részcsoportjára az alábbiak ekvivalensek:*

(i) N normálosztó G-ben.

(ii) Tetszőleges $g \in G$-re $gN = Ng$.

Bizonyítás. (i) $\Rightarrow$ (ii): $gN = \{gn \mid n \in N\} = \{(gng^{-1})g \mid n \in N\} \subseteq Ng$. Hasonlóan kapjuk, hogy $Ng \subseteq gN$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Tetszőleges $n \in N$ esetén $gn \in gN = Ng$, tehát van olyan $n' \in N$, amelyre $gn = n'g$. Innen $gng^{-1} = n' \in N$, így $N \triangleleft G$. $\square$

Legyen $N \triangleleft G$, és g_1N, g_2N két N szerinti melékosztály. Vegyünk egy-egy elemet mindkét mellékosztályból: $g_1' = g_1n_1$ és $g_2' = g_2n_2$, ahol $n_1, n_2 \in N$. Képezzük a szorzatukat: $g_1'g_2' = (g_1n_1)(g_2n_2) = g_1(n_1g_2)g_2 = g_1(g_2(g_2^{-1}n_1g_2))n_2 = (g_1g_2)(n_1'n_2) \in (g_1g_2)N$. Azt kaptuk tehát, hogy rögzítve két N szerinti mellékosztályt, bármely két belőlük vett elempár szorzatának ugyanaz az N szerinti mellékosztálya. Ezért értelmes a következő definíció:

1.2.12. Definíció. *Legyen N normálosztó G-ben. A G/N factorcsoport elemei az N szerinti mellékosztályok, és az aN, bN mellékosztályok szorzata*

$$(aN) \cdot (bN) := abN.$$

(Az előbbi megfigyelésünk szerint abN csak az a és b N szerinti mellékosztályától függ.)

Világos, hogy G/N a megadott művelettel csoport; az egységelem az N mellékosztály, míg az aN mellékosztály inverze $a^{-1}N$.

Példa. Legyen $G = \mathbb{Z}$, az egész számok additív csoportja, és n pozitív egész. Jelölje $n\mathbb{Z}$ az n-nel osztható egészek halmazát. Könnyű ellenőrizni, hogy $n\mathbb{Z}$ részcsoport $\mathbb{Z}$-ben, sőt, minthogy $\mathbb{Z}$ Abel-csoport, $n\mathbb{Z}$ automatikusan normálosztó. Így képezhetjük az $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ faktorcsoportot. Ez nem más, mint a modulo n maradékosztályok additív csoportja.

A faktorcsoport definíciójából azonnal következik, hogy az $\eta : G \to G/N$, $g \mapsto gN$ leképezés szürjektív homomorfizmus, és $\ker(\eta) = N$. Ezt a homomorfizmust *természetes homomorfizmusnak* szokás nevezni. Az alábbi állítás azt mondja, hogy bizonyos értelemben minden csoporthomomorfizmus ilyen:

1.2.13. Állítás (Homomorfizmus-tétel). *Legyen $\phi : G \to H$ homomorfizmus. Akkor $\mathrm{im}(\phi) \cong G/\ker(\phi)$.*

Bizonyítás. Korábban már meggondoltuk, hogy két G-beli elemnek akkor és csak akkor ugyanaz a képe, ha megegyezik a $\ker(\phi)$ szerinti mellékosztályuk. Így tetszőleges $h \in \mathrm{im}(\phi)$ esetén $\phi^{-1}(h)$ egy $\ker(\phi)$ szerinti mellékosztály. Tekintsük az $\alpha : \mathrm{im}(\phi) \to G/\ker(\phi)$, $h \mapsto \phi^{-1}(h)$ leképezést. A ϕ művelettartóságából adódik, hogy α homomorfizmus. Triviális, hogy α bijektív, azaz α izomorfizmus. $\square$

1.3. Csoporthatások

Egy tér szimmetriáin azon önmagára való bijektív leképezéseit szoktuk érteni, amelyek megőriznek – az adott környezetben lényegesnek minősülő – mennyiségeket vagy tulajdonságokat. A csoportelmélet jelentősége abban áll, hogy egy tér szimmetriáinak összessége rendelkezik természetes csoport-struktúrával. Ennek megfelelően – amint arra az 1.1 alfejezet és a további példáink többsége is vallott –, a csoportok általában egy halmazon való permutációs hatással együtt jelennek meg a matematikában.

1.3.1. Definíció. *Legyen G egy csoport, X pedig egy halmaz. Tegyük fel, hogy adott egy $s : G \to S(X)$ homomorfizmus. Ekkor azt mondjuk, hogy G hat az X halmazon, és használjuk a következő jelölést: $g \in G$ és $x \in X$ esetén $g \cdot x := (s(g))(x)$.*

Az, hogy s csoporthomomorfizmus, egyenértékű azzal, hogy a fenti jelölésre érvényes a $(gh)\cdot x = g\cdot(h\cdot x)$ $(g, h \in G,\ x \in X)$ azonosság. További elnevezések:

- $G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}$ az x *pályája*. (A különböző pályák partícióját – azaz páronként diszjunkt részhalmazokkal való befedését – alkotják X-nek.)
- $G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ az x *stabilizátora*. (Nyilvánvaló, hogy G_x részcsoport G-ben.)
- G-nek az X-en való hatása *hűséges*, ha s injektív. (Ilyenkor G izomorf $\mathrm{im}(s)$-sel, azaz $S(X)$ egy részcsoportjával.)
- G-nek az X-en való hatása *tranzitív*, ha csak egy pálya van, azaz tetszőleges $x, y \in X$-hez létezik olyan $g \in G$, amelyre $y = g \cdot x$.

1.3.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy G hat X-en, és legyen $x \in X$. Ekkor az x pályájának elemei kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben állnak G-nek a G_x szerinti baloldali mellékosztályaival.*

Bizonyítás. Tetszőleges $g, h \in G$-re $g \cdot x = h \cdot x \Leftrightarrow (h^{-1}g) \cdot x = x \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Leftrightarrow gG_x = hG_x$. Ez azt jelenti, hogy $y \mapsto \{g \in G \mid g \cdot x = y\}$ $(y \in G \cdot x)$ a kívánt megfeleltetés. □

Ebből és Lagrange tételéből adódik a következő formula:

1.3.3. Következmény. *Tegyük fel, hogy a G véges csoport hat az X halmazon. Ekkor tetszőleges $x \in X$ esetén fennáll, hogy*

$$|G| = |G_x| \cdot |G \cdot x|.$$

Megjegyezzük, hogy az 1.1 alfejezetben éppen ennek a formulának az ismételt alkalmazásával határoztuk meg a kocka szimmetriáinak számát.

2. Lineáris csoportábrázolások

2.1. Ábrázoláselméleti alapfogalmak

Legyen V egy vektortér a K test felett ($K = \mathbb{R}$ vagy $K = \mathbb{C}$). Jelölje $GL(V)$ a lineáris transzformációk részcsoportját $S(V)$-ben. Ez az *általános lineáris csoport.*

2.1.1. Definíció. *A G csoport V vektortéren való ábrázolásán egy $\rho : G \to GL(V)$ homomorfizmust értünk. Adott ábrázolásra használjuk a $g \cdot v := \rho(g)(v)$ $(g \in G,\ v \in V)$ jelölést. (Mivel $\rho(g)$ lineáris, azért $g \cdot (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1(g \cdot v_1) + \lambda_2(g \cdot v_2)$ tetszőleges $g \in G$, $v_1, v_2 \in V$ és $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ esetén.) Az ábrázolás dimenziója* $\dim(V)$.

Komplex ábrázolásról beszélünk, ha $K = \mathbb{C}$, és valós ábrázolásról, ha $K = \mathbb{R}$.

2.1.2. Definíció. *A $\rho_1 : G \to GL(V_1)$ és $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ ábrázolások közötti kapcsoló operátorok azon $T : V_1 \to V_2$ lineáris leképezések, amelyekre $T \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ T$ bármely $g \in G$ esetén. Ha ráadásul T bijektív, akkor izomorfizmusnak nevezzük. A ρ_1 és ρ_2 ábrázolások izomorfak (jele: $\rho_1 \cong \rho_2$), ha létezik köztük izomorfizmus.*

Legyen : $G \to GL(V)$ egy ábrázolás. A V vektortér W alterét *invariáns altérnek* nevezzük, ha bármely $g \in G$-re és $w \in W$-re $g \cdot w \in W$. Ekkor a $\rho(g)$ transzformáció megszorítható W-re, az így kapott $\rho_W : G \to GL(W)$, $g \mapsto \rho(g)|_W$ ábrázolás neve *részábrázolás*. Tekintsük most a V/W faktorteret, ennek elemei a $v+W$ mellékosztályok. W invariáns altér, ezért $v+W = v'+W$-ből következik, hogy $g \cdot v + W = g \cdot v' + W$. Így definiálhatjuk a $\rho_{V/W} : G \to GL(V/W)$ *faktorábrázolást* a $\rho_{V/W}(g)(v+W) := g \cdot v + W$ formulával.

Tegyük fel, hogy V a V_1 és V_2 invariáns altereinek direkt összege. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $v \in V$ egyértelműen előáll $v = v_1 + v_2$ alakban, ahol $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, így $\rho(g)(v) = \rho_{V_1}(g)(v_1) + \rho_{V_2}(g)(v_2)$. Ekkor azt mondjuk, hogy ρ a ρ_{V_1} és ρ_{V_2} *ábrázolások összege*, ennek jele: $\rho = \rho_{V_1} + \rho_{V_2}$. Ebben az esetben $\rho_{V/V_1} \cong \rho_{V_2}$.

Fordítva, ha adottak a $\rho_i : G \to GL(V_i)$ $(i = 1, 2)$ ábrázolások, akkor definiálhatunk egy $\rho_1 + \rho_2$-vel jelölt ábrázolást a V_1 és V_2 vektorterek direkt összegén a $(\rho_1 + \rho_2)(g)(v_1, v_2) := (\rho_1(g)(v_1), \rho_2(g)(v_2))$ formulával.

Azt mondjuk, hogy a ρ ábrázolás *irreducibilis*, ha nincs valódi (azaz a $\{0\}$-tól és az egész tértől különböző) invariáns altér. Ha W valódi invariáns altér, akkor ρ bizonyos értelemben a ρ_W és a $\rho_{V/W}$ ábrázolásokból épül fel (látni fogjuk azonban, hogy ρ_W és $\rho_{V/W}$ nem mindig határozza meg egyértelműen ρ-t). Ezért az ábrázolások osztályozásában az első lépés az irreducibilisek áttekintése.

2.2. Abel-csoportok véges dimenziós komplex irreducibilis ábrázolásai

2.2.1. Lemma (Schur-lemma I.). *Egy csoport irreducibilis ábrázolásai közti kapcsoló operátor vagy izomorfizmus, vagy a nulla leképezés.*

Bizonyítás. Legyenek $\rho_i : G \to GL(V_i)$, $i = 1, 2$ irreducibilis ábrázolásai G-nek, és legyen $T : V_1 \to V_2$ kapcsoló operátor. $\ker(T)$ invariáns altér V_1-ben, u.i. $T(v) = 0$-ból következik, hogy $0 = g \cdot T(v) = T(g \cdot v)$, azaz $g \cdot v \in \ker(T)$. Hasonlóan $\mathrm{im}(T)$ invariáns altér V_2-ben. Következésképpen ha $T \neq 0$, akkor $\ker(T) = \{0\}$ és $\mathrm{im}(T) = V_2$, tehát T izomorfizmus. □

2.2.2. Lemma (Schur-lemma II.). *Legyen $\rho : G \to GL(V)$ véges dimenziós komplex irreducibilis ábrázolás. Ekkor ρ bármely endomorfizmusa, azaz bármely $T : V \to V$ kapcsoló operátor (ρ és ρ között) skalárral való szorzás.*

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ sajátértéke T-nek. Világos, hogy a $T' = T - \lambda \cdot \mathrm{id}_V : V \to V$ leképezés is endomorfizmus. T' nem izomorfizmus, hiszen $\ker(T')$ tartalmazza a λ-hoz tartozó sajátalteret. Így Schur-lemma I. szerint $T' = 0$, azaz $T = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$. □

2.2.3. Tétel. *Abel-csoport véges dimenziós komplex irreducibilis ábrázolása 1-dimenziós.*

Bizonyítás. Legyen G Abel-csoport, és $\rho : G \to GL(V)$ véges dimenziós komplex irreducibilis ábrázolás. Rögzítsünk egy tetszőleges g elemet G-ben. Bármely $x \in G$-re fennáll, hogy $\rho(g) \circ \rho(x) = \rho(gx) = \rho(xg) = \rho(x) \circ \rho(g)$. Ez azt jelenti, hogy $\rho(g)$ endomorfizmusa ρ-nak, így Schur-lemma II. szerint skalárral való szorzás. Tehát bármely $g \in G$ skalárral való szorzásként hat V-n, következésképpen V minden altere invariáns altér. Ezért ρ csak úgy lehet irreducibilis, hogy $\dim(V) = 1$. □

Példa. A fenti tételben lényeges feltétel, hogy komplex ábrázolásról van szó. Legyen ugyanis V a 2-dimenziós valós euklideszi tér, és $G = (\mathbb{R}, +)$, a valós számok additív csoportja. Legyen $\rho : G \to GL(V)$ az a leképezés, ami a α valós számhoz hozzárendeli az origó középpontú α szögű forgatást. Ez egy 2-dimenziós valós irreducibilis ábrázolása egy Abel-csoportnak.

2.3. Mátrix ábrázolások

Jelölje $GL(n, K)$ az $n \times n$-es nem-nulla determinánsú K feletti mátrixok halmazát, ez csoport a mátrix szorzással.

2.3.1. Definíció. *Egy $G \to GL(n, K)$ homomorfizmust a G csoport n-edfokú mátrix ábrázolásńak nevezzük. (Ezt felfoghatjuk a K^n oszlopvektorok terén való ábrázolásnak, azonosítva egy $n \times n$-es mátrixot a vele való szorzással, mint $K^n \to K^n$ lineáris leképezéssel.)*

Legyen V n-dimenziós K-vektortér. V-beli bázis választása meghatároz egy $GL(V) \to GL(n,K)$ izomorfizmust. Valóban, rögzítsünk egy $b = (b_1, \dots, b_n)$ bázist V-ben. Tetszőleges $v \in V$ egyértelműen felírható $v = v_1 b_1 + \dots + v_n b_n$ alakban ($v_i \in K$), jelölje v_b a V koordináta-mátrixát, azaz a $(v_1, \dots, v_n)^t$ oszlopvektort. Véve egy $A \in GL(V)$ lineáris transzformációt, legyen A_b az az $n \times n$-es mátrix, amelynek i-edik oszlopa $A(b_i)_b$. Ezt az A transzformáció b bázisbeli mátrixának nevezik, mert minden $v \in V$-re teljesül az $A(v)_b = A_b \cdot v_b$ összefüggés. Következésképpen az $A \to A_b$ leképezés egy $GL(V) \to GL(n,K)$ izomorfizmus.

Ennek megfelelően, a $\rho : G \to GL(V)$ n-dimenziós ábrázoláshoz a b bázis választása hozzárendeli a $\rho_b : G \to GL(n,K)$, $g \mapsto \rho(g)_b$ mátrix ábrázolást. Legyen b' egy másik bázis, és T a bázisáttérés mátrixa, azaz T i-edik oszlopa a $(b'_i)_b$. Ekkor a ρ_b és a $\rho_{b'}$ mátrix ábrázolások között az a kapcsolat, hogy $\rho_{b'}(g) = T^{-1}\rho(g)T$ minden $g \in G$-re. Ez motiválja az alábbi definíciót:

2.3.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\rho : G \to GL(n,K)$ és $\rho' : G \to GL(n,K)$ mátrix ábrázolások ekvivalensek, ha létezik olyan $T \in GL(n,K)$, amelyre $\rho'(g) = T^{-1}\rho(g)T$ minden $g \in G$-re.*

Lineáris algebrai trivialitás a következő:

2.3.3. Állítás. *A G csoport n-dimenziós ábrázolásainak izomorfia osztályai kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben állnak G n-edfokú mátrix ábrázolásainak ekvivalencia osztályaival, méghozzá úgy, hogy a $\rho : G \to GL(V)$ ábrázolás izomorfia osztályának megfelel a ρ_b mátrix ábrázolás ekvivalencia osztálya, ahol b tetszőleges bázis V-ben.*

Érdemes meggondolni, hogyan jelennek meg a rész illetve faktor ábrázolások a mátrix ábrázolásban. Legyen $\rho : G \to GL(V)$ véges dimenziós ábrázolás, $W \leq V$ invariáns altér, $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_k)$ bázis W-ben, ezt egészítsük ki V $b = (b_1, \dots, b_n)$ bázisává, így $\bar{b} = (b_{k+1} + W, \dots, b_n + W)$ bázis V/W-ben. Ekkor a ρ_b mátrix ábrázolás a következő alakú:

$$\rho_b(g) = \begin{pmatrix} \rho_W(g)_{\tilde{b}} & * \\ 0 & \rho_{V/W}(g)_{\bar{b}} \end{pmatrix}$$

Amennyiben a W invariáns altérnek létezik U invariáns direkt kiegészítője, azaz $\rho = \rho_W + \rho_U$, akkor válszthatjuk a b bázist úgy, hogy $\hat{b} = (b_{k+1}, \dots, b_n)$ bázis legyen U-ban, és ekkor

$$\rho_b(g) = \begin{pmatrix} \rho_W(g)_{\tilde{b}} & 0 \\ 0 & \rho_U(g)_{\hat{b}} \end{pmatrix}.$$

3. Teljesen reducibilis ábrázolások

3.1. Irreducibilis ábrázolások összegei

3.1.1. Definíció. *A $\rho : G \to GL(V)$ ábrázolás teljesen reducibilis, ha tetszőleges $U \leq V$ invariáns altérnek létezik invariáns direkt kiegészíője, azaz létezik olyan W invariáns altér, amelyre $V = U \oplus W$ (azaz $V = U + W$, $U \cap W = \{0\}$).*

Példa. Tekintsük $\mathbb{C}$ a komplex számok csoportját az összeadással, és legyen $\rho : \mathbb{C} \to GL(2,\mathbb{C})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Az

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t+t' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

egyenlőség mutatja, hogy ρ ábrázolása $(\mathbb{C}, +)$-nak a $\mathbb{C}^2$ vektortéren. Megmutatjuk, hogy csak egy valódi invariáns altér van. Vegyünk ugyanis egy U valódi invariáns alteret. Ez szükségképpen 1-dimenziós, mondjuk az $u \in U$ generálja. Az, hogy $\mathbb{C}u$ invariáns altér, azt jelenti, hogy u közös sajátvektora az összes $\rho(t)$-nek. Ebből következik, hogy $U = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{C}\}$. Ez valóban invariáns altér, és az elmondottakból nyilvánvaló, hogy nincs invariáns direkt kiegészítője.

3.1.2. Állítás. *Teljesen reducibilis ábrázolás része, faktora is teljesen reducibilis.*

Bizonyítás. Legyen $\rho : G \to GL(V)$ teljesen reducibilis ábrázolás, $U \leq V$ invariáns altér. Ekkor a feltevés szerint tetszőleges $W \leq U$ invariáns altérhez létezik olyan W_1 invariáns altér, amelyre $V = W \oplus W_1$. Ekkor $U = W \oplus (W_1 \cap U)$, és nyilvánvaló, hogy $W_1 \cap U$ is invariáns altér.

A faktor esete a visszavezethető a rész esetére, mivel $\rho_{V/U} \cong \rho_{U_1}$, ahol U_1 az U invariáns direkt kiegészítője. □

3.1.3. Lemma. *Legyen $\rho : G \to GL(V)$ ábrázolás, és tegyük fel, hogy $V = V_1 + \cdots + V_m$, ahol V_i minimális invariáns altér V-ben ($i = 1, \ldots, m$), azaz ρ_{V_i} irreducibilis. Ekkor tetszőleges $U \leq V$ invariáns altérhez létezik $\{i_1, \ldots, i_p\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ úgy, hogy $V = U \oplus V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_p}$. Speciálisan, irreducibilis ábrázolások összege teljesen reducibilis.*

Bizonyítás. Legyen $\{i_1, \ldots, i_p\}$ maximális olyan részhalmaza $\{1, \ldots, m\}$-nek, hogy az $U, V_{i_1}, \ldots, V_{i_p}$ alterek bármelyike diszjunkt a többi összegétől. Jelölje ezen alterek összegét W, nyilván $W = U \oplus V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_p}$. Megmutatjuk, hogy $W = V$. Ehhez elég belátni, hogy $W \geq V_j$ ($j = 1, \ldots, m$). Ez $j \in \{i_1, \ldots, i_p\}$ esetén triviális. Legyen j ezektől az indexektől különböző. A $V_j \cap W$ invariáns altér V_j-ben, és nem-nulla, mert különben j hozzávehető lenne $\{i_1, \ldots, i_p\}$-hez. Így V_j minimalitása miatt $V_j \cap W = V_j$, azaz $V_j \leq W$. □

3.1.4. Tétel. *(i) Véges dimenziós ábrázolás akkor és csak akkor teljesen reducibilis, ha irreducibilisek összege.*

(ii) Tegyük fel, hogy $\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_m$, ahol ρ_i irreducibilis. Ekkor ρ tetszőleges része vagy faktora $\rho_1, \ldots, \rho_m$ közül néhánynak az összegével izomorf.

(iii) Tegyük fel, hogy a $\rho : G \to GL(V)$ ábrázolásra fennáll, hogy $\rho_1 + \cdots + \rho_m = \rho = \sigma_1 + \cdots + \sigma_p$, ahol ρ_i, σ_j irreducibilis ábrázolásai G-nek. Ekkor $m = p$, és $\rho_i \cong \sigma_i$ ($i = 1, \ldots, m$) alkalmas indexelés esetén. Azaz egy ábrázolás irreducibilisek összegére való felbontása izomorfia erejéig egyértelmű (feltéve, hogy létezik).

Megjegyzés. A teljesen reducibilis ρ ábrázolás irreducibilisek összegére való felbontásában természetesen egymással izomorf tagok is szerepelhetnek, mondjuk

$$\rho = \rho_1^1 + \rho_1^2 + \cdots + \rho_1^{m_1} + \rho_2^1 + \cdots + \rho_k^1 + \cdots + \rho_k^{m_k},$$

ahol $\rho_i^j \cong \rho_i$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m_i$, és $\rho_1, \ldots, \rho_k$ páronként nem-izomorf irreducibilisek. Ekkor azt mondjuk, hogy ρ *irreducibilis komponensei* $\rho_1, \ldots, \rho_k$ (itt ρ_i egy izomorfia osztályt képvisel, és csak izomorfia erejéig meghatározott), és a ρ_i *multiplicitása* m_i; jele: $\rho \cong \sum_{i=1}^k m_i \rho_i$. A 3.1.4 Tétel (iii) szerint az irreducibilis komponensek izomorfia típusa és multiplicitásuk jól definiált (és persze csak ρ izomorfia típusától függ), továbbá nyilvánvaló, hogy izomorfia erejéig meghatározzák ρ-t.

Bizonyítás. (i) $\Leftarrow$: Következik a 3.1.3 Lemmából, $U = \{0\}$ választással.

$\Rightarrow$: Legyen ρ teljesen reducibilis ábrázolás a V véges dimenziós vektortéren. Alkalmazzunk indukciót $\dim(V)$-re. Ha ρ irreducibilis, akkor készen vagyunk. Ha U egy valódi invariáns alér, akkor $\rho = \rho_U + \rho_W$, ahol W az U invariáns direkt kiegészítője, és a 3.1.2 Állítás szerint ρ_U, ρ_W teljesen reducibilisek. Az indukciós feltevés szerint ρ_U, ρ_W irreducibilisek összege, tehát ugyanez igaz ρ-ra is.

(ii) A feltevés szerint az ábrázolás tere $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, ahol $\rho_i = \rho_{V_i}$, azaz V_i minimális invariáns altér. Legyen U tetszőleges invariáns altér V-ben. A 3.1.3 Lemma alapján $V = U \oplus V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_p}$, tehát $\rho_{V/U} = \rho_{V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_p}} = \rho_{i_1} + \cdots + \rho_{i_p}$.

A részre vonatkozó állítás visszavezethető erre, a már látott módon.

(iii) A feltevés szerint $V_1 \oplus \cdots \oplus V_m = U_1 \oplus \cdots \oplus U_p$, ahol $\rho_{V_i} = \rho_i$ és $\rho_{U_j} = \sigma_j$. Alkalmazzunk indukciót m-re. Az $m = 1$ eset triviális. Legyen $m > 1$. A 3.1.3 Lemma szerint $V = U_1 \oplus V_{i_1} \oplus \cdots V_{i_k}$. Jelölje $\{j_1, \ldots, j_{m-k}\}$ az $\{i_1, \ldots, i_k\}$ halmaz komplementerét $\{1, \ldots, m\}$-ben. Ekkor

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \rho_{U_1} = \rho_{V/V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_p}} &\cong \rho_{V_{j_1} \oplus \cdots \oplus V_{j_{m-k}}} \\ &= \rho_{j_1} + \cdots + \rho_{j_{m-k}}, \end{aligned}$$

amiből $m - k = 1$ és $\sigma_1 = \rho_{j_1}$ következik. Feltehető, hogy $j_1 = 1$. Kijött, hogy $\sigma_1 \cong \rho_1$ és $V = U_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$. Innen $\rho_{V/U_1} \cong \rho_2 + \cdots + \rho_m$. Másfelől $\rho_{V/U_1} \cong \rho_{U_2 \oplus \cdots \oplus U_p} = \sigma_2 + \cdots + \sigma_p$. Az indukciós feltevést alkalmazva a ρ_{V/U_1} ábrázolásra nyerjük a kívánt állítást. $\square$

Az alábbi következmény felfogható azon jól ismert lineáris algebrai tény általánosításának, miszerint egy lineáris transzformáció különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

3.1.5. Következmény. *Legyenek $V_1, \ldots, V_m$ minimális invariáns alterek a ρ ábrázolás terében úgy, hogy $\rho_{V_1}, \ldots, \rho_{V_m}$ páronként nem-izomorfak. Ekkor a $V_1, \ldots, V_m$ alterek lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamely $k \in \{1, \ldots, m-1\}$-re $V_1, \ldots, V_k$ lineárisan független, de $V_1, \ldots, V_{k+1}$ lineárisan összefüggő, azaz $\{0\} \neq V_{k+1} \cap (V_1 + \cdots + V_k) =: W$. Mivel W nem-nulla invariáns altér, és benne van a V_{k+1} minimális invariáns altérben, azért $W = V_{k+1}$, tehát $V_{k+1} \leq V_1 + \cdots + V_k$. Tehát a $\rho_{V_1} + \cdots + \rho_{V_k}$ ábrázolásnak (ami a 3.1.3 Lemma szerint teljesen reducibilis) van $\rho_{V_{k+1}}$-gyel izomorf részábrázolása. Ez ellentmond a 3.1.4 Tétel (ii) állításának. $\square$

A fenti 3.1.4 Tétel az irreducibilisek összegeként való előállításnak csak az izomorfia erejéig való egyértelműségét állítja, de nem mondja azt, hogy az ábrázolás terének minimális invariáns alterek összegeként való előállítása egyértelmű. Ez utóbbi általában nem igaz: tekintsük például egy akármilyen csoportnak a triviális hatását egy legalább 2-dimenziós vektortéren. Ekkor minden altér invariáns, és az egész tér végtelen sokféleképpen előáll 1-dimenziósak összegeként. Van azonban egy fontos olyan eset, amikor igaz ez az erősebb értelemben vett egyértelműség, erről szól a következő lemma.

3.1.6. Lemma. *Tegyük fel, hogy a $\rho : G \to GL(V)$ ábrázolásra fennáll, hogy $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, ahol V_i minimális invariáns alterek, és a ρ_{V_i} irreducibilis ábrázolások páronként nem-izomorfak. Ekkor V tetszőleges invariáns altere $V_1, \ldots, V_m$ közül néhánynak az összege.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy tetszőleges U minimális altér egybeesik $V_1, \ldots, V_m$ valamelyikével. A 3.1.4 Tétel szerint $\rho_U \cong \rho_{V_i}$ valamelyik i-re, feltehetjük, hogy $\rho_U \cong \rho_{V_1}$. Tekintsük a $P : V \to V_2 + \cdots + V_m$ projekciót, melyre $\ker(P) = V_1$. Világos, hogy $P\big|_U : U \to V_2 + \cdots + V_m$ kapcsoló operátor a ρ_U és a $\rho_{V_2 + \cdots + V_m}$ ábrázolások között. Ha $P\big|_U \neq 0$, akkor az U képén egy ρ_{V_1}-gyel izomorf részábrázolást kapunk $\rho_{V_2 + \cdots + V_m} \cong \rho_{V_2} + \cdots + \rho_{V_m}$-ben, ami lehetetlen a 3.1.4 Tétel szerint. Tehát $U \leq \ker(P) = V_1$, és V_1 minimalitása miatt így $U = V_1$. $\square$

3.2. Unitér ábrázolások

3.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\rho : G \to GL(V)$ ábrázolás unitér, ha létezik olyan $(-,-) : V \times V \to K$ skaláris szorzat V-n, ami G-invariáns, azaz tetszőleges $g \in G$ és $v, w \in V$ esetén $(gv, gw) = (v, w)$. ($K = \mathbb{R}$ esetén az unitér ábrázolást ortogonális ábrázolásnak szokás nevezni.) A későbbiekben ha adott unitér ábrázolásról beszélünk, akkor azt automatikusan úgy értjük, hogy az ábrázolás terén rögzítettünk egy invariáns skaláris szorzatot, így az ábrázolás tere nem csak vektortér, hanem komplex (ill. valós) euklideszi tér, és használjuk a szokásos euklideszi térben értelmezett fogalmakat.*

Legyen $\rho : G \to GL(V)$ véges dimenziós unitér ábrázolás, és legyen $b = (b_1, \ldots, b_n)$ ortonormált bázis V-ben, tehát $(x, y) = x_b^* \cdot y_b$, ahol $*$ jelöli a megfelelő mátrix transzponáltjának a komplex konjugáltját. Akkor $x_b^* y_b = (x, y) = (gx, gy) = (\rho(g)_b x_b)^* (\rho(g)_b y_b) = x_b^* (\rho(g)_b^* \rho(g)_b) y_b$ minden $x, y \in V$-re. Ebből következik, hogy $\rho(g)_b^{-1} = \rho(g)_b^*$, azaz $\rho(g)_b$ unitér mátrix. Jelölje

$$U_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^*\}$$

az unitér mátrixok részcsoportját $GL(n, \mathbb{C})$-ben. Azt kaptuk, hogy $\rho_b : G \to U_n(\mathbb{C})$ unitér mátrixábrázolás.

A $K = \mathbb{R}$ speciális esetben ez azt jelenti, hogy ortogonális ábrázoláshoz ortonormált bázisban felírt mátrixábrázolás ortogonális mátrixokból áll, azaz $\rho_b : G \to O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^t\}$.

3.2.2. Lemma. *Véges dimenziós unitér ábrázolás teljesen reducibilis.*

Bizonyítás. Legyen $U \leq V$ invariáns altér a V véges dimenziós térben, amelyen unitéren hat egy G csoport. Ekkor U-nak létezik invariáns direkt kiegészítője, méghozzá $U^{\perp} = \{v \in V \mid \forall u \in U : \ (u,v) = 0\}$. A V véges dimenziósságából következik, hogy $V = U \oplus U^{\perp}$, és tetszőleges $v \in U^{\perp}$, $g \in G$, $u \in U$ esetén $(u, gv) = (g^{-1}u, v) = 0$, mert $g^{-1}u$ is benne van az U invariáns altérben. Tehát $U^{\perp}$ invariáns altér. $\square$

Látni fogjuk a későbbiekben, hogy az érdekes csoportábrázolások széles osztálya unitér, így a fenti Lemma garantálja a teljes reducibilitásukat. Ennek illusztrálására szolgáljon a következő:

3.2.3. Tétel. *Véges csoport tetszőleges véges dimenziós ábrázolása unitér.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy tetszőleges skaláris szorzatot az ábrázolás terén, V-n, majd ezt "átlagoljuk ki" a G csoportra, és így kapjuk a kívánt invariáns skaláris szorzatot:

Legyen $[-,-] : V \times V \to K$ tetszőleges skaláris szorzat, és definiáljuk a $(-,-) : V \times V \to K$ függvényt az

$$(x, y) := \sum_{g \in G} [gx, gy]$$

formulával. Rutin ellenőrzés mutatja, hogy $(-,-)$ skaláris szorzat, ráadásul bármely $h \in G$-ra $(hx, hy) = \sum_{g \in G} [g(hx), g(hy)] = \sum_{g \in G} [(gh)x, (gh)y] = \sum_{g \in G} [gx, gy] = (x, y)$, azaz $(-,-)$ invariáns is. $\square$

3.3. Kompakt csoportok ábrázolásainak unitérsége

Az alkalmazásokban leggyakrabban előforduló csoportok topologikus struktúrával is rendelkeznek. Emlékeztetünk a topológia fogalmára: azt mondjuk, hogy az X halmazon adott egy topológia, ha adott X úgynevezett *nyílt* részhalmazainak rendszere úgy, hogy nyíltak véges metszete és tetszőleges egyesítése is nyílt, továbbá az $\emptyset, X$ nyíltak. Egy topologikus terek közti leképezést *folytonosnak* nevezünk, ha nyílt halmazok őse képe is nyílt. Egy részhalmazt *zártnak* nevezünk, ha a komplementere nyílt. Adott X, Y topologikus terek esetén az $X \times Y$ teret ellátjuk az ún. *szorzattoplógiával.* Itt a nyílt halmazok rendszerének *bázisát* alkotják az $U \times V$ halmazok, ahol $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ nyíltak.

3.3.1. Definíció. *Legyen G csoport, amelyen adott egy topológia. Azt mondjuk, hogy G topologikus csoport, ha a csoportműveletek folytonosak, azaz a $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$ és $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ leképezések folytonosak.*

Példák. 1. $GL(n, K)$ a $K^{n \times n}$ euklideszi topológiája által indukált topológiával. (Megjegyezzük, hogy $GL(n, K)$ nyílt részhalmaz $K^{n \times n}$-ben.)

2. K^n additív csoportja az euklideszi topológiával.

3. Bármely topologikus csoport részcsoportja az indukált topológiával.

4. Tetszőlges G csoport a diszkrét topológiával. (Ebben az esetben persze a topológia semmilyen extra információt nem tartalmaz, hiszen G minden részhalmaza nyílt, következésképpen minden G-n értelmezett függvény folytonos. Néha az analógia vagy a motiváció kedvéért mégis érdemes lesz általános csoportokról szóló témyeket topologikus csoportra vonatkozó állításként megfogalmazni.)

A későbbiekben ha egy topologikus csoportnak az X topologikus téren való hatásáról beszélünk, automatikusan feltételezzük, hogy a *hatás folytonos*, azaz a $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ leképezés folytonos. Hasonlóan, topologikus csoport $\rho : G \to GL(V)$ ábrázolásról beszélve feltételezzük, hogy V *topologikus vektortér* (pl. bármely véges dimenziós vektortér az euklideszi topológiával, vagy egy Hilbert-tér az erős topológiával), és G-nek a V-n való lineáris hatása folytonos. Topologikus csoport véges dimenziós ábrázolásán tehát olyan $\rho : G \to GL(V)$ homomorfizmust értünk, amelyre (valamely b V-beli bázisra) a $\rho_b : G \to GL(n, K)$ mátrixábrázolás koordináta függvényei folytonos $G \to K$ függvények ($K = \mathbb{R}$ vagy $K = \mathbb{C}$ ellátva a szokásos topológiával). A bázisáttérés számolási szabálya mutatja, hogy ez független a bázis választásától.

3.3.2. Definíció. *Kompakt csoporton olyan topologikus csoportot értünk, ami mint topologikus tér kompakt, azaz tetszőleges nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.*

Példák. 1. Az unitér mátrixok $U(n,\mathbb{C})$ csoportja.

2. Az ortogonĺis mátrixok $O(n,\mathbb{R})$ csoportja.
3. Kompakt csoport zárt részcsoportja.
4. Tetszőleges véges csoport a diszkrét topológiával.

A 3.2.3 Tétel analógiájára érvényes a következő általánosabb tétel:

3.3.3. Tétel. *Kompakt csoport véges dimenziós ábrázolása unitér.*

Bizonyítás. Az egyszerűbb fogalmazás kedvéért feltesszük, hogy $K = \mathbb{R}$. Legyen G kompakt csoport, $\rho : G \to GL(V)$ véges dimenziós ábrázolás. Ez indukál egy ábrázolást a szimmetrikus bilineáris függvények $B^+(V)$ valós euklideszi terén, mégpedig $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ esetén $(g\cdot\beta)(x,y) := \beta(g^{-1}x, g^{-1}y)$ $(x,y \in V)$. Jelölje P a pozitív definit szimmetrikus bilineáris függvények (azaz a skaláris szorzatok) részhalmazát. A P halmaz nyílt (ez következik a pozitív definit mátrixok sarokaldeterminánsokkal való jellemzéséből). Továbbá P konvex, és G-invariáns (Ellenőrizzük!). Vegyünk egy C_0 pozitív mértékű kompakt részhalmazt P-ben (például egy tetszőleges P-beli pont körüli kellően kis sugarú zárt gömböt). Legyen $C := \bigcup_{g\in G} g\cdot C_0$, azaz C a $G\times C_0$ kompakt halmaz képe a $(g,c) \mapsto g\cdot c$ folytonos leképezésnél, így a Bolzano-Weierstrass tétel szerint kompakt. Tekintsük a C halmaz $\kappa := \frac{1}{\mu(C)}\int_{x\in C} x d\mu(x)$ tömegközéppontját (ebben a képletben μ jelöli a szokásos Lebesgue-mértéket a $B^+(V)$ euklideszi téren).

Megmutatjuk, hogy κ egy G-invariáns skaláris szorzat. Az integrál definíciója szerint κ előáll mint a limesze egy $\frac{1}{\mu(C)}\sum_{i=1}^n \mu(C_i)x_i$ alakú pontokból álló sorozatnak, ahol $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ kompakt részhalmazokra való partíciója C-nek, és $x_i \in C_i$. Ebből azonnal következik, hogy κ benne van a $\operatorname{conv}(K) = \{\sum \lambda_i x_i \mid x_i \in C,\ \sum\lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\}$ konvex burok lezártjában. Mivel C kompakt, azért $\operatorname{conv}(C)$ zárt, és P konvexitása miatt $\operatorname{conv}(C) \subset P$. Tehát $\kappa \in P$.

Végül, C konstrukciója miatt tetszőleges $g \in G$-re fennáll, hogy $g \cdot C = C$. Másfelől, a $g\cdot C$ halmaz $\kappa(g\cdot C)$ tömegközéppontja

$$\begin{aligned}\kappa(g\cdot C) &= \frac{1}{\mu(g\cdot C)}\int_{x\in g\cdot C} x d\mu(x) = \frac{1}{|\det(g)|\mu(C)}\int_{x\in C} gx d\mu(gx)\\ &= \frac{1}{|\det(g)|\mu(C)}\int_{x\in C} gx|\det(g)|d\mu(x) = \frac{1}{\mu(C)}\int_{x\in C} gx d\mu(x)\\ &= g\cdot(\frac{1}{\mu(C)}\int_{x\in C} x d\mu(x)) = g\cdot\kappa,\end{aligned}$$

tehát $g\cdot\kappa = \kappa$ minden $g \in G$-re, ami éppen azt jelenti, hogy κ invariáns skaláris szorzat V-n. □

3.3.4. Megjegyzés. *A 3.3.3 Tétel a következő általánosabb formában is igaz: kompakt csoport erősen folytonos ábrázolása egy H Hilbert-téren unitér. Továbbá minden ilyen irreducibilis ábrázolás véges dimenziós.*

4. Irreducibilis ábrázolások konstrukciója

4.1. Ábrázolások szorzata

A V és W K-vektorterek *tenzorszorzata* egy $V\otimes W$-vel jelölt K-vektortér, melynek elemei a $\sum v\otimes w$ alakú véges formális összegek (ahol $v \in V$, $w \in W$), melyekre a következő számolási szabályok érvényesek: tetszőleges $\lambda \in K$, $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ esetén $\lambda(v\otimes w) = (\lambda v)\otimes w = v\otimes(\lambda w)$, $(v_1+v_2)\otimes w = v_1\otimes w + v_2\otimes w$, $v\otimes(w_1+w_2) = v\otimes w_1 + v\otimes w_2$. (Röviden: a $\otimes : V\times W \to V\otimes W$, $(v,w)\mapsto v\otimes w$ leképezés bilineáris.) A $v\otimes w$ elemeket *elemi* (vagy 1*-rangú) tenzoroknak* nevezzük, $V\otimes W$ általános eleme elemi tenzorok összege (de ez az előállítás nem egyértelmű). Ha $b = (b_1,\dots,b_k)$ bázis V-ben és $c = (c_1,\dots,c_m)$ bázis W-ben, akkor $b\otimes c := (b_i\otimes c_j \mid i = 1,\dots,k; j = 1,\dots,m)$ bázis $V\otimes W$-ben. Tehát $V\otimes W$ egy $\dim(V)\cdot\dim(W)$ dimenziós vektortér. Hangsúlyozzuk azonban, hogy a $V\otimes W$ tenzorszorzatnak a vektortér struktúra mellett lényeges alkotóeleme a $\otimes : V\times W \to V\otimes W$ leképezés. Ez rendelkezik a következő *univerzalitási* tulajdonsággal: Tetszőleges $p : V\times W \to U$ bilineáris leképezés *átvezethető* $\otimes$-on, azaz létezik egyetlen $q : V\otimes W \to U$ lineáris leképezés, amelyre $p = q\circ\otimes$.

Példák. 1. Legyen $V = K^n$, az n hosszúságú oszlopvektorok tere, $W = (K^m)^*$, az m hosszúságú sorvektorok tere. Ekkor a $v \otimes w \mapsto v \cdot w$ leképezés megad egy $K^n \otimes (K^m)^* \to K^{n \times m}$ izomorfizmust. (Az elemi tenzorok 1-rangú mátrixoknak felelnek meg.)

2. Tenzorszorzatok leggyakrabban akkor kerülnek elő, amikor a V, W vektorterek elemei függvények, mert ilyenkor képezhetjük ezen függvények szokásos értelemben vett szorzatát. Legyenek V, W alterek az $X \to \mathbb{R}$ függvények $\mathbb{R}$-vektorterében. Legyen U a $v \cdot w$ függvények által kifeszített altér. Mivel a $p : V \times W \to U$, $(v, w) \mapsto v \cdot w$ leképezés bilineáris, ezért létezik egy $q : V \otimes W \to U$ lineáris leképezés, amelyre $p = q \circ \otimes$. Igen gyakran q izomorfizmus, azaz $U \cong V \otimes W$, ahol a $v \cdot w$ fggvény a $v \otimes w$ elemi tenzornak felel meg.

4.1.1. Definíció. *Legyenek ρ_1, ρ_2 a G csoport ábrázolásai a V_1 illetve V_2 vektortereken. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy a*

$$g \cdot (v_1 \otimes v_2) := (gv_1) \otimes (gv_2) \tag{1}$$

képlet G-nek a $V_1 \otimes V_2$-n való ábrázolását adja meg. Ezt a $\rho_1\rho_2 : G \to GL(V_1 \otimes V_2)$ ábrázolást nevezzük a ρ_1 és ρ_2 szorzatának.

(Ugyan a fenti (1) képlet csak $(\rho_1\rho_2)(g)$ elemi tenzorokon való hatását adja meg, de ennek létezik egyértelmű lineáris kiterjesztése $V_1 \otimes V_2$-re. Az egyértelműség következik abból, hogy az elemi tenzorok generálják $V_1 \otimes V_2$-t, a létezés pedig a tenzorszorzat univerzalitási tulajdonságának következménye.)

Koordinátákban, ha $b = (b_1, \dots, b_k)$ bázis V_1-ben, $c = (c_1, \dots, c_n)$ bázis V_2-ben, akkor $\rho_1\rho_2(g)_{b \otimes c} = \rho_1(g)_b \otimes \rho_2(g)_c$, ahol $\otimes$ a megfelelő mátrixok Kronecker-szorzatát jelöli. Az $A = (a_{ij})_{i,j=1}^k$ és $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ mátrixok Kronecker-szorzata az $A \otimes B = \begin{pmatrix} b_{11}A & \cdots & b_{1n}A \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1}A & \cdots & b_{kk}A \end{pmatrix}$ $kn \times kn$-es mátrix.

Példa. Jelölje 1_W a G csoport *triviális ábrázolását* a W vektortéren, azaz tetszőleges $g \in G$-re $1_W(g)$ a W identikus transzformációja. Ekkor bármely $\rho : G \to GL(V)$ ábrázolásra

$$\rho \cdot 1_W = \rho + \cdots + \rho, \text{ ahol a tagok száma } \dim(W).$$

Valóban, rögzítve egy $(b_1, \dots, b_n)$ bázist W-ben, $V \otimes W = V \otimes b_1 \oplus \cdots \oplus V \otimes b_n$ (ahol értelemszerűen $V \otimes b_i = \{v \otimes b_i \mid v \in V\}$). Nyilvánvaló, hogy $V \otimes b_i$ invariáns a $\rho \cdot 1_W$ ábrázolásra nézve, és $(\rho \cdot 1_W)_{V \otimes b_i} \cong \rho$.

4.1.2. Állítás. *Legyen $\rho : G \to GL(V)$ irreducibilis komplex ábrázolás, W n-dimenziós vektortér, és tekintsük a $\rho \cdot 1_W$ ábrázolást. Ekkor tetszőleges minimális invariáns altér $V \otimes w$ alakú alkalmas $w \in W$ vektorral.*

Bizonyítás. Az előbb láttuk, hogy $\sigma := \rho \cdot 1_W$ a ρ irreducibilis ábrázolás n példányának összege, tehát a 3.1.3 Lemma szerint teljesen reducibilis, és a 3.1.4 Tétel szerint bármely U minimális invariáns altérre $\sigma_U \cong \rho$. Rögzítsünk egy $T : U \to V$ izomorfizmust σ_U és ρ között. Rögzítve egy $(b_1, \dots, b_n)$ bázist W-ben, bármely $u \in U$ egyértelműen előáll $u = u_1 \otimes b_1 + \cdots + u_n \otimes b_n$ alakban, jelölje $T_i : U \to V$ az $u \mapsto u_i$ leképezést ($i = 1, \dots, n$). Világos, hogy T_i kapcsoló operátor σ_U és ρ között (hiszen $\sigma(g)(u) = \rho(g)(u_1) \otimes b_1 + \cdots + \rho(g)(u_n) \otimes b_n$), ezért $T_i = \lambda_i T$ alkalmas $\lambda_i \in \mathbb{C}$-vel (alkalmazzuk a 2.2.2 Lemmát $T_i \circ T^{-1}$-re). Tehát $u = \lambda_1 T(u) \otimes b_1 + \cdots + \lambda_n T(u) \otimes b_n = T(u) \otimes (\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n)$, és $U \subseteq V \otimes (\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n)$. Nyilvánvaló, hogy ez utóbbi altéren való hatása G-nek izomorf ρ-val, tehát ez egy minimális invariáns altér, így egyenlő U-val. □

4.2. Duális ábrázolás

Egy V vektortér *duálisa* a $V' = \{\xi \mid \xi : V \to K \text{ lineáris}\}$ vektortér. A $\rho : G \to GL(V)$ *ábrázolás duálisának* nevezzük a $(g \cdot \xi)(v) := \xi(g^{-1}v)$ ($g \in G$, $\xi \in V'$, $v \in V$) formulával megadott $\rho' : G \to GL(V')$ ábrázolást.

A $b = (b_1, \dots, b_n)$ V-beli bázishoz tartozó *duális bázis* $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, ahol

$$\beta_i(b_j) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j; \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

Erre érvényes a $\xi(v) = \xi_\beta^t \cdot v_b$ összefüggés.

Nézzük meg, mi lesz a duális ábrázoláshoz tartozó mátrixábrázolás. Mivel

$$\begin{aligned} \xi_\beta^t \rho'_\beta(g)^t \rho_b(g) v_b &= (\rho'_\beta(g)\xi_\beta)^t(\rho_b(g)v_b) \\ &= (g\xi)_\beta \cdot (gv)_b = (g\xi)(gv) = \xi(g^{-1}gv) \\ &= \xi(v) = \xi_\beta^t \cdot v_b \end{aligned}$$

minden $\xi \in V'$ és $v \in V$-re, azért

$$\rho'_\beta(g) = (\rho_b(g)^{-1})^t. \tag{2}$$

Ha ρ unitér és b ortonormált, akkor a fenti formulából azt kapjuk, hogy $\rho'_\beta(g) = \overline{\rho_b(g)}$ (ahol a felülvonás komplex konjugáltat jelöl). Speciálisan, ha $K = \mathbb{R}$ és ρ ortogonális, akkor $\rho \cong \rho'$.

4.2.1. Állítás. *A ρ véges dimenziós ábrázolás akkor és csak akkor irreducibilis, ha ρ' irreducibilis.*

Bizonyítás. Tetszőleges $\rho : G \to GL(V)$ ábrázolásra a $v \mapsto (\xi \mapsto \xi(v))$, $V \to (V')'$ természetes izomorfizmus a ρ és $(\rho')'$ ábrázolások közti izomorfizmus. Ezért elegendő azt megmutatni, hogy ρ' irreducibilitásából következik ρ irreducibilitása. Legyen W invariáns altér V-ben. Ekkor $W^\perp := \{\xi \in V' \mid \xi\big|_W = 0\}$ nyilvánvalóan invariáns altér V'-ban, így $W^\perp = \{0\}$, vagy $W^\perp = V'$. Az első esetben $W = V$, a másodikban $W = \{0\}$. □

4.3. Direkt szorzat ábrázolásai

A G és H csoportok *direkt szorzata* $G \times H = \{(g, h) \mid g \in G,\ h \in H\}$, ellátva a $(g, h) \cdot (g', h') := (gg', hh')$ művelettel. Világos, hogy ez csoport. A $(g, 1_H)$ alakú elemek egy G-vel izomorf normálosztót alkotnak $G \times H$-ban. Hasonlóan, a $(1_G, h)$ alakú elemek egy H-val izomorf normálosztót alkotnak. Ez a két normálosztó diszjunkt (azaz az egységelemen kívül nincs közös elemük), és generálják $G \times H$-t.

Fordítva, tegyük fel, hogy a D csoportnak van két normálosztója, G és H úgy, hogy $G \cap H = \{1\}$ és $D = \langle G, H\rangle$. Ekkor $D \cong G \times H$. Valóban, tekintsük a $\pi : G \times H \to D$, $(g, h) \mapsto gh$ leképezést. Mivel G és H elemei páronként felcserélhetők (ld. 1/6 feladat), azért π homomorfizmus. A π képe tartalmazza G-t és H-t, tehát tartalmazza a generátumukat, vagyis az egész D-t. A $gh = 1$-ből következik $g = h^{-1} \in G \cap H$, tehát $g = h = 1$, azaz π injektív. Így a Homomorfizmus-tétel szerint π izomorfizmus $G \times H$ és D között.

4.3.1. Definíció. *Tegyük fel, hogy adott a G_1 és G_2 csoportok egy-egy ábrázolása, legyenek ezek $\rho_i : G \to GL(V_i)$ $(i = 1, 2)$. Ekkor tekintsük a $G_1 \times G_2$ direkt szorzatnak a $(g_1, g_2) \cdot v_1 \otimes v_2 := (g_1v_1) \otimes (g_2v_2)$ képlettel definiált $\rho_1 \otimes \rho_2 : G_1 \times G_2 \to GL(V_1 \otimes V_2)$ ábrázolását. Ezt nevezzük a ρ_1 és ρ_2 ábrázolások tenzor-szorzatának.*

Ne tévesszük össze ezt a fogalmat az ábrázolások szorzatának fogalmával, ahol egyetlen csoport két ábrázolásából konstruáltuk ugyanazon csoport újabb ábrázolását. Legyenek ρ_1, ρ_2 a G csoport ábrázolásai. A $\rho_1 \otimes \rho_2$ a $G \times G$ csoport ábrázolása. Tekintsük a $d : G \to G \times G$, $g \mapsto (g, g)$ homomorfizmust. A ρ_1 és ρ_2 szorzata és direkt szorzata közti kapcsolatot fejezi ki a $(\rho_1 \otimes \rho_2) \circ d = \rho_1 \cdot \rho_2$ formula.

4.3.2. Tétel. *Véges dimenziós komplex irreducibilis ábrázolások direkt szorzata is irreducibilis.*

Bizonyítás. Legyenek $\rho_i : G_i \to GL(V_i)$ $(i = 1, 2)$ véges dimenziós komplex irreducibilis ábrázolások. Mint korábban megjegyeztük, G_1 és G_2 azonosítható $G_1 \times G_2$ egy-egy részcsoportjával, és $G_1 \times G_2$ tetszőleges ábrázolását megszoríthatjuk G_1-re illetve G_2-re. Nyilvánvaló, hogy mint G_1 ábrázolása, $(\rho_1 \otimes \rho_2)\big|_{G_1} = \rho_1 \cdot 1_{V_2} \cong \rho_1 + \cdots + \rho_1$.

Legyen W minimális $G_1 \times G_2$-invariáns altér $V_1 \otimes V_2$-ben. A W tartalmaz egy minimális G_1-invariáns alteret, legyen U ilyen. A 4.1.2 Állítás szerint $U = V_1 \otimes w$ valamely $w \in V_2$-re. Tetszőleges $v_1 \in V_1$ esetén tekintsük az $U(v_1) := \{v_2 \in V_2 \mid v_1 \otimes v_2 \in W\}$ részhalmazt V_2-ben. Ez egy G_2-invariáns altér, ugyanis ha $v_1 \otimes v_2 \in W$ és $h \in G_2$, akkor $(1_G, h)v_1 \otimes v_2 = v_1 \otimes hv_2$. Másrészt $U(v_1) \neq \{0\}$, hiszen $w \in U(v_1)$. Ezért ρ_2 irreducibilátásából következik, hogy $U(v_1) = V_2$ minden $v_1 \in V_1$-re, ami éppen azt jelenti, hogy $W = V_1 \otimes V_2$. □

4.4. Ábrázolás mátrix elemei

Jelölje $\mathbb{C}[G]$ a $G \to \mathbb{C}$ függvények halmazát, ez egy $\mathbb{C}$-vektortér a pontonkénti összeadásra és skalárral való szorzásra nézve, a dimenziója $|G|$.

4.4.1. Definíció. *Legyen $\rho : G \to GL(V)$ véges dimenziós komplex ábrázolás, $b = (b_1, \dots, b_n)$ bázis V-ben. Jelölje $\rho_{ij}(g)$ a $\rho(g)_b$ mátrix (i,j)-edik elemét. A $\rho_{ij} \in \mathbb{C}[G]$ $(1 \leq i,j \leq n)$ függvényeket a ρ ábrázolás (b bázisra vonatkozó) mátrix-elemeinek nevezzük. Tekintsük az $M(\rho) := \{\sum a_{ij}\rho_{ij} \mid a_{ij} \in \mathbb{C}\}$ alteret $\mathbb{C}[G]$-ben. Ez a ρ ábrázolás mátrix-elemeinek a tere.*

Az $M(\rho)$ már nem függ a bázis választásától. Ugyanis tetszőleges $f = \sum a_{ij}\rho_{ij} \in M(\rho)$ esetén jelölje A azt a $V \to V$ lineáris leképezést, amelynek a b bázisra vonatkozó mátrixa $A_b = (a_{ji})_{i,j=1}^n$. Ekkor fennáll, hogy $f(x) = Tr(A_b \cdot \rho(x)_b) = Tr(A \circ \rho(x))$, tehát $M(\rho)$-t megadhatjuk a b bázira való hivatkozás nélkül a következő módon:

$$M(\rho) = \{x \mapsto Tr(A \cdot \rho(x)) \mid A \in L(V)\},$$

ahol $L(V)$ jelöli a $V \to V$ lineáris leképezések halmazát, és a szokásnak megfelelően az $L(V)$-beli $\circ$ operációt szorzásnak írjuk.

4.4.2. Állítás. *(i) Ha $\rho_1 \cong \rho_2$, akkor $M(\rho_1) = M(\rho_2)$.*

(ii) Ha $\rho = \rho_1 + \dots + \rho_m$, akkor $M(\rho) = M(\rho_1) + \dots + M(\rho_m)$ (itt a jobboldalon $\mathbb{C}[G]$ megfelelő altereinek az összegéről van szó).

Bizonyítás. (i) Izomorf ábrázolásokhoz – alkalmas bázisokat választva – ugyanaz a mátrix ábrázolás tartozik.

(ii) Az 2.3 alfejezetben már láttuk, hogy alkalmas bázist választva a ρ ábrázolás terében, a megfelelő nem-nulla mátrixelemek halmaza éppen az egyesítése a ρ_i ábrázolások mátrix-elemeiből álló halmazoknak. □

4.4.3. Definíció. *Tetszőleges G csoport esetén az*

$$R : G \times G \to GL(\mathbb{C}[G])$$
$$((g_1, g_2) \cdot f)(x) := f(g_2^{-1} x g_1) \; g_1, g_2, x \in G, \; f \in \mathbb{C}[G]$$

formulával megadott ábrázolást a kétoldali reguláris ábrázolásnak nevezzük.

4.4.4. Tétel. *A $\rho : G \to GL(V)$ véges dimenziós komplex irreducibilis ábrázolás mátrix-elemeinek $M(\rho)$ tere $G \times G$-invariáns altér $\mathbb{C}[G]$-ben, és mint $G \times G$ ábrázolása, $R_{M(T)} \cong \rho \otimes \rho'$.*

A fenti tétel bizonyítása előtt nézzük meg az alábbi, gyakran használatos lemmát:

4.4.5. Lemma. *Legyen $\rho : G \to GL(V)$ véges dimenziós ábrázolás. Tekintsük az $\mathrm{Ad} : G \times G \to GL(L(V))$, $\mathrm{Ad}(g,h)(A) := \rho(g) \circ A \circ \rho(h^{-1})$, $(g, h \in G, A \in L(V))$ ábrázolást. Ekkor a $\nu : V \otimes V' \to L(V)$, $\nu(v \otimes \xi)(w) = \xi(w)v$ $(v, w \in V, \xi \in V')$ leképezés egy izomorfizmus a $G \times G$ csoport $\rho \otimes \rho'$ és Ad ábrázolásai között.*

Bizonyítás. Tetszőleges $g, h \in G$, $v, w \in V$, $\xi \in V'$ esetén fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \nu((g,h) \cdot v \otimes \xi)(w) &= \nu(gv \otimes h\xi)(w) = (h\xi)(w)gv = \xi(h^{-1}w)gv \\ &= g(\xi(h^{-1}w)v) = (\mathrm{Ad}(g,h) \cdot \nu(v \otimes \xi))(w), \end{aligned} \tag{3}$$

ami éppen azt jelenti, hogy ν kapcsoló operátor a megfelelő ábrázolások között. Egy kapcsoló operátor magtere mindig invariáns altér. Ezért $\ker(\nu)$ invariáns altér $V \otimes V'$-ben, és világos, hogy $\nu \neq 0$, azaz $\ker(\nu) \neq V \otimes V'$. A 4.3.2 Tételből tudjuk, hogy $\rho \otimes \rho'$ irreducibilis. Ezért $\ker(\nu) = \{0\}$, azaz ν injektív. A $V \otimes V'$ és az $L(V)$ dimenzióinak egyezése miatt ν szükségképpen szürjektív is. Beláttuk tehát, hogy ν egy izomorfizmus $\rho \otimes \rho'$ és Ad között. □

A 4.4.4 Tétel Bizonyítása. Tekintsük a $\mu : L(V) \to M(\rho)$, $\mu(A)(x) := Tr(A \cdot \rho(x))$ $(A \in L(V),\ x \in G)$ lineáris leképezést, korábban már láttuk, hogy ez szürjektív. A következő számolás mutatja, hogy $M(\rho)$ $G \times G$-invariáns, és μ kapcsoló operátor a 4.4.5 Lemmában definiált Ad és a $R_{M(\rho)}$ ábrázolások között: bármely $g, h \in G$-re,

$$\begin{aligned} \mu((g,h)\cdot A)(x) &= \mu(\rho(g)\cdot A\cdot \rho(h^{-1}))(x) = Tr(\rho(g)A\rho(h^{-1}\rho(x)) \\ &= Tr(A\rho(h^{-1})\rho(x)\rho(g)) = Tr(A\rho(h^{-1}xg) = \mu(A)(h^{-1}xg) \\ &= (R(g,h)\cdot\mu(A))(x). \end{aligned} \tag{4}$$

A 4.3.2 Tételből és a 4.4.5 Lemából tudjuk, hogy $G \times G$ irreducibilisen hat $L(V)$-n, így $\ker(\mu)$ csak a $\{0\}$ triviális altér lehet. Tehát μ injektív is. Beláttuk tehát, hogy μ egy izomorfizmus Ad és $R_{M(T)}$ között, így a 4.4.5 Lemma mutatja a kívánt állítást. □

A G csoport kétféleképpen is beágyazható $G \times G$-be, a $\iota_1 : G \to G \times G$, $g \mapsto (g, 1)$, illetve a $\iota_2 : G \to G \times G$, $g \mapsto (1, g)$ homomorfizmusok által. A G csoport $J := R \circ \iota_1 : G \to GL(\mathbb{C}[G])$ ábrázolását *jobboldali reguláris ábrázolásnak*, míg a $B := R \circ \iota_2 : G \to GL(\mathbb{C}[G])$ ábrázolást *baloldali reguláris ábrázolásnak* nevezzük.

4.4.6. Következmény. *Az alábbiakban $\rho, \rho_i : G \to GL(V)$ véges dimenziós komplex irreducibilis ábrázolások.*

1. *$M(\rho)$ invariáns a G jobboldali reguláris ábrázolására nézve, és*
$$J_{M(\rho)} \cong \underbrace{\rho + \cdots + \rho}_{\dim(V)\ darab}\ .$$
2. *$M(\rho)$ invariáns a G baloldali reguláris ábrázolására nézve, és*
$$B_{M(\rho)} \cong \underbrace{\rho' + \cdots + \rho'}_{\dim(V)\ darab}\ .$$
3. $\dim_{\mathbb{C}}(M(\rho)) = \dim(V)^2$
4. *G minden irreducibilis ábrázolása megjelenik $\mathbb{C}[G]$ részeként.*
5. $R_{M(\rho_1)} \cong R_{M(\rho_2)} \Rightarrow \rho_1 \cong \rho_2$
6. *Ha $\rho_1, \ldots, \rho_q$ páronként nem-izomorfak, akkor $M(\rho_1), \ldots, M(\rho_q)$ lineárisan független alterek $\mathbb{C}[G]$-ben.*

Bizonyítás. 1. $J_{M(\rho)} = R_{M(\rho)} \circ \iota_1 \cong (\rho \otimes \rho') \circ \iota_1 = \rho \cdot 1_{V'} \cong \rho + \cdots + \rho$. 2. bizonyítása hasonló.

3. és 4. azonnal következnek a 4.4.4 Tételből.

5. $R_{M(\rho_1)} \cong R_{M(\rho_2)}$-ből az 1. szerint következik $\rho_1 + \cdots + \rho_1 \cong \rho_2 + \cdots + \rho_2$, ahonnan az 3.1.4 Tétel (iii) alapján $\rho_1 \cong \rho_2$.

6. A 4.3.2 és 4.4.4 Tételekből tudjuk, hogy $G \times G$ páronként nem-izomorfan és irreducibilisen hat a $\mathbb{C}[G]$ tér $M(\rho_1), \ldots, M(\rho_q)$ alterein. Ezért ezek az alterek szükségképpen lineárisan függetlenek (ld. 3.1.5). □

5. Véges csoportok komplex ábrázolásai

5.1. A reguláris ábrázolás felbontása

Ebben a fejezetben végig G véges csoport, ekkor $\mathbb{C}[G]$ véges dimenziós. A 3.2.2 Lemma és a 3.2.3 Tétel szerint $J : G \to GL(\mathbb{C}[G])$ teljesen reducibilis. Bontsuk irreducibilisek összegére, a 4.4.6 Következményből tudjuk, hogy ezen véges sok összeadandó között G irreducibilis ábrázolásainak minden izomorfia típusa megjelenik.

Jelölés: Legyen $\rho_k : G \to GL(V_k)$, $k = 1, \ldots, q$ a G véges csoport irreducibilis komplex ábrázolásainak izmorfia erejéig teljes (és természetesen ismétlés nélküli) listája, $n_k := \dim(V_k)$.

5.1.1. Tétel. $\mathbb{C}[G] = M(\rho_1) \oplus \cdots \oplus M(\rho_q)$

Bizonyítás. A 4.4.6 Következmény szerint $M(\rho_1), \ldots, M(\rho_q)$ lineárisan függetlenek, azaz az összegük direkt összeg. Elegendő azt megmutatni, hogy generálják $\mathbb{C}[G]$-t.

A G bármely véges dimenziós ρ ábrázolására $\rho \cong m_1\rho_1 + \cdots + m_q\rho_q$, ahol m_i jelöli a ρ_i multiplicitását ρ-ban. Ezért a 4.4.2 Állítás szerint $M(\rho) \subseteq M(\rho_1) + \cdots + M(\rho_1) + \cdots + M(\rho_q) + \cdots + M(\rho_q) = M(\rho_1) + \cdots + M(\rho_q)$. Speciálisan, $M(\rho_1) + \cdots + M(\rho_q) \supseteq M(J)$.

Belátjuk, hogy $M(J) \supseteq \mathbb{C}[G]$. Legyen $f_1, \ldots, f_d$ bázis $\mathbb{C}[G]$-ben, és J ezen bázisra vonatkozó mátrix elemeit jelölje r_{ij}, $(1 \le i, j \le d)$. Tetszőleges $j \in \{1, \ldots, d\}$-re fennáll, hogy

$$\begin{aligned} f_j(g) &= f_j(1_G \cdot g) = J(g)(f_j)(1_G) \\ &= \sum_{i=1}^{d}(r_{ij}(g)f_i)(1_G) = \sum_{i=1}^{d} f_i(1_G)r_{ij}(g), \end{aligned}$$

tehát $f_j = \sum_{i=1}^{d} f_i(1_G)r_{ij} \in M(J)$ minden j-re. □

5.1.2. Következmény. *1.* $n_1^2 + \cdots + n_q^2 = |G|$

2. $J \cong \sum_{i=1}^{q} n_i\rho_i$.

Bizonyítás. A 4.4.6 Következmény és a 5.1.1 Tétel alapján $|G| = \dim(\mathbb{C}[G]) = \sum_{i=1}^{q} \dim(M(\rho_i)) = \sum_{i=1}^{q} n_q^2$, és $J = \sum_{i=1}^{q} J_{M(\rho_i)} \cong \sum_{i=1}^{q} n_i\rho_i$. □

5.2. Karakterek

5.2.1. Definíció. *A $\rho : G \to GL(V)$ véges dimenziós ábrázolás karaktere a $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto Tr(\rho(g))$ függvény. Világos, hogy $\chi_\rho \in M(\rho)$.*

- Ha $\rho \cong \sigma$, akkor $\chi_\rho = \chi_\sigma$, mivel hasonló mátrixok nyoma egyenlő.
- $\chi_{\rho+\sigma} = \chi_\rho + \chi_\sigma$, mert blokkdiagonális mátrixok nyoma a diagonális blokkok nyomainak összege.
- $\chi_{\rho\cdot\sigma} = \chi_\rho \cdot \chi_\sigma$, mert mátrixok Kronecker-szorzatának a nyoma a megfelelő nyomok szorzata.
- $\chi_{\rho'}(g) = \chi_\rho(g^{-1})$ a (2) szerint.
- Bármely $g, x \in G$-re fennáll, hogy $\chi_\rho(g^{-1}xg) = \chi_\rho(x)$, mert $Tr(\rho(g^{-1}xg)) = Tr(\rho(g)^{-1}\rho(x)\rho(g)) = Tr(\rho(x))$.

A karakterek benne vannak a *centrális függvények* $\mathrm{Cent}(G) := \{f \in \mathbb{C}[G] \mid \forall g, x \in G : \; f(g^{-1}xg) = f(x)\}$ terében. Ezek azok a $G \to \mathbb{C}$ függvények, amelyek G úgynevezett *konjugált osztályain* állandók. A konjugálás G-nek az a sajátmagán való $\gamma : G \to S(G)$ hatása, amit a $\gamma(g)(x) := gxg^{-1}$ formula ad meg. Az x csoportelem pályáját a γ hatásnál az *x konjugált osztályának* nevezzük, és x^G-vel jelöljük. Azt mondjuk, hogy x és y konjugáltak, ha ugyanabban a konjugált osztályban vannak. Lévén egy csoporthatás pályái, a konjugált osztályok partícióját adják G-nek. Az x stablilizátorát $C_G(x)$-szel jelöljük, és az x *centralizátorának* hívjuk. (Az elnevezés oka, hogy $C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$.) A 1.3.3 Következményt erre az esetre alkalmazva kapjuk az $|x^G| = [G : C_G(g)]$ összefüggést.

5.2.2. Állítás. *G irreducibilis ábrázolásainak karakterei, $\chi_{\rho_1}, \ldots, \chi_{\rho_q}$ bázist alkotnak* $\mathrm{Cent}(G)$*-ben.*

Bizonyítás. A 5.1.1 Tétel szerint bármely $f \in \mathrm{Cent}(G)$ egyértelműen felírható $f = f_1 + \cdots + f_q$ alakban, ahol $f_i \in M(\rho_i)$. Megmutatjuk, hogy $f_i \in \mathrm{Cent}(G)$. Valóban, az, hogy f centrális, ekvivalens azzal, hogy $R(g,g) \cdot f = f$ minden $g \in G$-re. Tehát $f = R(g,g) \cdot f = \sum_{i=1}^{q} R(g,g) \cdot f_i$, és mivel $M(\rho_i)$ R-invariáns, f-nek ez utóbbi összegként való előállítása megegyezik az eredetivel. Következésképpen $R(g,g)f_i = f_i$ minden $g \in G$-re, ami azt jelenti, hogy $f_i \in \mathrm{Cent}(G)$ $(i = 1, \ldots, q)$. Ezért az állítás következik az alábbi lemmából. □

5.2.3. Lemma. *Tetszőleges $\rho : G \to GL(V)$ irreducibilis ábrázolás esetén $M(\rho) \cap \mathrm{Cent}(G) = \mathbb{C}\chi_\rho$.*

Bizonyítás. Tekintsük a 4.4.4 Tétel bizonyításában szereplő $\mu : L(V) \to M(\rho)$ izomorfizmust a $G \times G$ csoport Ad és $R_{M(\rho)}$ ábrázolásai között. A centrális függvények azoknak az $A \in L(V)$ lineáris transzformációknak felelnek meg, amelyekre $\rho(g)A\rho(g)^{-1} = A$ minden $g \in G$-re. A 2.2.2 Lemma szerint ezek pontosan a $\lambda \cdot \mathrm{id}_V$ transzformációk ($\lambda \in \mathbb{C}$). A μ izomorfizmusnál a $\lambda \cdot \mathrm{id}_V$ képe $\lambda\chi_\rho$. □

5.2.4. Következmény. *1. G páronként nem-izomorf komplex irreducibilis ábrázolásainak a száma megegyezik G konjugált osztályainak számával.*

2. Az ábrázolás izomorfia-típusát meghatározza a karaktere, azaz ha a ρ és σ véges dimenziós komplex ábrázolásokra $\chi_\rho = \chi_\sigma$, akkor $\rho \cong \sigma$.

Bizonyítás. 1. A 5.2.2 Állítás szerint q megegyezeik $\mathrm{Cent}(G)$ dimenziójával, ami nyilvánvalóan a G-beli konjugált osztályok száma.

2. Bontsuk az azonos karakterrel rendelkező ábrázolásokat irreducibilisek összegére, mondjuk $\rho \cong \sum_{i=1}^q m_i\rho_i$ és $\sigma \cong \sum_{i=1}^q m_i'\rho_i$. Innen

$$\sum_{i=1}^q m_i\chi_{\rho_i} = \chi_\rho = \chi_\sigma = \sum_{i=1}^q m_i'\chi_{\rho_i}.$$

A $\chi_{\rho_1}, \dots, \chi_{\rho_q}$ karakterek lineárisan függetlenek a 5.2.2 Állítás szerint, tehát $m_1 = m_1', \dots, m_q = m_q'$, azaz $\rho \cong \sigma$. □

5.3. Karakterek ortogonalitása

Kezdjük két általános érvényű (nem csak véges csoportokra vonatkozó) lemmával.

5.3.1. Lemma. *Legyen $\rho : G \to GL(V)$ véges dimenziós ábrázolás, és W_1, W_2 minimális invariáns alterek V-ben úgy, hogy ρ_{W_1} és ρ_{W_2} nem-izomorfak. Ekkor W_1 és W_2 merőlegesek bármilyen invariáns skaláris szorzatra nézve.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy invariáns skaláris szorzatot. Tekintsük a $V = W_1 \oplus W_1^\perp$ felbontást, és a hozzá tartozó $p : V \to W_1$ vetítést. Nyilvánvaló, hogy ez egy kapcsoló operátor ρ és ρ_{W_1} között. Következésképpen $p|_{W_2} : W_2 \to W_1$ kapcsoló operátor a ρ_{W_1} és ρ_{W_2} nem-izomorf irreducibilis ábrázolások között, ezért 2.2.1 Lemma szerint $p|_{W_2} = 0$. Ez éppen azt jelenti, hogy $W_2 \le W_1^\perp$. □

5.3.2. Lemma. *Ha létezik invariáns skaláris szorzat a $\rho : G \to GL(V)$ véges dimenziós komplex irreducibilis ábrázolás terén, akkor az skalárszorzó erejéig egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $(-,-)$ invariáns skaláris szorzatot V-n. Elemi lineáris algebrai tény, hogy bármelyik másik β skaláris szorzathoz létezik olyan $B \in L(V)$, amellyel $\beta(x,y) = (x, B(y))$ minden $x, y \in V$-re. Tegyük fel, hogy β is G-invariáns. Akkor minden $g \in G$-re $(x, B(y)) = \beta(x,y) = \beta(gx, gy) = (gx, B(gy)) = (x, g^{-1} \cdot B(gy)) = (x, (\rho(g)^{-1}B\rho(g))(y))$, amiből $\rho(g)^{-1}B\rho(g) = B$ következik. Ez egyenértékű azzal, hogy B a ρ irreducibilis ábrázolás endomorfizmusa, így a 2.2.2 Lemma miatt valamilyen $\lambda \in \mathbb{C}$ skalárral való szorzás. Ez éppen azt jelenti, hogy $\beta = \lambda \cdot (-,-)$. □

Vezessük be a $\mathbb{C}[G]$ téren az

$$(f_1, f_2) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g) \tag{5}$$

skaláris szorzatot. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez R-invariáns.

A 3.2.3 Tétel alapján feltehetjük, hogy ρ_k unitér ($k = 1, \dots, q$), azaz adott V_k-n egy invariáns skaláris szorzat.

5.3.3. Állítás. *Jelölje $\rho_{k,i,j}$ $(1 \leq i,j \leq n_k)$ a ρ_k mátrixelemeit V_k egy rögzített ortonormált bázisára vonatkozóan. Akkor*

$$(\rho_{k,i,j}, \rho_{k',i',j'}) = \begin{cases} \frac{1}{n_k}, & \text{ha } k = k', i = i', j = j'; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha $k \neq k'$, akkor a 4.4.4 Tétel szerint $R_{M(\rho_k)}$ és $R_{M(\rho_{k'})}$ nem-izomorf irreducibilis ábrázolásai $G \times G$-nek, így a 5.3.1 Lemmából következik, hogy $M(\rho_k) \perp M(\rho_{k'})$.

A továbbiakban $k = k'$ rögzített, a jelölések egyszerűsítése végett legyen $V := V_k$, $\rho := \rho_k$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ ortonormált bázis V-ben.

Vezessük be az $(A, B) := Tr(A^*B)$ skaláris szorzatot $L(V)$-n (itt A^* a V euklideszi tér A transzformációjának az adjungáltját jelöli). Ez Ad-invariáns, hiszen

$$\begin{aligned} &(\mathrm{Ad}(g,h) \cdot A, \mathrm{Ad}(g,h) \cdot B) \\ &= Tr((\rho(g)A\rho(h)^{-1})^*(\rho(g)B\rho(h)^{-1})) \\ &= Tr((\rho(h)^{-1})^*A^*\rho(g)^*\rho(g)B\rho(h)^{-1}) \\ &= Tr(A^*B) = (A, B) \end{aligned}$$

(emlékeztetünk rá, hogy ρ unitérsége miatt $\rho(g)^* = \rho(g)^{-1}$). Azonosítsuk az $M(\rho)$ teret $L(V)$-vel a a 4.4.4 Tétel bizonyításában definiált $\mu : L(V) \to M(\rho)$ izomorfizmus által. Mivel Ad $\cong R_{M(\rho)}$ véges dimenziós komplex irreducibilis ábrázolása $G \times G$-nek, azért a 5.3.2 Lemma szerint az $L(V) = M(\rho)$-ban skalárszorzó erejéig csak egy $G \times G$-invariáns skaláris szorzat van, tehát a most definiált $L(V)$-beli skaláris szorzat a (5) skaláris szorzat konstansszorosa. Vagyis alkalmas $\lambda \in \mathbb{C}$-vel fennáll, hogy $(\mu(A), \mu(B)) = \lambda Tr(A^*B)$ minden $A, B \in L(V)$-re. Világos, hogy $\rho_{ij} = \mu(E^{ji})$, ahol E^{ij} az a $V \to V$ lineáris transzformáció, amelynek a b bázisban felírt E_b^{ij} mátrixában az (i,j)-edik eleme 1, a többi 0. (Valóban, $\mu(E^{ji})(x) = Tr(E^{ji}\rho(x)) = Tr(E_b^{ji}\rho_b(x)) = \rho_{ij}(x)$.) Ezért

$$\begin{aligned} &(\rho_{ij}, \rho_{i'j'}) = (\mu(E^{ji}), \mu(E^{j'i'})) \\ &= \lambda Tr((E^{ij})^*E^{i'j'})\lambda Tr(E^{ji}E^{ij}) = \lambda Tr(E_b^{ji}E_b^{ij}) \\ &= \begin{cases} \lambda, & \text{ha } i = i', j = j'; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \end{aligned}$$

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy $\lambda = \frac{1}{n}$, ahol $n = \dim(V)$. Mivel $\rho(g)_b$ unitér mátix, ezért például az első oszlopának az önmagával vett skaláris szorzata 1, azaz

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \overline{\rho_{i1}(g)}\rho_{i1}(g) \ (g \in G).$$

Összegezzük ezeket az egyenlőségeket, ahogy g befutja G-t, $|G|$-mal leosztva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{n} \overline{\rho_{i1}(g)}\rho_{i1}(g) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{i1}(g)}\rho_{i1}(g) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\rho_{i1}, \rho_{i1}) = n \cdot \lambda. \end{aligned}$$

□

A jelölések egyszerűsítse végett legyen $\chi_k := \chi_{\rho_k}$ $(k = 1, \ldots, q)$.

5.3.4. Tétel. *A $\chi_1, \ldots, \chi_q$ karakterek ortonormált bázist alkotnak* Cent(G)*-ben.*

Bizonyítás. Definíció szerint $\chi_k = \sum_{i=1}^{n_k} \rho_{k,i,i}$, így alkalmazva a 5.3.3 Állítást kapjuk, hogy

$$(\chi_k, \chi_{k'}) = (\sum_i \rho_{k,i,i}, \sum_j \rho_{k',j,j}) = \sum_{i,j} (\rho_{k,i,i}, \rho_{k',j,j})$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq k'; \\ \sum_i (\rho_{k,i,i}, \rho_{k,i,i}) = n_k \cdot \frac{1}{n_k} = 1, & \text{ha } k = k'. \end{cases}$$

□

5.3.5. Következmény. *Legyen ρ véges dimenziós komplex ábrázolása G-nek. Ekkor*

1. $\rho \cong \sum_{k=1}^{q} (\chi_\rho, \chi_k) \rho_k$
2. *ρ akkor és csak akkor irreducibilis, ha $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$.*

Bizonyítás. 1. azonnal következik a 5.3.4 Tételből.

2. $\rho \cong \sum_{k=1}^{q} m_k \rho_k$ alkalmas m_k nem-negatív egészekre. Ekkor $(\chi_\rho, \chi_\rho) = (\sum_{i=1}^{q} \chi_i, \sum_{j=1}^{q} \chi_j) = \sum_{k=1}^{q} m_k^2$, és nem-negatív egészek négyzetösszege csak úgy lehet 1, ha valamelyik közülük 1, és a többi 0.
□

Megjegyzés. A karakter nagyon hatékony számolási eszköz ábrázolásokkal kapcsolatos kérdések eldöntésére. Definíció szerint egy n-dimenziós ábrázolást $|G| \cdot n^2$ számmal lehet megadni (minden csoportelemhez hozzárendelünk egy $n \times n$-es mátrixot). Ehhez képest a karaktert jóval kevesebb számmal lehet megadni, hiszen elég megmondani minden egyes konjugált osztályhoz egy számot (általában nem-kommutatív csoport esetén a konjugált osztályok száma jóval kisebb, mint a csoport elemszáma). Mégis, láttuk a 5.2.4 Következményben, hogy a karakter már meghatározza az ábrázolás izomorfia típusát. Továbbá pusztán az ábrázolás karakterének ismeretében egyszerű számolással eldönthető, hogy a kérdéses ábrázolás irreducibilis-e (ld. 5.3.5 Következmény). Sőt, ha ismerjük az irreducibilis karaktereket, akkor az ábrázolás karakteréből ki tudjuk számítani az irreducibilis komponensek multiplicitásait.

Jelölje $C_1, \ldots, C_q$ a G konjugált osztályait, és mint korábban, $\chi_1, \ldots, \chi_q$ az irreducibilis karaktereket. A G csoport *karaktertáblája* egy $q \times q$-as mátrix, melynek sorait az irreducibilis karakterek, oszlopait pedig a konjugált osztályok indexelik, és a χ_i sorában és C_j oszlopában álló elem $\chi_i(g)$, ahol $g \in C_j$.

Példák.

1. $C_2 = \{g, g^2 = 1\}$, a kételemű ciklikus csoport karaktertáblája:

	$\{1\}$	$\{g\}$
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

2. $C_3 = \{g, g^2, g^3 = 1\}$, a háromelemű ciklikus csoport karaktertáblája

	$\{1\}$	$\{g\}$	$\{g^2\}$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ε	ε^2
χ_3	1	ε^2	ε

,

ahol $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ harmadik egységgyök.

3. D_3, a harmadfokú diéder csoport (ld. 1. Fejezet feladatai) karaktertáblája:

	$\{1\}$	$\{f, f^2\}$	$\{t, ft, f^2t\}$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

Nézzük meg, hogy a karakterek ortogonalitása hogyan jelenik meg karaktertáblában. Módosítsuk ideiglenesen a karaktertáblát úgy, hogy az (i, j)-edik elemét szorozzuk meg a $\sqrt{\frac{|C_j|}{|G|}}$ számmal. A karakterek ortonormáltsága éppen azt jelenti, hogy a módosított karaktertábla sorai ortonormáltak a standard skaláris szorzatra nézve, azaz a módosított karaktertábla egy unitér mátrix. Akkor viszont az oszlopai is ortonormáltak a standard skaláris szorzatra nézve, így kijött az alábbi következmény.

5.3.6. Következmény. *(Karakterek II. ortogonalitási relációja) Legyen C, C' két konjugált osztály G-ben, $g \in C$ és $h \in C'$. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{\chi_i(g)}\chi_i(h) = \begin{cases} 0, & \text{ha } C \neq C'; \\ \frac{|G|}{|C|}, & \text{ha } C = C'. \end{cases}$$

6. Fizikai alkalmazások

6.1. Fizikai alkalmazások sémája

Egy fizikai rendszert az úgynevezett *Hamilton-operátor* ír le. A H Hamilton-operátor egy V Hilbert-téren (az úgynevezett *állapottéren* ható önadjungált operátor. Az egyszerűség kedvéért tegyük most fel, hogy V egy véges dimenziós euklideszi tér. A rendszer *szimmetria-csoportja* $G = \{B \in U(V) \mid BH = HB\}$, ahol $U(V)$ jelöli az unitér operátorok csoportját.

6.1.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy a H önadjungált operátor G szimmetriacsoportjának V-n való ábrázolában az irreducibilis komponensek – multiplicitással felsorolva – $n_1, \dots, n_k$ dimenziósak ($n_1 + \dots + n_k = \dim(V)$). Akkor ennyiesével egybeesnek H sajátértékei. Sőt, létezik az $\{1, \dots, k\}$ indexhalmaznak egy $\{1, \dots, k\} = \bigcup_{\lambda \in \mathrm{Spec}(H)} I(\lambda)$ partíciója úgy, hogy $\dim(V_\lambda) = \sum_{i \in I(\lambda)} n_i$ (itt $\mathrm{Spec}(H)$ jelöli a H sajátértékeinek halmazát, és V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátalteret).*

Bizonyítás. Bontsuk fel a V teret a H sajátaltereinek $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(H)} V_\lambda$ direkt összegére. Tetszőleges $B \in G$ és $v \in V_\lambda$ esetén

$$\begin{aligned} H(B(v)) &= (HB)(v) = (BH)(V) \\ &= B(H(v)) = B(\lambda v) = \lambda B(v), \end{aligned}$$

azaz a V_λ altér G-invariáns. Tehát a V egy minimális G-invariáns alterek direkt összegére való felbontását megkaphatjuk úgy, hogy a $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(H)} V_\lambda$ direkt összeg tagjait bontjuk tovább (ha szükséges). $\square$

Tehát a rendszer szimmetriái sajátérték egybeeséseket vonnak maguk után. A fizikusok szerint "csak az esik egybe, aminek muszáj", azaz a rendszernek addig keresik szimmetriáit, ameddig elegendőnek nem bizonyulnak a mért egybeesések magyarázatára.

Zeeman-féle természetes felhasadás. Példaként nézzük meg a következő jelenséget: molekulát mágneses térbe helyezve a színképvonalai felhasadnak. Ennek csoportelméleti magyarázata, hogy a mágneses térben a molekula eltorzul (egy irányba megnyúlik), így kisebb lesz a szimmetria csoportja. A régi G szimmetriacsoportnak most már csak egy F részcsoportját alkotják az eltorzult molekula szimmetriái. Bontsuk fel a V állapotteret minimális F-invariáns alterek direkt összegére. Ezt megtehetjük úgy, hogy először felbontjuk minimális G-invariáns alterek direkt összegére. Ezek a tagok persze F-invariánsak, de nem feltétlenül minimálisak. Így általában tovább bomlanak, és ennek megfelelően a 6.1.1 Állításban szereplő $n_1, \dots, n_k$ számok is kisebbekre esnek szét. Tehát a kisebb szimmetriacsoport általában kisebb egybeeséseket von maga után. (Például ha F Abel-féle, akkor a 2.2.3 Tétel szerint a minimális F-invariáns alterek 1-dimenziósak, és ennek megfelelően az egybeesések megszűnnek.)

6.2. A metán molekula sajátrezgéseinek osztályozása

A következőkben ismertetjük Wigner Jenő módszerét a metán molekula sajátrezgéseinek osztályozására. A metán molekula – egy szabályos tetraéder csúcsain elhelyezkedő – négy hidrogénatomból és egy – a középpontban elhelyezkedő – szénatomból áll. Rögzítsünk egy-egy koordinátarendszert a szabályos tetraéder középpontjához és a négy csúcshoz. A rezgő molekula pillanatnyi helyzetét leírja az az $\mathbb{R}^{15}$-beli vektor, aminek az első 3-dimenziós komponense megadja a szénatom elmozdulását, a második 3-dimenziós komponense az első hidrogénatom elmozdulását, stb.. Az $x \in \mathbb{R}^{15}$ elmozdulás rezgési energiáját leírja egy $f : \mathbb{R}^{15} \to \mathbb{R}$ analitikus függvény, melyre $f(0) = 0$, és $f(x) \geq 0$ minden x-re. Ezért az origó kis környzetében $f(x) \sim x^t Ax$, ahol A egy szimmetrikus, pozitív szemidefinit 15×15-ös mátrix. Az A sajátvektorai az úgynevezett *sajátrezgések*, (melyeknek *frekvenciája* a megfelelő sajátérték), ezek kifeszítik a rezgések terét. A rendszer szimmetriacsoportja nyilvánvalóan tartalmazza a szabályos tetraéder szimmetriacsoportját. Jelölje $G \leq O_3(\mathbb{R})$ a 3-dimenziós euklideszi tér azon egybevágóságainak csoportját, amelyek sajátmagába viszik a szabályos tetraédert.

6.2.1. Állítás. *G izomorf S_4-gyel, a negyedfokú szimmetrikus csoporttal.*

Bizonyítás. Világos, hogy G hat a csúcsok halmazán, jelölje $\phi : G \to S_4$ a megfelelő homomorfizmust. Ha egy egybevágóság fixálja a tér négy nem egysíkú pontját, akkor az az identitás. Ezért ϕ injektív. Másfelől, az $\overline{12}$ él felezőpontján és a $3, 4$ csúcsokon átmenő tükrözés képe ϕ-nél az $(1, 2)$ transzpozíció. Hasonlóan, $(2, 3) \in \mathrm{im}(\phi)$ és $(3, 4) \in \mathrm{im}(\phi)$. Tehát $\mathrm{im}(\phi) \supseteq \langle (1, 2), (2, 3), (3, 4) \rangle = S_4$. Beláttuk tehát, hogy $\phi : G \to S_4$ izomorfizmus. □

Szükségünk lesz a $G \cong S_4$ karaktertáblájára.

C	id	(123)	(12)(34)	(12)	(1234)
$\#C$	1	8	3	6	6
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	-1	2	0	0
χ_4	3	0	-1	1	-1
χ_5	3	0	-1	-1	1

Az S_4-nek öt konjugált osztálya van, hiszen a lehetséges ciklus szerkezetek $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$ (ld. az 5. Fejezet feladatait). A fenti táblázatban a konjugált osztályoknál az alsó indexbe írt szám a konjugált osztály elemszámát jelöli. Ezekre a számokra szükség van a karakterek skaláris szorzatának kiszámolásához. A karaktertáblát például a következő érvelés magyarázza. A χ_1 a triviális ábrázolás karaktere, χ_2 a sign ábrázolás karaktere. A χ_4-et úgy kapjuk, hogy S_4-re, mint a szabályos tetraéder szimmetriacsoportjára gondolunk. Ez egy 3-dimenziós ábrázolás, ami nyilvánvalóan irreducibilis. Az $(1, 2, 3)$ elem képe egy egyenes körüli $\frac{2\pi}{3}$ szögű forgatás, ennek nyoma $1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}) = 0$. Az $(1, 2)(3, 4)$ képe egy egyenes körüli π szögű forgatás, ennek sajátértékei $1, -1, -1$, tehát nyoma $1 - 1 - 1 = -1$. Az $(1, 2)$ képe síkra való tükrözés, ennek sajátértékei $1, 1, -1$, tehát a nyoma $1 + 1 - 1 = 1$. A $\chi_4((1, 2, 3, 4))$ értékét egyértelműen meghatározza az, hogy $(\chi_4, \chi_1) = 0$. A $\chi_5 = \chi_4 \cdot \chi_1$, és az 5. Fejezet megfelelő feladata szerint egy irreducibilis és egy elsőfokú karakter szorzata is irreducibilis karakter. Az egyetlen hiányzó sort most már kitölthetjük az oszlopok ortogonalitása alapján: az $\{\mathrm{id}\}$ oszlopában álló számok négyzetösszege $|S_4| = 24$, tehát $\chi_3(\mathrm{id}) = 2$. A többi oszlop mind ortogonális az elsőre, ez alapján kitölthetjük a χ_3 sorát (ld. a fejezet végi feladatokat a χ_3-hoz tartozó irreducibilis ábrázolás megkonstruálásához).

G világos módon hat az $\mathbb{R}^{15}$ téren: gondoljunk $\mathbb{R}^{15}$ elemeire, mint a 3 dimenziós térben ülő térvektorötösökre, az első a szabályos tetraéder középpontjából, míg a többi rendre a a négy csúcsból indul. Ekkor a tér azon egybevágóságai, amelyek sajátmagába viszik a szabályos tetraédert, természetesen hatnak az ilyen térvektor-ötösökön. Jelölje ezt a $G \to GL(15, \mathbb{R})$ ábrázolást ρ. Jelölje például f a szabályos tetraéder első csúcsán és a középponton átmenő egyenes körüli $\frac{2\pi}{3}$ szögű forgatást (ez a $G \cong S_4$ azonosításnál nyilvánvalóan az $(1, 2, 3)$ konjugált osztályához tartozik). Ekkor $\rho(f) = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$, tehát $\chi_\rho(f) = 2Tr(f) = 2\chi_4(f) = 2\chi_4((1, 2, 3)) = 0$. Jelölje t az $1, 2$ csúcsokon és a középponton átmenő síkra vonatkozó tükrözést. Erre $\rho(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$, tehát $\chi_\rho(t) = 3Tr(t) = 3\chi_4(t) = 3\chi_4((1,2)) = 3$. Hasonlóan, a két szemközti élfelezőponton átmenő egyenes körüli h forgatásra $\chi_\rho((1,2)(3,4)) = \chi_4((1,2)(3,4)) = -1$, mivel ennél a transzformációnál csak a középpont marad fixen, a csúcsok mindegyike mozog. Ugyanígy $\chi_\rho((1,2,3,4)) = \chi_4((1,2,3,4)) = -1$.

Kijött tehát, hogy $\chi_\rho = (15, 0, -1, 3, -1)$. Bontsuk χ_ρ-t irreducibilis karakterek összegére, például a χ_3 multiplicitása $(\chi_\rho, \chi_3) = \frac{1}{24}(15 \cdot 2 + 8 \cdot 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \cdot 0) = 1$. Azt kapjuk, hogy

$$\chi_\rho = \chi_1 + \chi_3 + 3\chi_4 + \chi_5.$$

Azonban az $\mathbb{R}^{15}$ tér tartalmaz nem valódi rezgéseket is, például a $(v,v,v,v,v)^t$ vektorok ($v \in \mathbb{R}^3$) eltolásokhoz tartoznak. Ez egy 3-dimenziós invariáns altér, és ρ ezen való részábrázolásának karaktere nyilvánvalóan χ_4. Hasonlóan, az $\mathbb{R}^{15}$ tartalmazza az úgynevezett infinitezimális forgatások 3-dimenziós invariáns alterét. Meg lehet gondolni, hogy az ezen való részábrázolás karaktere χ_5.

Összefoglalva, a valódi rezgések tere 9 dimenziós, G ezen való ábrázolásának karaktere $\chi_1 + \chi_3 + 2\chi_4$. Tehát az irreducibilis komponensek dimenziói rendre $1, 2, 3, 3$, tehát ennyiesével egybeesnek a sajátértékek. Ez egybeesik a metán molekula színképvonalainak mérésekor tapasztaltakkal.

Tegyük fel, hogy a molekulát olyan mágneses térbe helyeztük, hogy az egyik hidrogénatomot a szénatommal összekötő irányba megnyúlt. Ekkor a rendszer szimmetriacsoportja $D_3 \cong S_3$ lesz (az S_4 azon elemiből álló részcsoportja, amelyek fixen hagyják a nyúlás tengelyén levő hidrogén atomot). Jelölje $\psi : S_3 \to O(15, \mathbb{R})$ a konfigurációs téren való ábrázolást.

S_3	$\{1\}$	$\{(1,2,3),(1,3,2)\}$	$\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$
φ_1	1	1	1
φ_2	1	1	-1
φ_3	2	-1	0
χ_ψ	15	0	3

Ekkor $\chi_\psi = 4\varphi_1 + \varphi_2 + 5\varphi_3$, és mivel $\chi_4\big|_{S_3} = \varphi_1 + \varphi_3$, $\chi_5\big|_{S_3} = \varphi_2 + \varphi_3$, kapjuk, hogy a valódi rezgések alterén az S_3 szimmetriacsoport karaktere $3\varphi_1 + 3\varphi_3$. Így a sajátértékek multiplicitásai: 1,1,1,2,2,2.

7. Az SU_2 és SO_3 csoportok ábrázoláselmélete

7.1. Az SU_2 és SO_3 kapcsolata

Fontos példák kompakt csoportra az alábbiak:

- $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ a szorzással;
- SU_n, az 1 determinánsú komplex unitér mátrixok a szorzással;
- SO_n, az 1 determinánsú valós ortogonális mátrixok a szorzásal.

Speciálisan,

$$SU_2 = \{\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C},\ |z|^2 + |w|^2 = 1\}$$

az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ egyenletű egységgömbfelülete a $H = \{\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ 4-dimenziós valós euklideszi térnek, tehát valóban kompakt, és összefüggő, sőt, egyszeresen összefüggő, mint topologikus tér.

7.1.1. Tétel. *Létezik egy* $\gamma : SU_2 \to SO_3$ *szürjektív, folytonos homomorfizmus, és erre* $\ker(\gamma) = \{\pm I\}$ *(itt* I *jelöli az* SU_2 *egységelemét, vagyis a* 2×2*-es egységmátrixot).*

Bizonyítás. Jelölje

$$V := \{X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

a 2×2-es 0 nyomú Hermitikus mátrixok halmazát, ez egy 3-dimenziós euklideszi tér az $(X, X) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -\det(X)$ skaláris szorzattal. Legyen $\gamma : G \to GL(V)$, $\gamma(A)(X) := AXA^{-1}$ ($A \in SU_2$, $X \in V$). A determinánsok szorzástétele miatt $\det(AXA^{-1}) = \det(X)$, tehát $\gamma(A)$ megőrzi a V-an értelmezett skaláris szorzatot, így $\mathrm{im}(\gamma)$ benne van a V ortogonális transzformációinak csoportjában, melyet azonosíthatunk O_3-mal. Mivel mátrixok szorzatának (és inverzének) elemei folytonos függvényei a tényezők elemeinek, ezért γ folytonos homomorfizmus. Összefüggő halmaz folytonos képe is összefüggő. O_3-nak azonban két összefüggő komponense van, ugyanis O_3 diszjunkt egyesítése az 1 determinánsúak, illetve a -1 determinánsúak részhalmazának, és ezek a részhalmazok zártak, hiszen egy-egy pont ősképei a $\det : O_3 \to \{1, -1\}$ folytonos leképezésnél. Mivel $\mathrm{im}(\gamma)$ tartalmazza az $1 \in SO_3$-at, így az egész $\mathrm{im}(\gamma)$ benne van SO_3-ban. Megadtuk tehát a kívánt $\gamma : SU_2 \to SO_3$ homomorfizmust.

Határozzuk meg $\ker(\gamma)$-t. Legyen

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Könnyű számolás mutatja, hogy $X = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in SU_2$-re $JX = XJ$-ből következik, hogy $w = 0$, és $X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$-ből következik, hogy $z = \pm 1$. Tehát valóban $\ker(\gamma) = \{\pm 1\}$.

Megmutatjuk, hogy $\mathrm{im}(\gamma)$ tranzitívan hat V egységgömbfelületén, és tartalmazza az összes forgatást az $\mathbb{R}J$ tengely körül.

Valóban, közismert lineáris algebrai tény, hogy minden Hermitikus mátrix unitéren diagonalizálható, azaz bármely $X \in V$-hez létezik olyan $B \in U_2$, hogy $BXB^{-1} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$, ahol $c \in \mathbb{R}$. Ha X a V egységgömbjén található, akkor itt $c = \pm 1$. Feltehető, hogy $c = 1$, ugyanis $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. B-t kicserélve $A := (\det(B))^{-\frac{1}{2}} B$-re kapjuk, hogy V egységgömbfelületének bármely X eleméhez létezik olyan $A \in SU_2$, melyre $\gamma(A)(X) = J$.

Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén legyen $z = e^{ti} = \cos(t) + i\sin(t)$, és $A(z) := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \in SU_2$. Ekkor

$$\begin{aligned} \gamma(A(z)) &\begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & z^2(x_2 + ix_3) \\ z^{-2}(x_2 - ix_3) & -x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vegyük a $b := (J, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix})$ ortonormált bázist V-ben. Ebben a bázisban $\gamma(A(z))_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2t) & -\sin(2t) \\ 0 & \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$, azaz $\gamma(A(z))$ a $\mathbb{R}J$ tengely körüli $2t$ szögű forgatás.

A fentiekből az alábbi 7.1.2 Lemma szerint következik γ szürjektivitása. □

7.1.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy az* SO_3 *csoport valamely* G *részcsoportja tranzitívan hat a 3 dimenziós euklideszi tér egységgömbfelületén, és van olyan tengely, hogy* G *tartalmazza az összes akörüli forgatást. Akkor* $G = SO_3$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy v olyan egységvektor, melyre G tartalmazza az összes $\mathbb{R}v$ körüli forgatást. Legyen $f \in SO_3$ tetszőleges. Mivel G tranzitívan hat az egységgömbön, azért létezik olyan $g \in G$, melyre $f(v) = g(v)$. Ekkor $(g^{-1}f)(v) = v$, tehát $g^{-1}f$ az $\mathbb{R}v$ tengely körüli forgatás, így $g^{-1}f \in G$, következésképpen $f \in gG = G$. □

7.1.3. Következmény. *Az SO_3 véges dimenziós folytonos ábrázolásai kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben állnak SU_2 azon ρ ábrázolásaival, melyekre $\rho(-I) = \mathrm{id}$.*

Bizonyítás. Ha ρ az SO_3 folytonos ábrázolása, akkor $\tilde{\rho} := \psi \circ \gamma$ az SU_2 folytonos ábrázolása (melynek magjában nyilván benne van $-I$).

Fordítva, legyen $\rho : SU_2 \to GL(W)$ egy folytonos ábrázolás, melyre $\rho(-I) = \mathrm{id}$. A 7.1.1 Tétel szerint minden $g \in SO_3$ előáll $g = \gamma(h)$ alakban, és h egy ± 1-es szorzó erejéig egyértelmű. Mivel a feltevésünk szerint $\rho(h) = \rho(-h)$, ezért definiálhatjuk az SO_3 csoport $\bar{\rho} : G \to GL(W)$ ábrázolását a $\bar{\rho}(g) = \rho(h)$ képlettel. (Más szavakkal, mivel ρ állandó a $\{\pm 1\}$ szerinti mellékosztályokon, így átvezethető az $SU_2/\{\pm 1\} \cong SO_3$ faktorcsoporton.) Csak azt kell belátni, hogy $\bar{\rho}$ folytonos. Vegyünk egy tetszőleges Z zárt részhalmazt $GL(W)$-ben. Ennek a ρ-nál vett őseképe zárt SU_2-ben, mivel ρ folytonos. Kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt, tehát $\rho^{-1}(Z)$ kompakt, és így a γ folytonos leképezésnél vett képe kompakt, így zárt SO_3-ban. Tehát $\bar{\rho}^{-1}(Z) = \gamma(\rho^{-1}(Z))$ zárt SO_3-ban $GL(W)$ minden Z zárt részhalmazára, amiből következik, hogy $\bar{\rho}$ folytonos. □

7.2. Az SU_2 véges dimenziós komplex irreducibilis ábrázolásai

Jelölje

$$V_n := \{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k} \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}\}$$

a 2-változós homogén n-edfokú polinomok vektorterét, világos, hogy $\dim_{\mathbb{C}}(V_n) = n + 1$. Azonosítsuk az $f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k} \in V_n$ polinomot az $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(x,y)^t \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k}$ függvénnyel. A $GL(2,\mathbb{C})$ csoportnak a $\mathbb{C}^2$ téren való hatása indukál egy ábrázolást V_n-en a már megismert módon. Nevezetesen, $g \in GL(2,\mathbb{C})$ és $f \in V_n$ esetén legyen

$$(g \cdot f)((x,y)^t) := f(g^{-1} \cdot (x,y)^t).$$

Szorítsuk meg ezt a hatást a $GL(2,\mathbb{C})$ csoport SU_2 részcsoportjára, így kapjuk a

$$\phi_n : SU_2 \to GL(V_n)$$

ábrázolást. Expliciten, mivel a $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in SU_2$ elem inverze $\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}$, így $g^{-1} \cdot (x,y)^t = (g_{22}x - g_{12}y, -g_{21}x + g_{11}y)^t$, és

$$(g \cdot f)(x,y) = f(g_{22}x - g_{12}y, -g_{21}x + g_{11}y).$$

Nyilvánvaló, hogy $\phi_n(g)$ mátrixelemei a g elemeinek polinomjai, tehát $\phi_n : SU_2 \to GL(V_n)$ folytonos.

7.2.1. Tétel. *Tetszőleges $n = 0, 1, 2, \dots$ esetén $\phi_n : SU_2 \to GL(V_n)$ $n+1$-dimenziós komplex, irreducibilis ábrázolás.*

Bizonyítás. Tekintsük SU_2 következő Abel-féle részcsoportját:

$$T := \{A(z) := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \mid |z| = 1\},$$

és vizsgáljuk a T hatását V_n-en. Minden $k = 0, \dots, n$-re fennáll, hogy $A(z) \cdot (x^k y^{n-k}) = z^{n-2k} x^k y^{n-k}$, tehát $V_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{C}x^k y^{n-k}$ olyan minimális T-invariáns alterek direkt összegére való felbontás, melyeken T hatása páronként nem-izomorf. Ezért a 3.1.6 Lemma szerint bármely T-invariáns altér a $\mathbb{C}x^k y^{n-k}$ $(k = 0, \dots, n)$ alterek közül néhánynak az összege.

Legyen W tetszőleges nem-nulla SU_2-invariáns altér V_n-ben. Akkor W egyúttal T-invariáns is, így az előbbiek szerint ha egy polinom benne van W-ben, akkor annak minden nem-nulla együtthatós monomja is benne van W-ben. Ezért létezik legalább egy $x^k y^{n-k}$ monom W-ben. Vegyünk egy olyan $A \in SU_2$ mátrixot, aminek egyik eleme se nulla. Ekkor az $A \cdot x^k y^{n-k}$ polinomban x^n együtthatója nem nulla, tehát $x^n \in W$. Viszont $A \cdot x^n$-ben minden monom nem-nulla együtthatóval szerepel, tehát az összes monom benne van W-ban, azaz $W = V_n$. □

Könnyen látható, hogy $-I \in \ker(\phi_n)$ akkor és csak akkor, ha n páros. Tehát a 7.1.3 Következmény szerint SU_n ezen ábrázolásai közül pontosan $\phi_0, \phi_2, \phi_4, \dots$, azaz a páratlan dimenziósak vezethetők át az SO_3 csoporton. Az SO_3 így kapott (szükségszerűen irreducibilis) ábrázolásait ugyanúgy ϕ_{2k}-val jelöljük.

Később látni fogjuk, hogy ezzel az SU_2 összes véges dimenziós, folytonos, komplex ábrázolását megkaptuk.

7.3. Kompakt csoportok mátrix elemei

Legyen G kompakt csoport, jelölje $C(G)$ a $G \to \mathbb{C}$ folytonos függvények terét. Világos, hogy $C(G)$ R-invariáns altér $\mathbb{C}[G]$-ben. Bevezetünk egy R-invariáns skaláris szorzatot $C(G)$-n.

Tetszőleges $f \in C(G)$ felírható $f = f_1 + i f_2$ alakban, ahol $f_1, f_2 \in C_{\mathbb{R}}(G) = \{h : G \to \mathbb{R} \mid h \text{ folytonos }\}$. Nevezetes tény, hogy egyértelműen létezik egy $C_{\mathbb{R}}(G) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_{x\in G} f(x)dx$ lineáris funkcionál, az úgynevezett *Haar-integrál*, melyre fennállnak a következők:

1. $\int_{x\in G} f(x)dx > 0$, ha $f(x) \geq 0$ minden $x \in G$-re és $f \neq 0$;
2. Bármely $g \in G$-re $\int_{x\in G} f(g^{-1}x)dx = \int_{x\in G} f(x)dx$;
3. Bármely $g \in G$-re $\int_{x\in G} f(xg)dx = \int_{x\in G} f(x)dx$;
4. $\int_{x\in G} 1dx = 1$.

Példa. Véges csoport esetén a Haar integál az $f \mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)$ funkcionál.

Definiáljuk az $\int_G : C(G) \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineáris funkcionált az $\int_{x\in G}(f_1(x) + i f_2(x))dx := \int_{x\in G} f_1(x)dx + i\int_{x\in G} f_2(x)dx$ formulával. Végül legyen

$$(f, h) := \int_{x\in G} \overline{f(x)} h(x)dx, \ \ (f, h \in C(G)).$$

A Haar-integrál tulajdonságaiból következik, hogy ez valóban egy R-invariáns skaláris szorzat $C(G)$-n.

A $(-,-)$ skaláris szorzat definiál egy topológiát $C(G)$-n. Azt mondjuk, hogy a $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozat *teljes ortonormált rendszer* $C(G)$-ben, ha $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_j^i$ minden i,j-re, és az általuk kifeszített altér mindenütt sűrű $C(G)$-ben. Ekkor a $C(G)$ tér bármely eleme a konvergens $f = \sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)\varphi_k$ végtelen sorba fejthető. Megjegyezzük, hogy $C(G)$ sűrű altér a négyzetesen integrálható függvények $L_2(G)$ Hilbert-terében, tehát egy $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ $C(G)$-beli teljes ortonormált rendszer egyúttal teljes ortonormált rendszer az $L_2(G)$ Hilbert-térben.

Legyen $\rho_k : G \to GL(V_k)$ $k = 1, 2, \dots$ a G kompakt csoport véges dimenziós (folytonos) komplex, irreducibilis ábrázolásainak izomorfia erejéig teljes listája, $\dim(V_k) = n_k$. (Az alábbi tétel bizonyításából ki fog derülni, hogy a jelölésünkkel összhangban ez a lista megszámlálható.) A 3.3.3 Tétel szerint ρ_k unitér, legyenek $\rho_{k,i,j}$ $(i, j = 1, \dots, n_k)$ a mátrix elemei egy ortonormált bázisra nézve.

7.3.1. Tétel (Peter-Weyl Tétel). *A* $\{\rho_{k,i,j} \mid k = 1, 2, \dots;\ i, j = 1, \dots, n_k\}$ *egy teljes ortogonális rendszer* $C(G)$*-ben, továbbá* $(\rho_{k,i,j}, \rho_{k,i,j}) = \frac{1}{n_k}$.

Példa. $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ irreducibilis ábrázolásai: $z \mapsto z^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ teljes ortogonális rendszer $C(T)$-ben, ez az alapja a Fourier-sorok elméletének.

A 7.3.1 Tétel Bizonyítása. Az ortogonalitás szó szerint ugyanúgy bizonyítható, mint a véges csoportokra vonatkozó 5.3.3 Állítás; az egyetlen különbség, hogy az $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}$ szimbólum helyett a $\int_{g\in G}$ szimbólumot kell írni.

A teljesség bizonyításához feltesszük, hogy $G \leq GL(n, \mathbb{C})$. (Ez nem igazi megszorítás, mert minden kompakt csoportnak létezik hűséges véges dimenziós ábrázolása, ezt azonban nem bizonyítjuk.) Ekkor G elemei $g = (x_{ij}(g))_{i,j=1}^n$ mátrixok, ahol $x_{ij} \in C(G)$. Jelölje $P(G)$ azon $G \to \mathbb{C}$ függvények terét, melyek az $x_{ij}, \bar{x}_{ij}$ függvények komplex együtthatós polinomjai. A Stone-Weierstrass-féle approximációs tétel szerint $P(G)$ sűrű $C(G)$-ben. Így elég azt belátni, hogy $P(G) = \sum_{k=1}^{\infty} M(\rho_k)$. Legyen $P(G)_m := \{f \in P(G) \mid \deg(f) \leq m\}$. Világos, hogy a $P(G)_m$ altér R-invariáns. Ugyanúgy, mint az 5.1.1 Tétel bizonyításában, kijön, hogy $P(G)_m \subseteq M(J_{P(G)_m})$. Viszont $J_{P(G)_m}$ véges dimenziós ábrázolás, tehát felbomlik véges dimenziós irreducibilisek összegére, ezért $M(J_{P(G)_m}) \subseteq \sum_{k \in \Lambda_m} M(\rho_k)$, ahol Λ_m véges részhalmaza $\mathbb{N}$-nek. Következésképpen $P(G)_m \subseteq \sum_{k \in \Lambda_m} M(\rho_k)$. A jobboldalon álló ábrázolás $G \times G$ páronként nem-izomorf irreducibilis ábrázolásainak összege, ezért a 3.1.6 Lemma szerint $P(G)_m = \sum_{k \in \Gamma_m} M(\rho_k)$, ahol $\Gamma_m \subseteq \Lambda_m$. Így $P(G) = \bigcup_{m=1}^{\infty} P(G)_m = \sum_{k \in \Gamma} M(\rho_k)$, ahol $\Gamma = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Gamma_m$. Tegyük fel, hogy létezik $m \in \mathbb{N}$, amelyre $m \notin \Gamma$. Akkor a már bizonyítottak szerint $M(\rho_m)$ ortogonális $P(G)$-re, tehát $P(G)$ sűrűsége miatt ortogonális az egész $C(G)$-re. Ez lehetetlen. Ezzel beláttuk, hogy $P(G) = \sum_{k=1}^{\infty} M(\rho_k)$. □

7.3.2. Megjegyzés. *Megjegyezzük, hogy a fenti bizonyításból az is kiderült, hogy G összes véges dimenziós irreducibilis ábrázolása megjelenik $J_{P(G)_m}$ részeként alkalmas m-re. Tehát csak megszámlálhatóan végtelen sok lehet belőlük.*

7.4. SU_2 karakterei

A véges csoportok esetéhez hasonlóan definiálhatjuk bármely $\rho : SU_2 \to GL(V)$ véges dimenziós ábrázolásra a $Tr \circ \rho : SU_2 \to \mathbb{C}$ függvényt. A nyom jól ismert tulajdonságai miatt ez centrális függvény, azaz konjugált osztályokon állandó. Elemi lineáris algebrai tény, hogy tetszőleges $B \in SU_2$ konjugált osztályában található egy $A(z) := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$ diagonális elem, ahol $|z| = 1$. Továbbá $A(z)$ és $A(z^{-1})$ ugyanabban a konjugált osztályban van, amint azt a $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} A(z) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = A(z^{-1})$ egyenőség mutatja. Tehát a $Tr \circ \rho$ függvényt meghatározza a $T = \{A(z) \mid z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ részcsoportra való megszorítása, ezért definiálhatjuk a ρ ábrázolás karakterét mint a

$$\chi_\rho : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto Tr(\rho(A(z))$$

egyváltozós függvényt. A fentiek szerint $\chi_\rho(z) = \chi_\rho(\bar{z})$. A 7.3.2 Megjegyzésből tudjuk, hogy χ_ρ a z és $\bar{z}$ komplex együtthatós polinomja.

A 7.2 alfejezetben definiált ϕ_n ábrázolások karakterei:

$$\chi_{\phi_n}(z) = \begin{cases} z^n + z^{n-2} + \cdots + 1 + \cdots + z^{-n}, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ z^n + z^{n-2} + \cdots + z + z^{-1} + \cdots + z^{-n}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Világos, hogy a χ_{ϕ_n} függvények bázist alkotnak azon $f(z)$ függvények C terében, melyek z és $\bar{z}$ komplex együtthatós polinomjai, és $f(z) = f(\bar{z})$. Ebből következik, hogy $\{\phi_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ az SU_2 véges dimenziós irreducibilis komplex ábrázolásainak izomorfia erejéig teljes listája. (Valóban, tegyük fel, hogy ρ ezektől különböző irreducibilis ábrázolás. Ennek karaktere benne van C-ben, másfelől $Tr \circ \rho$ ortogonális a $Tr \circ \phi_n$ mindegyikére, tehát lineárisan független tőlük. Akkor viszont χ_ρ is független a χ_{ϕ_n} karakterektől, ami ellentmondás.)

8. Gömbfüggvények

8.1. Laplace-féle gömbfüggvények

Ebben a fejezetben legyen

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

a 3-dimenziós euklideszi tér egységgömbfelülete, $C(X)$ az $X \to \mathbb{C}$ folytonos függvények vektortere, ellátva az $(f,h) = \int_{x\in X} \overline{f(x)}h(x)dx$ skaláris szorzattal. Az SO_3 hat X-en a természetes módon, ez indukál egy ábrázolást $C(X)$-en: $(g\cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$, $g \in G$, $f \in C(X)$, $x \in X$. Jelölje

$$SO_2 = \{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

az x_3-tengely körüli forgatásokból álló részcsoportot SO_3-ban.

8.1.1. Lemma. *Bármely V nem-nulla véges dimenziós SO_3-invariáns altér $C(X)$-ben tartalmaz olyan nem-nulla elemet, amit SO_2 minden eleme fixál.*

Bizonyítás. Létezik $f \in V$, $x \in X$ úgy, hogy $f(x) \neq 0$. Alkalmas $g \in SO_3$-ra $gx = v := (0,0,1)$. Ekkor $(g\cdot f)(v) = f(g^{-1}v) = f(x) \neq 0$. Tehát van olyan $f \in V$, melyre $f(v) \neq 0$. Tekintsük a $\phi : V \to \mathbb{C}$, $h \mapsto h(v)$ lineáris leképezést. Ez nem-nulla, így $\dim(\ker(\phi)) = \dim(V) - 1$. Ezért $\ker(\phi)$ ortogonális komplementere V-ben 1-dimenziós, mondjuk b generálja. Mivel bármely $g \in SO_2$-re és $h \in V$-re $\phi(g\cdot h) = h(g^{-1}v) = h(v)$, azért $\ker(\phi)$ SO_2-invariáns, következésképpen $\mathbb{C}b$ is SO_2-invariáns, azaz bármely $g \in SO_2$-re $g\cdot b = \lambda(g)b$, ahol $\lambda(g) \in \mathbb{C}$. Másfelől $b(v) = b(g^{-1}v) = (g\cdot b)(v) = \lambda(g)b(v)$, következésképpen $\lambda(g) = 1$. □

Jelölje A az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ polinom függvények terét, $\{x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3} \mid k_1,k_2,k_3 \geq 0\}$ bázis A-ban. Az SO_3 csoport $\mathbb{R}^3$-ön való hatása indukál egy ábrázolást A-n. Világos, hogy az A homogén m-edfokú elemeiből álló A_m altér SO_3-invariáns. Az SO_3 csoport A-n való hatását megszoríthatjuk az SO_2 részcsoportra, a későbbiekben erre az ábrázolásra is hivatkozni fogunk.

Az alábbi 8.1.3 Következmény bizonyítása végett vezessük be a

$$\langle x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}, x_1^{j_1}x_2^{j_2}x_3^{j_3}\rangle = \begin{cases} k_1!k_2!k_3!, & \text{ha } k_1 = j_1, k_2 = j_2, k_3 = j_3 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

skaláris szorzatot A-n.

8.1.2. Lemma. *Az x_i-vel való szorzás és $\frac{\partial}{\partial x_i}$, mint $A \to A$ lineáris operátorok egymás adjungáltjai a $\langle -,-\rangle$ skaláris szorzatra nézve.*

Bizonyítás. Egyszerű számolás mutatja, hogy pl. $\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, v\rangle = \langle u, x_1 v\rangle$ bármely u,v monomokra. □

A 8.1.2 Lemmából azonnal következik, hogy az $r^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2$-tel való szorzás és a $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ *Laplace-operátor* egymás adjungáltjai. Így Δ magtere az ortogonális komplementere az r^2-tel való szorzás képterének, azaz $\ker(\Delta) = (r^2A)^\perp$. Jelölje $H := \ker(\Delta)$ az úgynevezett *harmonikus polinomok* terét, $H_m := H \cap A_m$. Mivel Δ és az r^2-tel való szorzás is homogén (azaz homogén polinomok képe homogén), azért az előbbi megfontolásainkból adódik az alábbi következmény.

8.1.3. Következmény. $A_m = H_m \oplus r^2 A_{m-2}$

Könnyen ellenőrizhető, hogy Δ és $r^2\cdot -$ felcserélhető SO_3 hatásával, azaz tetszőleges $g \in SO_3$ és $f \in A$ esetén $\Delta(g\cdot f) = g\cdot\Delta(f)$, és $r^2(g\cdot f) = g\cdot(r^2 f)$. Ezért A_m-nek a 8.1.3 Következménybeli direkt összeg felbontásában szereplő alterek SO_3-invariánsak. Sőt, ennél többet is mondhatunk:

8.1.4. Állítás.

$$A_m = H_m \oplus r^2 H_{m-2} \oplus r^4 H_{m-4} \oplus r^6 H_{m-6} \oplus \cdots \tag{6}$$

az A_m minimális SO_3-invariáns alterek direkt összegére való felbontása.

Bizonyítás. Jelölje $\tau : A_m \to P(X)$ az X-re való megszorítást, ez egy izomorfizmus SO_3 megfelelő ábrázolásai között. A 8.1.1 Lemma szerint ha $\tau(A_m)$ irreducibilisek összegére való felbontásában d tag szerepel, akkor SO_2 triviális ábrázolásának multiplicitása $\tau(A_m)$-ben legalább d. Tehát ugyanez igaz A_m-re is. Az alábbi 8.1.5 Lemma szerint viszont SO_2 triviális ábrázolásának multiplicitása A_m-ben $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, és a (6) felbontásnak éppen ennyi tagja van. Tehát ez a felbontás nem finomítható tovább. □

A $z = e^{i\varphi}$ egységnyi abszolút értékű komplex számra jelölje $h(z) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ az x_3 tengely körüli φ szögű forgatást. Világos, hogy $\varepsilon_k : SO_2 \to \mathbb{C}$, $h(z) \mapsto z^k$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ az SO_2 páronként nem-izomorf irreducibilis ábrázolásai.

8.1.5. Lemma. *Az SO_2 csoport A_m-en való ábrázolásának irreducibilis komponensei ε_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, és ε_k multiplicitása $\lfloor \frac{m-|k|}{2} \rfloor + 1$.*

Bizonyítás. Vezessünk be új változókat: $u := x_1 - ix_2$, $\bar{u} := x_1 + ix_2$. Ekkor $h(z) \cdot u = zu$ és $h(z) \cdot \bar{u} = z^{-1}u$. Tekintsük az $\{u^p \bar{u}^q x_3^l \mid p + q + l = m,\ p, q, l \geq 0\}$ bázist A_m-ben. Az $u^p \bar{u}^q x_3^l$ monom SO_2-invariáns alteret feszít ki, melyen az SO_2 hatása ε_{p-q}-val izomorf. Ebből következik, hogy ε_k multiplicitása SO_2-nek az A_m-en való ábrázolásában $|\{(p, q, l) \mid p, q, l \geq 0,\ p + q + l = m,\ p - q = k\}|$. □

8.1.6. Tétel. *Jelölje $P(X)$ az X-en értelmezett polinom függvények terét, és $\tau : A \to P(X)$ az X-re való megszorítás operátorát. Ekkor $P(X) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \tau(H_m)$ minimális SO_3-invariáns alterek direkt összegére való felbontása $P(X)$-nek. Továbbá $\dim(\tau(H_m)) = 2m + 1$, és tetszőleges $k = 0, \pm 1, \dots, \pm m$ esetén $\tau(H_m)$-ben létezik egy skalárszorzó erejéig egyértelműen meghatározott $Y_{m,k}$ függvény, amelyre $h(z) \cdot Y_{m,k} = z^k Y_{m,k}$ minden $h(z) \in SO_2$-re. Ezek az $\{Y_{m,k} \mid m = 0, 1, 2, \dots;\ k = 0, \pm 1, \dots, \pm m\}$ függvények ortogonális bázist alkotnak $P(X)$-ben.*

8.1.7. Megjegyzés. *A 8.1 Tételben szereplő $Y_{m,k}$ függvényeket nevezik Laplace-féle gömbfüggvényeknek. Jelentőségüket az adja, hogy mivel $P(X)$ sűrű $L_2(X)$-ben, vagyis az X-en értelmezett négyzetesen integrálható függvények Hilbert-terében, azért $\{Y_{m,k} \mid m = 0, 1, 2, \dots;\ k = 0, \pm 1, \dots, \pm m\}$ egy teljes ortogonális rendszer $L_2(X)$-ben.*

A 8.1 Tétel Bizonyítása. Az 8.1.4 Állításból tudjuk, hogy $\tau(A_m) = \tau(H_m) \oplus \tau(H_{m-2}) \oplus \tau(H_{m-4}) \oplus \cdots$ minimális SO_3-invariáns alterek direkt összegére való felbontás, tehát többek között SO_3 irreducibilisen hat $\tau(H_m)$-en. Az SO_2 csoport ε_k ábrázolásának multiplicitása $H_m \cong \tau(H_m)$-ben az 8.1.3 Következmény és a 8.1.5 Lemma szerint $\lfloor \frac{m-|k|}{2} \rfloor + 1 - (\lfloor \frac{m-2-|k|}{2} \rfloor + 1) = 1$, ha $|k| \leq m$, és 0 egyébként. Tehát $\tau(H_m)$ valóban $2m+1$-dimenziós, és található benne skalárszorzó erejéig egyetlen $Y_{m,k}$ a megadott tulajdonsággal. Másfelől $P(X) = \tau(A) = \tau(\sum_m A_m) = \sum_m \tau(A_m) = \sum_m \tau(H_m)$. Már megállapítottuk, hogy SO_3 irreducibilisen és páronként nem-izomorfan hat a $\tau(H_m)$ altereken (hiszen a dimenziójuk páronként különböző), így a 5.3.1 Lemma szerint ezek az alterek páronként ortogonálisak, és az összegük direkt összeg. Rögzített m esetén SO_2 ábrázolása $\tau(H_m)$-en $\sum_{k=-m}^{m} \varepsilon_k$, azaz páronként nem-izomorf irreducibilisek összege. Ismét alkalmazva a 5.3.1 Lemmát kapjuk, hogy a megfelelő $\mathbb{C}Y_{m,k}$ $(k = 0, \pm 1, \dots, \pm m)$ minimális invariáns alterek páronként ortogonálisak. □

Explicit előállítás.

$Y_{m,0}$ az egyetlen olyan függvény $\tau(H_m)$-ben, amit SO_2 minden eleme fixál. A 8.1.5 Lemma bizonyításában láttuk, hogy A_m-ben az SO_2 által fixált elemek az $u^p \bar{u}^p x_3^l$ $(2p + l = m)$ monomok lineáris kombinációi. A $\xi_i := \tau(x_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ jelöléssel $\tau(u^p \bar{u}^p x_3^l) = \tau((x_1^2 + x_2^2)^p x_3^l) = (1 - \xi_3^2)^p \xi_3^l$. Tehát $Y_{m,0} = Q_m(\xi_3)$, ahol Q_m egy legfeljebb m-edfokú 1-változós polinom. Az $Y_{m,0}, Y_{m-1,0}, \dots, Y_{0,0}$ lineárisan függetlenek, tehát $Q_0, Q_1, \dots Q_m$ bázis az m-edfokú polinomok terében, és Q_m éppen m-edfokú. Könnyen látható, hogy $(Y_{m,0}, Y_{l,0}) = 2\pi \int_{-1}^{1} \overline{Q_m(t)} Q_l(t) dt$. ezért a gömbfüggvények ortogonalitásából következik, hogy $Q_m(t)$ ortogonális az összes $\leq m - 1$-edfokú polinomra, ahol az 1-változós polinomok terén tekintjük a $(P, Q) = \int_{-1}^{1} \overline{P(t)} Q(t) dt$ skaláris szorzatot. Kijött tehát, hogy $Y_{m,0} = Q_m(\xi_3)$, ahol Q_m nem más, mint az m-edik *Legendre-polinom.* (Például: $Q_0(t) = 1$, $Q_1(t) = t$, $Q_2(t) = 3t^2 - 1$, $Q_3(t) = 5t^3 - 3t$, $Q_4(t) = 35t^4 - 30t^2 + 3$, $Q_5(t) = 63t^5 - 70t^3 + 15t$.)

8.2. Absztrakt harmonikus analízis

A 8.1 alfejezetben az egységgömbön értelmezett folytonos függvények terében adtunk meg egy teljes ortogonális rendszert, az SO_3 csoportnak az egységgömbön való hatásából kiindulva. A 7.3.1 Tételt széles körben alkalmazhatjuk hasonló problémák megoldására.

Tegyük fel, hogy a G kompakt csoport tranzitívan (és folytonosan) hat az X topologikus téren. Jelölje $C(X)$ az X-en értelmezett folytonos függvények terét, ellátva a G csoport természetes lineáris hatásával. Mindjárt látni fogjuk, hogy létezik egy G-invariáns skaláris szorzat $C(X)$-en.

Probléma. Adjunk meg egy teljes ortogonális rendszert $C(X)$-ben.

A megoldáshoz úgy jutunk, hogy $C(X)$ egy sűrű alterét felbontjuk minimális G-invariáns alterek direkt összegére.

Rögzítsünk egy $v \in X$ elemet, és legyen $H := \{g \in G \mid g \cdot v = v\}$ a v stabilizátor részcsoportja. Amint azt láttuk a 1.3.2 Állításban, az $X \to G/H := \{gH \mid g \in G\}$, $gv \mapsto gH$ egy bijekció. Így $C(X)$-et azonosíthatjuk a H-szerinti mellékosztályokon állandó függvényekből álló $C(G)^H := \{f \in C(G) \mid \forall h \in H, x \in X : \ f(xh) = f(x)\}$ altérrel $C(G)$-ben. Megjegyezzük, hogy $C(G)^H$-t interpretálhatjuk a következőképpen: G-nek a $C(G)$-n való J ábrázolását szorítsuk meg H-ra, és vegyük $C(G)$-ből a H-fixpontok alterét. A 7.3.1 Tétel alapján

$$C(G)^H = \overline{\bigoplus_k M(\rho_k)}^H = \overline{\bigoplus_k M(\rho_k)^H} = \overline{P(G)^H}.$$

(Itt a második egyenlőségnél azt használtuk, hogy $J(h)(f) = J(h)\sum_k f_k = \sum_k J_{M(\rho_k)} f_k$.) Tehát a fenti probléma megoldásához nem kell mást tennünk, mint expliciten leírni az $M(\rho)^H$ tereket a $\rho : G \to GL(V)$ véges dimenziós irreducibilis ábrázolásokra. A 4.4.4 Tételben megadtunk egy $M(\rho) \cong V \otimes V'$ izomorfizmust a $G \times G$ csoport R és $\rho \otimes \rho'$ ábrázolásai között. Ebből világosan következik, hogy $M(\rho)^H \cong V^H \otimes V'$ (ahol V^H jelöli a H-fixpontok alterét V-ben), és $B_{M(\rho)^H} \cong 1_{V^H} \cdot \rho'$.

Koordinátákban kifejezve ez a következőt jelenti. Egészítsük ki a V^H altér $b_1, \ldots, b_l$ ortonormált bázisát a V tér $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává, és jelölje $\beta_1, \ldots, \beta_n$ a V'-beli duális bázist. Legyenek $\rho_{i,j}$ a megfelelő mátrix elemei ρ-nak. Mivel az $M(\rho)^H \cong V^H \otimes V'$ izomorfizmusnál $\rho_{i,j}$ a $b_j \otimes \beta_i$-nek felel meg, azért bármely $j \in \{1, \ldots, l\}$-re $\rho_{1,j} \ldots, \rho_{n,j}$ egy minimális B-invariáns alteret feszít ki $M(\rho)^H$-ban, és G-nek az ezen való ábrázolása izomorf ρ'-vel.

Összefoglalva, véve a fentieknek megfelelően a $\rho_{i,j}$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots l)$ függvényeket a G összes véges dimenziós irreducibilis ábrázolásaira, és tekintve őket, mint $C(X)$ elemeit, kapunk egy teljes ortogonális rendszert $C(X)$-ben. Ezeket a $\rho_{i,j}$ függvényeket szokás *gömbfüggvényeknek* nevezni.

9. Ajánlott irodalom, hivatkozások

Az ábrázoláselméleti anyag felépítésében lényegesen támaszkodtunk E. B. Vinberg „Linear Representations of Groups" (angolul, Birkhäuser, Basel) című rövid tankönyvére. A metánmolekula sajátrezgéseinek osztályozásával foglalkozó részt Babai László egyetemi előadásain hallottam. Az érintett csoportelméleti alapfogalmak és tények megtalálhatók a legtöbb absztrakt algebrai tankönyvben (ld. pl. Fried Ervin „Általános Algebra" (Tankönyvkiadó, 1981)).

Létezik számos fizikusok számára írt csoportelméleti könyv, pl. A. O. Barut és R. Raczka „Theory of Group Representations and Applications" (angolul, PWN–Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1980.) című könyve a reprezentációelmélet fizikusok számára lényeges fejezeteit átfogó nagyobb lélegzetű monográfia. Hasonlóan nagyszámú Lie-csoportokkal foglalkozó tankönyv, monográfia közül válogathat az érdeklődő olvasó.

Végül felhívom a figyelmet I. R. Safarevics „Algebra" (magyarul, Tipotex, Budapest, 2000.) című izgalmas esszéjére, melyben a szerző áttekinti az algebrát annak a matematika más ágaival és a természettudományokkal való kapcsolata szempontjából.