Fizikus Diákkör Csoportelmélet Nyári Iskola

Tóth József 1976, Baja

A véges csoportok ábrázolásairól

Alapfogalmak:

A G csoport ábrázolásán értünk egy olyan $D/g/$ leképezést a G csoportról a V lineáris téren értelmezett lineáris transzformációk körébe, amely teljesiti a következő összefüggést: $D/gh/=D/g/\cdot D/h/$ $\forall g, h \in G$

A $D/g/$ ábrázolásra invariáns altérnek nevezzük azt a V_1 lineáris alteret V -ben, melynek $\forall x \in V_1$ elemére igaz, hogy

$$D/g/x \in V_1 \quad \forall g \in G\text{-re}$$

Triviális invariáns alterek V-ben a $\{0\}$ nullelemből álló altér és az egész V tér.

A $D/g/$ ábrázolás reducibilis, ha létezik V-ben a $D/g/$ ábrázolásra nézve nem triviális invariáns altér. Ellenkező esetben $D/g/$ irreducibilis.

Legyen adott egy V_1 lineáris téren a G csoport $D_1/g/$ és egy V_2 - " - - " - $D_2/g/$ ábrázolása.

A két ábrázolást ekvivalensnek mondjuk, ha létezik egy A invertálható lineáris leképezés V_1-ről V_2-re ugy, hogy

$$D_2/g/=AD_1/g/A^{-1} \qquad \forall g \in G\text{-re.}$$

* * *

A véges csoportok ábrázoláselméletének fontos feladata - többek közt -, hogy: /1/ feltérképezze egy meghatározott - illetve, ha lehetséges, az összes elképzelhető - véges csoport ábrázolásainak szerkezetét.
/2/ összefüggéseket találjon a csoportok és ábrázolások szerkezete között. A jelen fejezetben ezekkel a problémákkal fogunk részletesebben foglalkozni. Először a véges csoportok véges dimenziós reprezentációira vonatkozó, legfontosabb, általános érvényü tételeket vesszük szemügyre, majd az összes lehetséges /véges/ csoport-struktúrát reprezentáló permutációcsoport ábrázolásaival fogunk foglalkozni.

* * *

1. § Irreducibilis felbonthatóság

Mindenekelőtt felmerülhet a kérdés: vajon egy N db elemet tartalmazó G csoport tetszőleges véges dimenziós ábrázolása nem építhető-e fel irreducibilis ábrázolásokból. Ha igen – a reducibilis ábrázolások tulajdonságai az irreducibilisekéiből már következnek s igy elég ezen utóbbiakat vizsgálni.

Tekintsünk egy V n dimenziós lineáris teret. Legyen az n_1 dimenziós V_1 sé az n_2 dimenziós V_2 V-beli lineáris altér. Azt mondjuk, hogy V előáll <u>V_1 és V_2 direkt összegeként</u>

$$V=V_1\oplus V_2 \qquad /1/$$

ha $\forall x \in V$ egyértelmüen előállitható

$$x=x_1+x_2 \qquad x_1 \in V_1, x_2 \in V_2 \qquad /2/$$

alakban. Az egyértelmüség alatt azt értjük, hogy

$$x=x_1+x_2=y_1+y_2 \qquad x_1,y_1 \in V_1; x_2,y_2 \in V_2 \qquad /3/$$

-ből következik, hogy $x_1=y_1$ és $x_2=y_2$. $\qquad$ /4/

Ha V-re fennáll /1/ akkor V_1 és V_2 közös eleme csak a null-elem lehet. Az egyértelmü /2/ felbontásból továbbá következik az is, hogy, ha V_1-en bázis az $\{e_i\}_{i=1}^{n_1}$ rendszer és

V_2-n bázis az $\{e_i\}_{i=n_1+1}^{n}$ rendszer, akkor a V-n bázis az $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ vektorrendszer. $\qquad$ /5/

Ezek után tekintsünk egy $D/g/$ $g \in G$ reducibilis ábrázolást a V téren. Tegyük fel, hogy feltérképeztük az összes V_i / n_i dimenziós irreducibilis alteret V-ben. Két eset lehetséges: vagy ki tudunk választani az alterek közül k db-t ugy, hogy

$$V=\sum_{i=1}^{k}\oplus V_i \qquad /6/$$

teljesüljön, vagy nem. Ha /6/ teljesül, akkor $D/g/$ -t sikerült segitségével egy $D^{/i/}/g/$ irreducibilis reprezentáció definiálható:

$$D^i/g/x_i = D/g/x_i \qquad x_i \in V_i \qquad /7/$$

Ezek segitségével a $D/g/$ operáció a következőképp hat egy $x \in V$ elemre:

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i \qquad x_i \in V_i \qquad \text{egyértelműen} \qquad /8a/$$

$$D/g/x = \sum_{i=1}^{k} D^i/g/x_i \qquad /8b/$$

Ezt szimbolikusan ugy is jelölhetjük, hogy

$$D/g/x = \sum_{i=1}^{k} \oplus D^i/g/ \cdot x$$

$$D/g/ = \sum_{i} \oplus D^i/g/ \qquad /9/$$

Nézzük meg milyen $D/g/$ mátrix alakja, ha V bázisát a V_i direkt alterek bázisából tesszük össze:

$$\underbrace{e_1 \dots e_{N_1}}_{V_1 \text{ bázisa}} \underbrace{e_{N_1+1} \dots e_{N_2}}_{V_2 \text{ bázisa}} \dots \underbrace{e_{N_{k-1}} \dots e_{N_k}}_{V_k \text{ bázisa}} \qquad /10/$$

$$\text{itt } N_i = \sum_{s=1}^{i} n_s \qquad i=1\dots k$$

A $D_{rs}/g/$ mátrixelemei def.-szerint:

$$D/g/e_s = \sum_{r=1}^{N_k} e_r D_{rs}/g/ \qquad e_s \in V_i \qquad /11/$$

Mivel azonban V_i $D/g/$ -re invariáns, ezért, ha $e_s \in V_i$ akkor $D/g/e_s \in V_i$ szintén, igy /11/ jobb oldalán csak az $e_r \in V_i$ báziselemek szerepelhetnek:

$$N_{i-1} < s \leq N_i$$

$$D_{rs}/g/=0 \quad \text{ha} \quad 1 \leq r \leq N_{i-1} \qquad i=1\dots k \qquad /12/$$
$$N_i < r \leq N_k$$

/7/ szerint ugyanakkor:

$$D\ /g/ = D^i\ /g/ \qquad \text{ha } N_i < r,s \leq N_i$$

Tehát a /10/ bázisban

$$D/g/=\begin{bmatrix} D^1/g/ & 0 \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & D^2/g/ & \vdots \dots\dots 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots D^k/g/ \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \oplus D^i/g/ \qquad /14/$$

Itt a $D^i/g/$ -k már irreducibilis reprezentációk. A /14/ alakú felbontást a /6/ feltevéssel vezettük le. Vajon milyen tulajdonsággal kell rendelkeznie egy $D/g/$ -nek ahhoz, hogy /6/ kielégüljön? Állitjuk, hogy annak elégséges feltétele, hogy egy reducibilis $D/g/$ irreducibilis ábrázolások direkt összegére felbontható legyen, az, hogy

$$D^+/g/=D^{-1}/g/ \qquad \forall g \in G\text{-re.} \qquad (D(g) \text{ unitér}) \qquad /15/$$

Legyen V_1 invariáns /nem triviális/ altér $D/g/$ -re V-ben. Legyen továbbá V_2 V_1 ortogonális kiegészitő altere. Ekkor

$$V=V_1 \oplus V_2$$

és /15/ miatt V_2 is invariáns altér lesz V-ben:

$$x \in V_1, y \in V_2 \Longrightarrow \langle x|y\rangle=0$$
$$\langle D/g/x|D/g/y\rangle=\langle x|y\rangle=0 \qquad /16/$$

Ha V_1 és V_2 irreducibilisek - további invariáns altereket V-ben nem találunk, ha pedig V_1 és V_2 közül bármelyik is reducibilis, azt újabb invariáns, ortogonális alterek direkt összegére bonthatjuk a fenti eljárás segitségével. Mivel a V tér dimenziója véges - ez a processzus egyszer véget ér és igy irreducibilis alterek direkt összegeként állitottuk elő V-t.

A /15/ tulajdonságu unitér ábrázolást tehát sikerült irreducibilis ábrázolásokra visszavezetni. Vajon igaz-e az, hogy G bármely ábrázolása ekvivalens egy unitér ábrázolással és igy irred. ábr.-ok direkt összegeként áll. elő? A válasz: igen. Ennek bizonyitása a következő: Definiáljunk az N elemü G csoport D/g/ ábrázolása segitségével egy új skalárszorzatot:

$$(x;y)=\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\langle D/g/x|D/g/y\rangle \qquad /17/$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban teljesiti a skalárszorzatra kirótt összes követelményt. A $(\,;\,)$ skal. szorzatban $D/h/^{+}=D/h/^{-1}$ $\forall h\in G$-re ,mert:

$$(D/h/x;D/h/y)=\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\langle D/hg/x|D/hg/y\rangle$$

Ha g végigfut G összes elemén, akkor nyilván /hg/ is végigfut G-n

$$(D/h/x;D/h/y)=(x;y) \qquad /18/$$

Legyen az $\langle x|y\rangle$ skal. szorzatra orltonormált bázis $e_1\ldots e_n$ $\langle e_i|e_k\rangle=\delta_{ik}$
és az $(x;y)$ - " - $f_1\ldots f_n$ $(f_i;f_k)=\delta_{ik}$

Az $\{e_i\}$ és $\{f_i\}$ bázisrendszereket egy nem elfajuló lineáris transzformáció köti össze:

$$f_i=Ce_i$$

Legyen x,y 2 tetszőleges vektor:

$$x=x_ie_i \qquad Cx=x_iCe_i=x_if_i$$

$$y=y_ie_i \qquad Cy=y_iCe_i=y_if_i$$

ezek skalárszorzatai:

$$\langle x|y\rangle=\sum_{ik}x_i^*y_k\,\langle e_i|e_k\rangle=\sum_i x_i^*y_i$$

$$(Cx;Cy)=\sum_{ik}x_i^*y_k(f_i;f_k)=\sum_i x_i^*y_i$$

Tehát

$$\langle x|y\rangle=(Cx;Cy) \qquad /19a/$$

$$\langle C^{-1}x|C^{-1}y\rangle=(x;y) \qquad /19b/$$

Definiáljuk a $D/g/$ -vel ekvivalens $D'/g/$ -t a C segitségével:

$$D'/g/=C^{-1}D/g/C$$

A $D'/g/$ már unitér lesz $\forall g\in G$ -re a $\langle\,|\,\rangle$ skal. szorzatra

$$\langle D'/g/x|D'/g/y\rangle=\langle C^{-1}D/g/Cx|C^{-1}D/g/Cy\rangle=$$

felhasználva /19.b/-t

$$=(D(g)Cx|D(g)Cy)$$

majd /18/ és végül /19.a/ segitségével

$$=(Cx;Cy)=\langle x|y\rangle$$

A G csoport tetszőleges véges dimenziós ábrázolása tehát irreducibilis komponensekre bontható. A későbbiekben látni fogjuk, hogy létezik olyan reducibilis ábrázolása G-nek, amely tartalmazza G összes inekvivalens, irreducibilis ábrázolását. Annak érdekében, hogy ezt bebizonyithassuk közelebbről meg kell vizsgálnunk az ábrázolási mátrixok konkrét tulajdonságait és olyan mennyiségeket kell bevezetnünk, amelyek "valahogy" jellemezhetik a reducibilis ábrázolások irred. komponensekre való felbomlását.

2. § A Schur lemma és az ortogonalitási összefüggések

Nézzük meg, hogy milyen tualjdonságokkal rendelkezik egy olyan lineáris operátor, mely felcserélhető G egy irreducibilis ábrázolásával.

I Lemma:

Ha a V téren ható A lineáris transzformáció felcserélhető a G csoport D/g/ irred. ábrázolásának valamennyi mátrixával, azaz

$$D/g/A=AD/g/ \qquad \forall g \in G \qquad /20/$$

akkor

$$A=\lambda I \qquad \lambda \text{ komplex szám} \quad /21/$$
$$I \text{ az egységoperátor}$$

Bizonyitás

A-nak nyilván van legalább egy $\lambda \neq 0$ sajátértéke. Legyen az ehhez tartozó altér V-ben V_1, ez nyilván nem csak az x=0 elemet tartalmazza

$$V_1 \overset{\text{df}}{=} \{x \mid x \in V;\ Ax=\lambda x\} \neq \{0\} \qquad /22/$$

V_1 invariáns altér D/g/-re, mert, ha $x \in V_1$, akkor /20/

$$A[D/g/x]=D/g/[Ax]=D(g)(\lambda x)=\lambda[D(g)x]$$

D/g/ irreducibilitása és /22/ miatt ekkor $V_1=V$, tehát /21/ az egész V téren igaz

Ebből a Lemmából következik, hogy egy kommutativ csoport bármely irreducibilis ábrázolása 1 dimenziós.

II Lemma

Legyen $D_1/g/$ G irreducibilis ábrázolása a V_1 lineáris téren
$D_2/g/$ G – " – – " – a V_2 – " – – " –

Ha $\exists A: V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, melyre

$$D_2/g/A = AD_1/g/ \qquad \forall g \in G \qquad (23)$$

akkor: vagy $A=0$
vagy A-nak létezik inverze (24)

Bizonyitás

/a/ A V_1 tér $A/V_1/ \subset V_2$ képe invariáns a $D_2/g/$ ábrázolása.
Mert: $\forall y \in A/V_1/$ -hez $\exists x \in V_1$ ugy, hogy $y=Ax$; /23/ segítségével innen kapjuk, hogy

$$D_2/g/y = D_2/g/Ax = A\underbrace{\left[D_1/g/x\right]}_{\in V_1}$$

Tehát $\forall y \in A(V_1)$-ra és $\forall g \in G$ -re $D_2/g/y \in A/V_1/$. Mivel $D_2/g/$ irreducibilis, ezért

$$A/V_1/ = \begin{cases} \text{vagy } \{0\} \\ \text{vagy } V_2 \end{cases} \qquad /25/$$

/b/ Legyen Ker/A/ a következő halmaz:

$$Ker/A/ = \{x \mid x \in V_1;\ Ax=0\}$$

Ez nyilván lineáris altér V_1-ben; ugyanakkor invariáns altér is a $D_1/g/$ -re, mert:

$$A\left[D_1/g/x\right] = D_2/g/\left[Ax\right] = 0$$

Itt felhasználtuk /23/-at. $D_1/g/$ irreducibilitása miatt

$$Ker/A/ = \begin{cases} \text{vagy } \{0\} \\ \text{vagy } V_1 \end{cases}$$

/25/-t és /26/-t összefoglalva a következő esetek lehetségesek:

1. $A/V_1/=\{0\}$ $Ker/A/=\{0\}$
2. $A/V_1/=\{0\}$ $Ker/A/=V_1$
3. $A/V_1/=V_2$ $Ker/A/=\{0\}$
4. $A/V_1/=V_2$ $Ker/A/=V_1$

Az 1./ esetben a V_1 tér, a 4. esetben a V_2 tér csak a null-elemből állhat, így ezek érdektelen esetek. A 2. esetben A=0 kell hogy legyen, hiszen az egész értelmezési tartományt a 0 elembe viszi át. A 3. esetben az A invertálható, hiszen ha $x_1, x_2 \in V_1$ és $x_1 \neq x_2$, akkor nem lehetséges az, hogy $Ax_1 = Ax_2$, mert $KerA=\{0\}$ miatt $A/x_1-x_2/=0$ -ból következik, hogy $x_1=x_2$, és ez ellentmond az $x_1 \neq x_2$ feltevésnek.

Megjegyezzük, hogy A=0 szükségképpen, ha $D_1/g/$ és $D_2/g/$ inekvivalens irreducibilis reprezentációk; valamint, ha $A \neq 0$, akkor $D_1(g)$ és $D_2/g/$ biztos, hogy ekvivalens ábrázolások.

$AD_2 = D_1A \Rightarrow D_2 = A^{-1}D_1A$

x x x

Legyen B egy tetszőleges lineáris transzformáció V_1-ről V_2-re, és vizsgáljuk az $A: V_1 \rightarrow V_2$ lin. leképezést, melyet a következőképp definiálunk:

$$A=\frac{1}{N}\sum_{g\in G} D^2/g^{-1}/BD^1/g/ \qquad (27)$$

$D^1/g/$ és $D^2/g/$ továbbra is irreducibilis reprezentációk; N a G elemeinek száma. Hogy A-ra a Schur-lemmát alkalmazhassuk, be kell látnunk /23/-at.

$$D^2/g/AD^1/g^{-1}/=\frac{1}{N}\sum_{h\in G} D^2/gh^{-1}/BD^1/hg^{-1}/=\frac{1}{N}\sum_{h\in G} D^2/\,hg^{-1}\,{}^{-1}/BD^1/hg^{-1}/$$

Itt felhasználtuk a $D/gh/=D/g/\cdot D/h/$ csoporttualjdonságot. A $/hg^{-1}/$ -$\forall g$-re végigfut G összes elemén, ha h is végigfut; így:

$$D^2(g)AD^1(g^{-1})=A \qquad (28)$$

vagyis $D(g)^{-1}=D(g^{-1})$ miatt /23/ teljesül. /28/-ból az is világos, hogy a $V=V_1=V_2$, $D(g)=D^1(g)=D^2(g)$ esetben a /20/ feltétel teljesül.
Az I és a II Lemmákból az A operátorra tehát az következik, hogy
$\forall\ B: V_1 \to V_2$ lineáris transzformáció esetén

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G} D^2(g^{-1})BD^1(g) = 0 \qquad \text{ha } D^1 \text{ és } D^2 \text{ inekvivalens, irreducibilis ábrázolások} \qquad (29a)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G} D(g^{-1})BD(g) = \lambda I \qquad \text{ha } D \text{ irreducibilis} \qquad (29b)$$

λ értékét könnyen megkaphatjuk, ha vesszük /29.b/ mindkét oldalának a spurját, és felhasználjuk, hogy $Tr(LBL^{-1})=Tr(B)$ tetszőleges L és B lin. transzformációkra:

$$\lambda=\frac{1}{n}\,Tr(B) \qquad n = Tr(I) \text{ az ábrázolási tér dimenziója} \qquad (30)$$

ahol n a V tér dimenziója ($Tr(I)=n$) . Vezessünk be a D, D^1, D^2 helyett az 1. §-beli C operátor segitségével ezekkel ekvivalens unitér ábrázolásokat:

$$U(g)=C^{-1}D(g)C \qquad U^1(g)=C_1^{-1}D^1(g)C_1 \qquad U^2(g)=C_2^{-1}D^2(g)C_2$$

/29a/-ban irjunk $B'=C_2^{-1}BC_1$ -t;
/29b/-ben és /30/-ban irjunk $B'=C^{-1}BC$ -t ;
/29/-ből és /30/-ból ezekkel a jelölésekkel kapjuk:

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G} U^2(g)^{+}\,B'\,U^1(g) = 0 \qquad \text{ha } U^2 \text{ és } U^1 \text{ inekv. irred.} \qquad (31a)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G} U(g)^{+}\,B'\,U(g) = \lambda I \qquad \text{ha } U \text{ irreducibilis} \qquad (31b)$$

$$\lambda=\frac{1}{n}Tr(B)=\frac{1}{n}\,Tr(B')$$

Irjuk át a /31/ összefüggéseket mátrixelemekre:

$$\sum_{jk}\left[\frac{1}{N}\sum_{g\in G} U^2_{ij}(g)^{+}\,U^1_{kl}(g)\right]B'_{jk}=0$$

$$\sum_{jk}\left[\frac{1}{N}\sum_{g\in G} U_{ij}(g)^{+}\,U_{kl}(g) - \frac{1}{n}\,\delta_{il}\,\delta_{jk}\right]B'_{jk}=0$$

Mivel B'_{jk} tetszőleges mátrix lehet, válasszuk meg spec. ugy, hogy egyetlen elemén kivül az összes többi zérus legyen. Ezt $\forall\, j,k$ -ra megtehetjük és igy kapjuk az u.n. ortogonalitási összefüggéseket az ábrázolási mátrixok mátrixelemeire:

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G} U^{(\mu)}_{ji}/g/^{*}\, U^{(\nu)}_{kl}/g/ = \frac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\,\delta_{il}\,\delta_{jk} \qquad /32/$$

itt n_μ a μ- irred. ábrázolás dimenziója. A nem csak unitér ábrázolásokra érvényes összefüggést /29/-ből hasonló módon származtathatjuk:

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G} D^{(\mu)}_{ij}/g^{-1}/\, D^{(\nu)}_{kl}/g/ = \frac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\,\delta_{il}\,\delta_{jk} \qquad /33/$$

Vezessük be a C ekvivalencia transzformáció által invariánsul hagyott mennyiségeket az u.n. karaktereket:

$$\begin{aligned} &\chi/g/=\mathrm{Tr}\, D/g/=\mathrm{Tr}\, U/g/ && \chi/g^{-1}/=\chi^{*}/g/ \\ &\chi_1/g/=\mathrm{Tr}\, D^1/g/=\mathrm{Tr}\, U^1/g/ && \chi_1/g^{-1}/=\chi_1^{*}/g/ \qquad /34/ \\ &\chi_2/g/=\mathrm{Tr}\, D^2/g/=\mathrm{Tr}\, U^2/g/ && \chi_2/g^{-1}/=\chi_2^{*}/g/ \end{aligned}$$

Akár /32/-ből akár /33/-ból a két oldalon vett megfelelő összegzéssel kapjuk az inekv. irred. ábrázolások karakterei közötti ortogonalitási összefüggéseket:

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G} \chi^{*}_{\mu}/g/\,\chi_{\nu}/g/ = \delta_{\mu\nu} \qquad /35/$$

Hadd világitsuk most meg, miért is nevezik a /32/, /35/ összefüggéseket ortogonalitási összefüggéseknek. Tekintsük mindazon $\varphi/g/$ függvényeket, amelyek a $g\in G$ elemhez egy komplex számot rendelnek. A $\{\varphi/g/\}$ függvényhalmazt nevezzük Φ térnek. Ez a tér lineáris tér lesz, ha bevezetjük az összeadást és a komplex számmal való szorzást:

$$(\varphi_1+\varphi_2)/g/=\varphi_1/g/+\varphi_2/g/$$

$$(\lambda\varphi)/g/=\lambda\cdot\varphi/g/ \qquad \lambda \text{ komplex szám,}$$

A Φ tér véges dimenziós és maximálisan épp N db lineárisan független bázis fv-t találhatunk benne:

$$B=\left\{\varphi_g \;\middle|\; \varphi_g/h/=\begin{cases}1 & \text{ha } h=g\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases} \quad \forall g,h\in G\right\} \qquad /36/$$

A $\mathcal{B}$-beli elemekkel egy tetszőleges $\psi \in \Phi$ a következőképp fejthető ki:

$$\psi = \sum_{g\in G} \psi/g/\, \varphi_g \quad \left(\to \psi(h) = \sum_{g\in G} \psi(g)\, \varphi_g(h)\right) \qquad /37/$$

az ugyanis nyilván $\forall h \in G$ -re $\psi/h/$ értéket vesz fel. A Φ téren bevezethetünk egy skalár[s]szorzatot is: $\psi, \varphi \in \Phi$ tetszőlegese

$$\langle \psi | \varphi \rangle_{\Phi} = \frac{1}{N} \sum_{g\in G} \psi^{*}/g/\, \varphi/g/ \qquad /38/$$

/32/ /35/ illetve /38/ összevetéséből most már világos, hogy $\chi/g/$ értékeket és $U_{ij}/g/$ -ket fix i,j mellett Φ-beli elemeknek kell tekintenünk és a /32/, /35/ összefüggések a Φ-térbeli skalárszorzatra vett ortogonalitási összefüggéseket jelentenek.

3. § Az ortogonalitási összefüggések következményei

Nézzük meg ezek után, hogy /32/, /35/-ből milyen következtetések vonhatók le az inekv. irred. ábrázolásokra és a reducibilis ábrázolások felbontására.

3.§./1 A /32/ szerint egy n_1 dimenziós lineáris téren ható $U^1_{ij}(g)$ irreducibilis ábrázolás n_1^2 db a Φ-térben ortogonális függvényt szolgáltat. Ugyancsak /32/ azt mondja, hogy ha találunk egy n_2 dimenziós téren ható, U^1 -vel nem ekvivalens U^2_{ij} ábrázolást, akkor találtunk még n_2^2 db egymásra és az előzőekre is ortogonális Φ-térbeli függvényt. Mivel azonban a Φ tér dimenziója $N < \infty$, ezért

$$\sum_{\mu} n_\mu^2 \leq N \qquad (39/$$

ahol a $\sum_{\mu}$ az összes inekvivalens, irreducibilis ábrázolásra vett összegzés. Tehát egy G véges csoport inekv. irred. ábrázolásainak száma véges.

3.§./2. Tétel: $D^1/g/$ és $D^2/g/$ irreducibilis ábrázolások akkor és csak akkor ekvivalensek, ha

$$\chi_1/g/ = \chi_2/g/ \qquad /40/$$

Bizonyítás: Ha D^1 és D^2 ekvivalens, akkor /40/ triviális, ha nem előtt tekintjük a $Tr(LDL^{-1}) = Tr\, D$ összefüggést. Ha viszont

Ha viszont $\chi(g)=\chi_1(g)=\chi_2(g)$, és D^1 és D^2 inekvivalens, akkor (35)-ből:

$$\langle\chi|\chi\rangle=\langle\chi_1|\chi_2\rangle_\Phi = 0 \qquad \text{mert inekv.}$$

$$\langle\chi|\chi\rangle=\langle\chi_1|\chi_1\rangle_\Phi=\langle\chi_2|\chi_2\rangle_\Phi = 1 \qquad \text{mert irreducibilisek}$$

ami ellentmondás.

3. §. /3. Tétel: A $D^1/g/$ és $D^2/g/$ tetszőleges ábrázolások akkor és csak akkor ekvivalensek, ha

$$\eta_1/g/=\mathrm{Tr}\ D^1/g/=\eta_2/g/=\mathrm{Tr}\ D^2/g/. \qquad /41/$$

Bizonyitás: 3.§./1. szerint a G csoport inekv. irred. ábrázolásaihoz tartozó karakterek elrendezhetők egy véges elemü sorozatban:

$$\chi_1\ \chi_2 \cdots\cdots \chi_i \cdots\cdots \chi_k \qquad /42/$$

Gondoljunk $D^{1,2}/g/$ /14/ alaku előállitására. Ekkor világos, hogy

$$\eta_1/g/=\sum_{i=1}^{k} m_i\,\chi_i/g/ \qquad /43/$$

$$\eta_2/g/=\sum_{i=1}^{k} \underline{m}_i\,\chi_i/g/$$

Itt m_i és $\underline{m}_i$ azt mondja meg, hogy az irreducibilis felbontásban hányszor szerepel a χ_i karakter D^1 -ben ill. D^2 -ben. Ha $\eta/g/=\eta_1/g/=\eta_2/g/$, akkor /35/ figyelembevételével

$$\langle\eta|\chi_i\rangle_\Phi = m_i = \underline{m}_i \qquad i=1,2,\ldots.k \qquad /44/$$

/44/ azt mutatja, hogy D^1 -ben és D^2 -ben csak ugyanazok az inekv. irred. ábrázolások léphetnek fel és multiplicitásuk is megegyezik.

3. §./4. tétel: A $D/g/$ ábrázolás akkor és csak akkor irreducibilis, ha

$$\langle\eta|\eta\rangle_\Phi=1 \qquad \text{ahol } \eta/g/=\mathrm{Tr}\ D/g/ \qquad /45/$$

Bizonyitás: Ha $D/g/$ irreducibilis, akkor /45/ igaz, hiszen ezt már /35/-ben is tudtuk. A forditott állitás igazolásához tekintsük az η /43/ felbontását:

$$\eta/g/=\sum_{i=1}^{k} m_i\,\chi_i$$

$$\langle\eta|\eta\rangle_\Phi = \sum_{i=1}^{k} m_i^2 = 1$$

Mivel $m_i \geqslant 0$ egész szám lehet csak - ezen utóbbi egyenletnek egyetlen lehetséges megoldása az, ha

$$m_i = 0 \quad \text{ha } i \neq j \quad /j \text{ fix}/$$
$$m_j = 1$$

4. §. A reguláris reprezentáció és a teljességi összefüggések

Ebben a §-ban egy speciális reducibilis reprezentációt fogunk vizsgálni. Épp ennek a reprezentációnak - többek közt - azért nagy a jelentősége, mert irreducibilis komponensei között megtalálható a G csoport összes inekv. irred. ábrázolása.

Rendeljünk minden $f \in G$ elemhez egy Φ téren ható $R/f/$ lineáris operátort, amely a /36/ bázisrendszeren a következőképp hat:

$$R/f/\varphi_g = \varphi_{fg} \qquad \forall f,g \in G \tag{46}$$
$$R/f_1f_2/\varphi_g = \varphi_{f_1f_2g} = R/f_1/\, R/f_2/\varphi_g \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \; R/f_1f_2/ = R/f_1/\, R/f_2/ \qquad \forall f_1,f_2 \in G$$

$R/f/$ -et G reguláris ábrázolásának nevezzük. /46/ felhasználásával könnyen beláthatjuk, hogy

$$\left[R/f/\varphi\right]/g/ = \varphi/f^{-1}g/ \qquad \forall g \in G \tag{47}$$

$$\langle R/f/\varphi \,|\, R/f/\psi\rangle_\Phi = \langle\varphi\,|\,\psi\rangle_\Phi \qquad \forall \varphi,\psi \in \Phi \tag{48}$$

$R/f/$ mátrixa a /36/ bázison /46/ miatt: (ún. permutáló mátrix)

$$R/f/\varphi_g = \sum_{g' \in G} \varphi_{g'}\, R/f/_{g'g} \tag{49}$$
$$R/f/_{gg'} = \delta_{g;fg'} = \begin{cases} 1 & \text{ha } g=fg' \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

/49/-ből az $R/f/$ karakterére adódik, hogy

$$\eta/f/ = \mathrm{Tr}\, R/f/ = \sum_{g\in G} R/f/_{gg} = \sum_{g\in G} \delta_{g;fg} = \begin{cases} N & \text{ha } e=f \\ \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{50}$$

/e a G csoport egységeleme./

$$\langle \eta | \eta \rangle_{\Phi} = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} NN\, \delta_{g;e} = N \qquad /51/$$

/51/-ből látszik, hogy $R/f/$ reducibilis $N > 1$ -re /lsd: 3.§/4. Tétel/. Az η /43/-mal analóg felbontása legyen:

$$\eta = \sum_{i} m_i \chi_i \qquad m_i \neq 0 \qquad /52/$$

/ $\sum_i$ csak az $R/f/$ -ben fellépő inekv. irred. ábrázolásokra vonatkozik/ /50/ segitségével:

$$\langle \eta | \chi_i \rangle_{\Phi} = \underset{\sim}{m_i} = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \eta^{*}/g/\, \chi_i/g/ = \chi_i/e/ = \underset{\sim}{n_i} \qquad /53/$$

ahol n_i a χ_i ábrázolás dimenziója. Ugyanekkor:

$$\langle \eta | \eta \rangle_{\Phi} = \sum_i m_i^2 = \sum_i n_i^2 = N \qquad \text{(BURNSIDE tétele)} \qquad /54/$$

/54/ /39/-cel együtt biztositja, hogy az $R/f/$ -ben G összes inekv. irred. ábrázolása fellép. Ha ugyanis létezne még egy $n_o \geqslant 1$ dimenziós /52/-ben nem szereplő, ugyanakkor minden /52/-beli-vel inekvivalens ábrázolása G-nek, akkor

$$N \geqslant \sum_{\mu} n_{\mu}^2 \geqslant \sum_i n_i^2 + n_o^2 = N + n_o^2 > N \qquad /55/$$

ami nyilván nem lehet igaz. Tehát

$$N = \sum_{\mu} n_{\mu}^2 \qquad /56/$$

/56/-ból rögtön adódik az <u>első teljességi összefüggés:</u> a B'

$$B' = \left\{ U/g/_{ij}^{(\mu)} \right\}_{\substack{\mu=1,2,\dots,k \\ i,j=1,2,\dots,n_{\mu}}} \qquad /57/$$

halmaz elemei az ortogonalitási összefüggés miatt kifeszitik a Φ teret. Bármely $\Psi \in \Phi$ kifejthető a B'-beli függvények segitségével, tehát:

$$\Psi/g/ = \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{i,j=1}^{n_{\mu}} c_{ij}^{(\mu)}\, U^{(\mu)}/g/_{ij} \qquad /58/$$

/32/-t felhasználva:

$$c_{ij}^{(\mu)} = n_\mu \langle U_{ij}^{(\mu)} | \psi \rangle_\Phi \qquad /59/$$

/59/-et visszaírva /58/-ba és kihasználva, hogy az így kapott összefüggés $\forall \psi \in \Phi$ -re igaz, kapjuk:

$$\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{i,j=1}^{n_\mu} U/g/_{ij}^{(\mu)*} U_{ij}^{(\mu)}/h/ \, n_\mu = \delta_{g;h} \qquad \forall g,h \in G \qquad /60/$$

A következő teljességi összefüggés a χ_μ $\mu=1,\ldots,k$ karakterekre vonatkozik majd. A χ_μ -kről azonban általánosságban nem állíthatjuk, hogy kifeszítik az egész Φ teret, mert van egy speciális tulajdonságuk, nevezetesen az, hogy a G-ben egy adott konjugált elemosztály minden eleméhez ugyanazt a számot rendelik: ha $g_1, g_2 \in G$ és $\exists h \in G$ ugy, hogy $g_1 = hg_2h^{-1}$, akkor

$$\chi/g_1/=TR\ D/g_1/=TR\ D/hg_2h^{-1}/=TR\ D/h/\cdot D/g_2/\cdot D/h/^{-1}=TR\ D/g_2/=\chi/g_2/ \qquad (61)$$

A G-t diszjunktan lefedő konjugált elemosztályok száma legyen r. Sok esetben $r < N$ és ekkor a G inekv. irred. ábrázolásainak karaktereiből biztos, hogy nem kererhető ki pl. egy olyan Φ -beli elem, amely minden egyes csoportelemen más-más értéket vesz fel.

Tekintsük ezért a Φ -tér $r \leq N$ dimenziós alterét, amely már csak azon függvényeket foglalja magában, melyek G-ben egy K konjugált elemosztályon ugyanazt az értéket veszik fel /u.n. centrális fv.-k/

$$C = \left\{ f \,\middle|\, f \in \Phi ;\ f/g/=f/hgh^{-1}/ \quad \forall h,g \in G \right\} \qquad /62/$$

Be fogjuk bizonyitani, hogy G inekv. irred. ábrázolásainak χ_μ $\mu=1,\ldots,r$ karakterei mindegyikére ortogonális C-beli fv. az azonosan zérus fv.-en kivül nincs, azaz: $f \in C$ esetén

$$\langle f | \chi_\mu \rangle_\Phi = 0 \quad . \quad \mu=1,\ldots,k \qquad /63/$$

-ból következik, hogy $f/g/ = 0 \ \forall g \in G$.

<u>Bizonyitás:</u> Legyen G egy irreducibilis ábrázolása D/g/ , ennek karaktere $\chi/g/=TR\ D/g/$; vegyünk egy $f \in C$ tetszőleges elemet és definiáljuk a következő operátort:

$$D_f = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} f(h)\, D(h) \qquad (64)$$

Mivel

$$D(g^{-1})\, D_f\, D(g) = \frac{1}{N} \sum_{h\in G} f(ghg^{-1}) \cdot D(h) = \frac{1}{N} \sum_{h\in G} f(h) \cdot D(h) = D_f$$

ezért D_f /21/ alaku:

$$D_f = \lambda I \qquad /65/$$

/64/-ből és /65/-ből:

$$\lambda = \frac{1}{n} \operatorname{TR} D_f = \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{h\in G} f(h) \cdot \operatorname{TR} D(h) = \frac{1}{n} \langle f^* | \chi \rangle_{\Phi} \qquad /66/$$

ahol n a $D(g)$ ábrázolás dimenziója. Térjünk most át a G csoport reguláris ábrázolásának vizsgálatára. Az $R(g)$ az $R_i(g)$ $i=1,\dots,L$ irred. /nem feltétlen inekv./ ábrázolások direkt összege /lsd. /14/ /

$$R(g) = \sum_{i=1}^{L} \oplus R_i(g)$$

A /64/-vel analóg R_{f^*} /65/ és /66/ segitségével:

$$R_{f^*} = \frac{1}{N} \sum_{h\in G} f^*(h) \cdot R(h) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{L} \oplus f^*(h) \cdot R_i(h) = \sum_{i=1}^{L} \oplus \left[\frac{1}{n_i} \langle f | \chi_i \rangle I_i \right]$$

A /63/ feltevés miatt tehát $R_{f^*} = 0$. Az R_{f^*} a Φ tér bármely elemét, igy a /36/ báziselemeit is a tér $\underline{0}$ elemébe viszi át:

$$\underline{0} = R_{f^*} \varphi_g = \frac{1}{N} \sum_{h\in G} f^*(h)\, \varphi_{hg} = \frac{1}{N} \sum_{h\in G} f^*(hg^{-1})\, \varphi_g$$

Az $\underline{0}$ minden komponense 0 ezért

$$f(g) = 0 \quad \forall g \in G$$

Ezzel tehát bebizonyitottuk, hogy a χ_μ $\mu=1,\dots,k$ inekv. irred. karakterek C-ben teljes rendszert alkotnak.

∎

Megjegyzés

1. Mivel a C altér r dimenziós - igy szükségképpen $k=r$, azaz a G-beli konjugált elemosztályok száma megegyezik a G inekv. irred. ábrázolásainak számával

2/ Ha egy csoport összes i$^{\text{rred.}}$ ábrázolása 1 dimenziós, akkor $\sum_{\mu} n_{\mu}^2 = N$ és az 1. megjegyzés miatt minden elemosztály G-ben egyetlen elemből áll, tehát

$$g = hgh^{-1} \qquad \forall h,g \in G$$

azaz a csoport kommutativ.

$\blacksquare$

A /60/-nal analóg összefüggést χ_{μ}-kre a köv. képp. kaphatjuk meg: legyen $f \in C$, akkor

$$f/h/ = \sum_{\mu=1}^{k} c_{\mu} \chi_{\mu}/h/ \quad \text{és} \quad c_{\mu} = \langle \chi_{\mu} | f \rangle_{\overline{\Phi}}$$

c_{μ} -t visszahelyettesitve:

$$f/h/ = \sum_{g \in G} \left[\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{k} \chi_{\mu}^{*}/g/ \, \chi_{\mu}/h/ \right] f/g/ \qquad \forall f \in C \quad /67/$$

legyen

$$f/h/ = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad h \in K_i \quad / \, i \text{ fix}/ \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

K_i az i. konjugált elemosztály. Ha ez s_i db elemet tartalmaz, akkor /67/-ből:

$$\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{k} \chi_{\mu}^{*}/h_i/ \, \chi_{\mu}/h_j/ = \frac{1}{s_i} \delta_{i;j} \qquad \begin{matrix} i,j = 1..k \\ h_i \in K_i \\ h_j \in K_j \end{matrix} \quad /68/$$

5. § A csoportalgebra és ennek reguláris ábrázolása

A véges csoportok ábrázoláselméletében fontos szerepet játszik a csoportalgebra. Ez az uj struktura elsősorban a csoport reguláris ábrázolásának vizsgálatára szolgáltat uj lehetőséget. Ebben a §-ban a csoportalgebrára és reguláris ábrázolására vonatkozó fontos tételeket bizonyitunk be, majd a következő §-ban ezekre épitve megmutatjuk, hogyan lehet megkonstruálni az n-ed rendü permutációcsoport összes inekvivalens irreducibilis ábrázolását a reguláris reprezentációból.

Legyen adott egy N elemü G csoport. Tekintsük azt a lineáris teret, amelyet a G csoport elemei, mint bázisvektorok feszitenek ki /ez teljesen analóg a $\overline{\Phi}$ térrel ha φ_g helyébe g-t gondolunk/:

A LEGFONTOSABB VÉGES CSOPORTOK KARAKTERTÁBLÁZATAI

Pontcsoportokra:

A, B: 1 dim, E: 2 dim, F(T): 3 dim. Az A ábrázolások bázisfüggvényei szimmetrikusak, a B ábrázolások függvényei antiszimmetrikusak az n-ed rendű főtengely körüli forgatásokkal szemben. A σ_h tükrözéssel szemben különböző szimmetriát mutató függvényeket egy vagy két vesszővel különböztetjük meg, a g és u indexek pedig a ponttükrözéskor mutatott szimmetria jelölésére szolgálnak. Az ábrázolás jelével együtt feltüntetett x, y, z betűkkel utalunk arra, hogy milyen ábrázolás szerint transzformálódnak maguk a koordináták; a z tengelyt mindig a fő szimmetriatengely irányába választjuk. Az ε és ω betűk jelentése:

$$\varepsilon = e^{2\pi i/3}, \quad \omega = e^{2\pi i/6} = -\omega^4,$$

$$\varepsilon + \varepsilon^2 = -1, \quad \omega^2 - \omega = -1.$$

A kvaternió csoport (Q) N=8

$ij = k \quad i^2 = j^2 = k^2 \quad i^4 = j^4 = k^4 = e$

Konjugált elemosztályok:

$E = \{e\} \quad T = \{i^2\}$

$I = \{i, i^3\} \quad J = \{j, j^3\} \quad K = \{k, k^3\}$

Q	E	T	I	J	K
A	1	1	1	1	1
B_1	1	1	1	−1	−1
B_2	1	1	−1	1	−1
B_3	1	1	−1	−1	1
E	2	−2	0	0	0

Pontcsoportok irreducibilis ábrázolásainak karakterei

C_i	C_2	C_s	E I / E C_2 / E σ	
A_g	A; z	A'; x; y	1	1
A_u; x; y; z	B; x; y	A''; z	1	−1

C_3		E	C_3	C_3^2
A; z		1	1	1
E; $x \pm iy$	{	1	ε	ε^2
		1	ε^2	ε

C_{2h}	C_{2v}	D_2	E / E / E	C_2 / C_2 / C_2^z	σ_h / σ_v / C_2^y	I / σ_v' / C_2^x
A_g	A_1; z	A	1	1	1	1
B_g	B_2; y	B_3; x	1	−1	−1	1
A_u; z	A_2	B_1; z	1	1	−1	−1
B_u; x; y	B_1; x	B_2; y	1	−1	1	−1

C_{3v}	D_3	E / E	$2C_3$ / $2C_3$	$3\sigma_v$ / $3U_2$
A_1; z	A_1	1	1	1
A_2	A_2; z	1	1	−1
E; x, y	E; x, y	2	−1	0

C_4	S_4		E / E	C_4 / S_4	C_2 / C_2	C_4^3 / S_4^3
A; z	A		1	1	1	1
B	B; z		1	−1	1	−1
E; $x \pm iy$	E; $x \pm iy$	{	1	i	−1	$-i$
			1	$-i$	−1	i

Pontcsoportok irreducibilis ábrázolásainak karakterei

C_6		E	C_6	C_3	C_2	C_3^2	C_6^5
A; z		1	1	1	1	1	1
B		1	−1	1	−1	1	−1
E_1	{	1	ω^2	$-\omega$	1	ω^2	$-\omega$
		1	$-\omega$	ω^2	1	$-\omega$	ω^2
E_2; $x \pm iy$	{	1	ω	ω^2	−1	$-\omega$	$-\omega^2$
		1	$-\omega^2$	$-\omega$	−1	ω^2	ω

C_{4v}	D_4	D_{2d}	E / E / E	C_2 / C_2 / C_2	$2C_4$ / $2C_4$ / $2S_4$	$2\sigma_v$ / $2U_2$ / $2U_2$	$2\sigma_v'$ / $2U_2'$ / $2\sigma_d$
A_1; z	A_1	A_1	1	1	1	1	1
A_2	A_2; z	A_2	1	1	1	−1	−1
B_1	B_1	B_1	1	1	−1	1	−1
B_2	B_2	B_2; z	1	1	−1	−1	1
E; x, y	E; x, y	E; x, y	2	−2	0	0	0

D_6	C_{6v}	D_{3h}	E / E / E	C_2 / C_2 / σ_h	$2C_3$ / $2C_3$ / $2C_3$	$2C_6$ / $2C_6$ / $2S_3$	$3U_2$ / $3\sigma_v$ / $3U_2$	$3U_2'$ / $3\sigma_v'$ / $3\sigma_v$
A_1	A_1; z	A_1'	1	1	1	1	1	1
A_2; z	A_2	A_2'	1	1	1	1	−1	−1
B_1	B_2	A_1''	1	−1	1	−1	1	−1
B_2	B_1	A_2''; z	1	−1	1	−1	−1	1
E_2	E_2	E'; x, y	2	2	−1	−1	0	0
E_1; x, y	E_1; x, y	E''	2	−2	−1	1	0	0

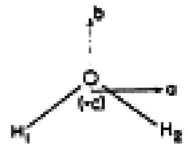
T		E	$3C_2$	$4C_3$	$4C_3^2$
A		1	1	1	1
E	{	1	1	ε	ε^2
		1	1	ε^2	ε
F; y, x, z		3	−1	0	0

O	T_d	E / E	$8C_3$ / $8C_3$	$3C_2$ / $3C_2$	$6C_2$ / $6\sigma_d$	$6C_4$ / $6S_4$
A_1	A_1	1	1	1	1	1
A_2	A_2	1	1	1	−1	−1
E	E	2	−1	2	0	0
F_2	F_2; x, y, z	3	0	−1	1	−1
F_1; x, y, z	F_1	3	0	−1	−1	1

Nemes L.: ELTE TDK

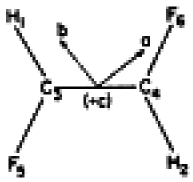
Acium. föry

Table A-4
The group $C_{2v}(M)^2$
Example: Water



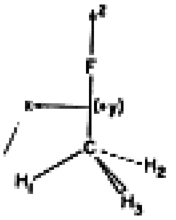
$C_{2v}(M)^2$:	E 1	(12) 1[2]	E^* 1[2]	$(12)^*$ 1[2]	R 1	
C_{2v}:	E	C_{2b}	σ_{ab}	σ_{bc}	–	
Equiv. rot.:	R^0	R_b^π	R_c^π	R_a^π	$R^{2\pi}$	
A_1:	1	1	1	1	1	: $T_b, \alpha_{aa}, \alpha_{bb}, \alpha_{cc}$
A_2:	1	1	−1	−1	1	: $J_b, \alpha_{ac}, \Gamma^*$
B_1:	1	−1	−1	1	1	: T_c, J_a, α_{bc}
B_2:	1	−1	1	−1	1	: T_a, J_c, α_{ab}
$E_{1/2}$:	2	0	0	0	−2	

Table A-5
The group $C_{2h}(M)^2$
Example: Trans-difluoroethylene (without torsional tunneling)



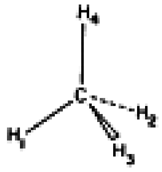
$C_{2h}(M)^2$:	E 1	(12)(34)(56) 1[2]	E^* 1[2]	$(12)(34)(56)^*$ 1	R 1	$R(12)(34)(56)^*$ 1	
C_{2h}:	E	C_{2c}	σ_{ab}	i	–	–	
Equiv. rot.:	R^0	R_c^π	R_c^π	R^0	$R^{2\pi}$	$R^{2\pi}$	
A_g:	1	1	1	1	1	1	: $J_c, \alpha_{aa}, \alpha_{bb}, \alpha_{cc}, \alpha_{ab}$
A_u:	1	1	−1	−1	1	−1	: T_c, Γ^*
B_g:	1	−1	−1	1	1	1	: $J_a, J_b, \alpha_{ac}, \alpha_{bc}$
B_u:	1	−1	1	−1	1	−1	: T_a, T_b
$E_{g,1/2}$:	2	0	0	2	−2	−2	: sep
$E_{u,1/2}$:	2	0	0	−2	−2	2	: sep

Table A-8
The group $C_{3v}(M)^2$
Example: Methyl fluoride



$C_{3v}(M)^2$:	E 1	(123) 2	$(23)^*$ 3[6]	R 1	$R(123)$ 2	
C_{3v}:	E	$2C_3$	$3\sigma_v$	–	–	
Equiv. rot.:	R^0	$R_z^{2\pi/3}$	$R_{\alpha/2}^{\pi}$	$R^{2\pi}$	$R_z^{8\pi/3}$	
A_1:	1	1	1	1	1	: $T_z, \alpha_{zz}, \alpha_{xx} + \alpha_{yy}$
A_2:	1	1	−1	1	1	: $\hat{J}_z, \Gamma^*$
E:	2	−1	0	2	−1	: $(T_x, T_y), (\hat{J}_x, \hat{J}_y), (\alpha_{xz}, \alpha_{yz}), (\alpha_{xx} - \alpha_{yy}, \alpha_{xy})$
$E_{1/2}$:	2	1	0	−2	−1	
$E_{3/2}$:	2	−2	0	−2	2	: sep

Table A-11
The group $T_d(M)^2$
Example: Methane



$T_d(M)^2$:	E 1	(123) 8	(14)(23) 3[6]	$(1423)^*$ 6	$(23)^*$ 6[12]	R 1	$R(123)$ 8	$R(1423)^*$ 6	
T_d:	E	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_d$	–	–		
A_1:	1	1	1	1	1	1	1	1	: $\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz}$
A_2:	1	1	1	−1	−1	1	1	−1	: Γ^*
E:	2	−1	2	0	0	2	−1	0	: $(\alpha_{xx} + \alpha_{yy} - 2\alpha_{zz}, \alpha_{xx} - \alpha_{yy})$
F_1:	3	0	−1	1	−1	3	0	1	: $(\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$
F_2:	3	0	−1	−1	1	3	0	−1	: $(T_x, T_y, T_z), (\alpha_{xy}, \alpha_{yz}, \alpha_{xz})$
$E_{1/2}$:	2	1	0	$\sqrt{2}$	0	−2	−1	$-\sqrt{2}$	
$E_{5/2}$:	2	1	0	$-\sqrt{2}$	0	−2	−1	$\sqrt{2}$	
$G_{3/2}$:	4	−1	0	0	0	−4	1	0	

Nemes L : ELTE TDK

Appendix H Tables of Characters of the Irreducible Representations of Some Point Groups[1]

C_s	E	σ_h		
A'	1	1	$T_x, T_y; R_z$	$\alpha_{xx}, \alpha_{yy}, \alpha_{zz}, \alpha_{xy}$
A''	1	-1	$T_z; R_x, R_y$	α_{yz}, α_{zx}

C_i	E	i		
A_g	1	1	**R**	α
A_u	1	-1	**T**	

C_{2v}	E	C_2	$\sigma_v(zx)$	$\sigma_v(yz)$		
A_1	1	1	1	1	T_z	$\alpha_{xx}, \alpha_{yy}, \alpha_{zz}$
A_2	1	1	-1	-1	R_z	α_{xy}
B_1	1	-1	1	-1	$T_x; R_y$	α_{zx}
B_2	1	-1	-1	1	$T_y; R_x$	α_{yz}

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	T_z	$\alpha_{xx} + \alpha_{yy}, \alpha_{zz}$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(T_x, T_y); (R_x, R_y)$	$(\alpha_{xx} - \alpha_{yy}, \alpha_{xy}); (\alpha_{yz}, \alpha_{zx})$

$D_{2h} = V_h$	E	$C_2(z)$	$C_2(y)$	$C_2(x)$	i	$\sigma(xy)$	$\sigma(zx)$	$\sigma(yz)$		
A_g	1	1	1	1	1	1	1	1		$\alpha_{xx}, \alpha_{yy}, \alpha_{zz}$
B_{1g}	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	R_z	α_{xy}
B_{2g}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	R_y	α_{zx}
B_{3g}	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	R_x	α_{yz}
A_u	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1		
B_{1u}	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	T_z	
B_{2u}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	T_y	
B_{3u}	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	T_x	

[1] Only those point groups are included whose character tables are necessary to follow the text in individual chapters.

D_{3h}	E	$2C_3$	$3C_2$	σ_h	$2S_3$	$3\sigma_v$		
A_1'	1	1	1	1	1	1		$\alpha_{xx}+\alpha_{yy}, \alpha_{zz}$
A_2'	1	1	−1	1	1	−1	R_z	
E'	2	−1	0	2	−1	0	(T_x, T_y)	$(\alpha_{xx}-\alpha_{yy}, \alpha_{xy})$
A_1''	1	1	1	−1	−1	−1		
A_2''	1	1	−1	−1	−1	1	T_z	
E''	2	−1	0	−2	1	0	(R_x, R_y)	$(\alpha_{yz}, \alpha_{zx})$

$D_{2d}=V_d$	E	$2S_4$	C_2	$2C_2'$	$2\sigma_d$		
A_1	1	1	1	1	1		$\alpha_{xx}+\alpha_{yy}, \alpha_{zz}$
A_2	1	1	1	−1	−1	R_z	
B_1	1	−1	1	1	−1		$\alpha_{xx}-\alpha_{yy}$
B_2	1	−1	1	−1	1	T_z	α_{xy}
E	2	0	−2	0	0	$(T_x, T_y); (R_x, R_y)$	$(\alpha_{yz}, \alpha_{zx})$

T_d	E	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_d$		
O	E	$8C_3$	$3C_2$	$6C_4$	$6C_2'$		
A_1	1	1	1	1	1		$\alpha_{xx}+\alpha_{yy}+\alpha_{zz}$
A_2	1	1	1	−1	−1		
E	2	−1	2	0	0		$(\alpha_{xx}+\alpha_{yy}-2\alpha_{zz}, \alpha_{xx}-\alpha_{yy})$
F_1	3	0	−1	1	−1	$\mathbf{R}$; $\mathbf{T}$ in O	
F_2	3	0	−1	−1	1	$\mathbf{T}$ in T_d	$(\alpha_{xy}, \alpha_{yz}, \alpha_{zx})$

$O_h = O \times I$; $\mathbf{T}$ in F_{1u}; α in A_{1g}, E_g, F_{2g}

$C_{\infty v}$	E	$2C_\infty^\varphi$	...	$\infty\sigma_v$		
$A_1 \equiv \Sigma^+$	1	1	...	1	T_z	$\alpha_{xx}+\alpha_{yy}, \alpha_{zz}$
$A_2 \equiv \Sigma^-$	1	1	...	−1	R_z	
$E_1 \equiv \Pi$	2	$2\cos\varphi$	...	0	$(T_x, T_y); (R_x, R_y)$	$(\alpha_{yz}, \alpha_{zx})$
$E_2 \equiv \Delta$	2	$2\cos 2\varphi$	...	0		$(\alpha_{xx}-\alpha_{yy}, \alpha_{xy})$
$E_3 \equiv \Phi$	2	$2\cos 3\varphi$	...	0		
...	...	...				

$\mathbf{D}_{\infty h}$	$\mathbf{E}$	$2C_{\infty}^{\varphi}$	…	$\infty\sigma_v$	i	$2S_{\infty}^{\varphi}$	…	∞C_2		
Σ_g^+	1	1	…	1	1	1	…	1		$\alpha_{xx}+\alpha_{yy}, \alpha_{zz}$
Σ_g^-	1	1	…	-1	1	1	…	-1	R_z	
Π_g	2	$2\cos\varphi$	…	0	2	$-2\cos\varphi$	…	0	(R_x, R_y)	$(\alpha_{yz}, \alpha_{zx})$
Δ_g	2	$2\cos 2\varphi$	…	0	2	$2\cos 2\varphi$	…	0		$(\alpha_{xx}-\alpha_{yy}, \alpha_{xy})$
…										
Σ_u^+	1	1	…	1	-1	-1	…	-1	T_z	
Σ_u^-	1	1	…	-1	-1	-1	…	1		
Π_u	2	$2\cos\varphi$	…	0	-2	$2\cos\varphi$	…	0	(T_x, T_y)	
Δ_u	2	$2\cos 2\varphi$	…	0	-2	$-2\cos 2\varphi$	…	0		
…	…	…	…	…	…	…	…	…		

Fizikus Diákkör
Nyári Iskola
Baja 1976
(C) Kovács Gyula

Véges csoportok

A csoportelmélet alapfogalmai

A csoport definiciója

Bizonyos elemek G halmazát csoportnak nevezzük, ha elemei között értelmezve van egy müvelet /nevezzük szorzásnak/, és fennállnak a következő tulajdonságok:

1/ Zártság:
ha $a \in G$, $b \in G$, akkor $ab \in G$
/A csoportmüveletet a szorzás, tehát az elemek egymás mellé irása jelzi/

2/ Asszociativitás
ha $a, b, c \in G$, akkor
$$a(bc)=(ab)c$$

3/ Egységelem létezése:
a csoportnak létezik egy és csak egy e egységeleme, melyre:
$$ae=ea=a \quad \forall a \in G$$

4/ Inverzelem létezése:
a csoport minden elemének van egy és csak egy inverz eleme:
$$aa^{-1}=a^{-1}a=e \quad \forall a \in G$$

Ha ab=ba $\forall a,b \in G$ esetén, akkor a csoport kommutatív.

A csoport rendje

A G csoportot végesnek vagy végtelennek mondjuk aszerint, hogy elemeinek száma véges vagy végtelen. A csoport elemeinek száma a G csoport rendje /jele általában $|G|$ /.

Komplexusok, komplexusszorzás

A G csoport részhalmazait komplexuoknak nevezzük.

Két komplexus egyenlő, ha ugyanazon elemekből áll. A K_1 és K_2 komplexus szorzatát ugy értelmezzük, mint az ab alaku elemek halmazát, ahol is $a \in K_1$, $b \in K_2$. Az igy kapott halmaz a K_1K_2 komplexus.
Ha K_1 vagy K_2 üres, akkor a K_1K_2 szorzat is az.

Az elemek szorzásának asszociativitásából következik, hogy a komplexus-szorzás is asszociativ:

$$K_1(K_2K_3)=(K_1K_2)K_3$$

Ezek szerint a komplexusok félcsoportot alkotnak a komplexus-szorzásra nézve /félcsoport egy halmaz akkor, ha a szorzásra /általában műveletre/ nézve zárt és asszociativ/.

A részcsoport definiciója

A G csoport egy H komplexusát részcsoportnak /alcsoportnak/ nevezzük, ha H elemei a G-beli műveletre nézve maguk is csoportot alkotnak.

Mellékosztályok

Legyen H a G részcsoportja és $a\in G$. Az aH komplexust a G csoport H részcsoport szerinti baloldali mellékosztályának nevezzük. A Ha jobboldali mellékosztály. Ha $b\in H$, akkor $bH=H$. . Általában, ha $x\in aH$, akkor $xH=aH$, hiszen $x=ah\ (h\in H)$ -ból $xH=ahH=aH$. Mellékosztály tehát tetszőleges elemével reprezentálható /a xH mellékosztály reprezentánsa, ha $a\in xH$ /.

Tétel : Ha aH és bH G-nek két H szerinti mellékosztálya, akkor vagy aH=bH, vagy aH és bH diszjunktak.

Bizonyitás: Elég belátni, hogy ha $aH\cap bH$ nem üres, akkor aH = bH. Ha $x\in aH$ és $x\in bH$, akkor a fentiek szerint $xH=aH$ és $xH=bH$, azaz aH=bH . q.e.d.

A tételből következően, ha tekintjük G-nek a H szerinti $H, aH, bH\dots$ baloldali mellékosztályait, akkor G minden eleme ezeknek egyikébe és csak egyikébe tartozik, s ezt igy jelölhetjük:

$$G=H+aH+bH+\dots$$

A felbontásban szereplő mellékosztályok számát nevezzük H indexének. Mindez igaz jobboldali mellékosztályokra is, és belátható, hogy a jobb- és baloldali mellékosztályok száma azonos.

Lagrange tétele: Véges csoport részcsoportjának rendje és indexe osztója a csoport rendjének.

Bizonyitás: Ha G véges csoport és H ennek részcsoportja, akkor G-nek baloldali /H-szerinti/ felbontásában csak véges sok mellékosztály szerepel: $G=H+aH+\cdots+gH$. Mindegyik mellékosztályban annyi elem van, mint H rendje, igy

$$|G|=|G:H|\cdot|H|$$

ahol $|G:H|$ a H indexe q.e.d.

Normálosztó, normalizátor

A G csoport N részcsoportját normális vagy invariáns részcsoportjának vagy normálosztónak nevezzük, ha

$$aN=Na \quad , \forall a\in G$$

Jelölés: $N \triangleleft G$

Legyen A a G csoport tetszőleges nem üres részhalmaza. A normalizátorának nevezzük /jele N/A// a G csoport azon elemeinek h halmazát, melyekre:

$$hA=Ah$$

Konjugált osztályok

Legyen $a\in$ G rögzitett. G-nek önmagára való

$$x\longrightarrow axa^{-1}$$

leképezését a-val való konjugálásnak nevezzük.

A gag^{-1} alaku elemek halmazát az a elem konjugált osztályának nevezzük, itt g befutja a csoport valamennyi elemét.

Tétel: Ha b eleme a konjugált osztályának, akkor a is eleme b konjugált osztályának.

Bizonyitás. Ha b az a elem konjugált osztályában van, akkor valamely c elemmel előállitható:

$$cac^{-1}=b$$

Balról c^{-1} -gyel, jobbról c-vel szorozva:

$$a=c^{-1}bc=(c^{-1})b(c^{-1})^{-1}$$

ami épp azt jelenti, hogy a b konjugált osztályába tartozik.

__Tétel:__ Ha b nem eleme a konjugált osztályának, akkor a konjugált osztályának és b konjugált osztályának nincs közös eleme.

__Bizonyitás:__ Tegyük fel indirekt, hogy c mindkét osztálynak eleme, azaz $c = dad^{-1} = fbf^{-1}$, a csoport alkalmas d ill. f elemére. Ebből következően:

$$b = f^{-1}dad^{-1}f = (f^{-1}d)a(f^{-1}d)^{-1}$$

azaz b eleme a konjugált osztályának, ez viszont ellentmondás, q.e.d.

__Tétel:__ Minden elem eleme a saját konjugált osztályának.

__Bizonyitás:__ Ha g éppen az egységelem, akkor $g_e a g_e^{-1} = a$, q.e.d.

E tételek következménye az, hogy egy csoport elemeit közös elemmel nem rendelkező /diszjunkt/ osztályokba lehet sorolni. Az egységelem maga egy osztály. Kommutativ csoport /un. Abel-csoport/ minden eleme egy külön osztály.

__Faktorcsoport__

__Tétel:__ Egy G csoportnak valamely N normális részcsoportja szerinti mellékosztályai a komplexusszorzásra nézve csoportot alkotnak. Ennek neve: G-nek N szerinti faktorcsoportja, jele G/N.

__Bizonyitás:__ A csoportaxiómák teljesülését kell bizonyitanunk.

1. Zártság:
$$(aN)(bN) = a(Nb)N = a(bN)N = abN^2 = (ab)N$$
2. Asszociativitás:
$$aN(bNcN) = aN(bcN) = [a(bc)]N = [(ab)c]N = (abN)(cN) = (aN \cdot bN)(cN)$$
3. Neutrális elem: $eN = N$
ugyanis:
$$(eN)(aN) = e(Na)N = e(aN)N = eaN^2 = aN$$
4. Inverz elem: aN inverze $a^{-1}N$, ugyanis:
$$(a^{-1}N)(aN) = (a^{-1}a)N = eN = N \text{, q. e. d.}$$

__A szimmetrikus csoport__

Egy n elemü halmaznak önmagára való kölcsönösen egyértelmü leképezését a csoportelméletben permutációnak nevezzük /ez tehát nem azonos a kombinatorika permutáció-fogalmával/. A permutációk szorzása mint leképezésének szorzása definiálható.

A permutációk jelölése:

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix},$$

ahol $i_1, \dots i_n$ az $1, \dots, n$ számok valamilyen sorrendjét jelöli. π jelentése tehát: $1\to i_1, 2\to i_2, \dots n\to i_n$. π-vel azonos a

$$\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \dots & k_n\\ i_{k_1} & i_{k_2} & \dots & i_{k_n}\end{pmatrix}$$

permutáció, ha $k_1, \dots, k_n$ az $1, \dots, n$ tetszőleges sorrendje. Két permutáció szorzata /előbb a bal-, utána a jobboldali hajtandó végre/:

$$\pi\varrho=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ j_1 & j_2 & \dots & j_n\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \dots & i_n\\ j_{i_1} & j_{i_2} & \dots & j_{i_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ j_{i_1} & j_{i_2} & \dots & j_{i_n}\end{pmatrix}.$$

Ez a szorzás - mint a leképezések szorzata - asszociatív, de általában nem kommutatív. Az identikus permutáció:

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}$$

a szorzásnál neutrális elem: $\varepsilon\pi=\pi\varepsilon=\pi$ $\forall\pi$ esetén. Az inverz:

ha $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}$, akkor $\pi^{-1}=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \dots & i_n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}$

$$\pi\pi^{-1}=\pi^{-1}\pi=\varepsilon$$

Ezek alapján fennáll a következő tétel: n elemü halmaz önmagára való leképezései csoportot alkotnak. Ez az n-edfoku szimmetrikus csoport, jele: S_n, rendje: $n!$.

A permutációk ciklikusan is irhatók a következőképpen: az $(i_1 \dots i_k)$ ciklus azt a τ permutációt jelenti, melyre: τ: $i_1\to i_2, i_2\to i_3, \dots$ $\dots, i_k\to i_1$ és az $i_1, i_2, \dots, i_k$ között nem szereplő elemek fixen maradnak. Az (ik) ciklus neve transzpozició, az az i és k elemek felcseréli, a többit változatlanul hagyja.

Minden permutáció felirható ciklusok szorzataként, ahol is egy ciklusban az egymás között transzformálódó elemek szerepelnek, a ciklusok tehát diszjunktak. A permutációk diszjunkt ciklusok szorzataként való felirása egyértelmü. Minden permutáció felirható transzpoziciók szorzataként is, de ez a felirás már nem egyértelmü.

A továbbiak szempontjából lényeges, hogy a ciklusszerkezet alapján a szimmetrikus csoport elemei diszjunkt osztályokba sorolhatók. Egy osztályba az azonos ciklusszerkezetet mutató permutációk kerülnek.

Példa

A 3-adfoku szimmetrikus csoport, azaz az $\{1,2,3\}$ halmaz önmagára való leképezései. A leképezések, tehát a csoportelemek száma $3!=6$.
Részletesen:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=(1)(2)(3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(12)(3) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(23)(1) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(13)(2)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\,2\,3) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(132)$$

A 6 elem a ciklusszerkezet alapján jól láthatóan 3 diszjunkt osztályba sorolható /minden sor egy külön osztályt jelent/.

Fizikus Diákkör
Nyári Iskola
Baja 1976
Cs. dávid gyula

Matematikai modellek, algebrai strukturák

1. A fizikai folyamatokat, objektumokat matematikai modellel irhatjuk le. A matematikai modell /nem definiált/ elemek, objektumok és a köztük értelmezett relációk összessége. E relációk ismert szabályai egyszerüsitve tükrözik a fizikai folyamatok megfigyelt törvényszerüségeit.
Ilyen modellalkotás, hozzárendelés például:
- az elektromos térerősség vektor
- a munkavégzés vektorok skaláris szorzata
- a kvantummechanika-állapotok Hilbert-teret alkotnak
- a fényhullám elektromos és mágneses vektora merőleges

Az aláhuzott fogalmaknak csak bizonyos axiomatizálható tulajdonságait használják fel a további tárgyalásban.

2. Reláció
a/ Halmazok Descartes-féle /direkt/ szorzatának elemei az egyes halmazokból vett elemekből képzett rendezett n-esek:
$$A\times B\times C\times \dots \times N=\{(a,b,c\dots n)\,|\,a\in A, b\in B, \dots n\in N\}$$
b/ Egy relációt a halmazok direkt szorzatának egy részhalmazával adunk meg. E részhalmaz $(a,b\dots n)$ elemeire azt mondjuk, hogy teljesül rájuk az adott reláció.
Pl.: "kisebb" reláció /V=a valós számok halmaza/
$$K=\{(a,b)\,|\,a\in V, b\in V;\ a<b\}$$
Pl.: "abszolut értéke" reláció /E_3 a 3 dimenziós euklideszi tér/
$$ABS=\{(a,\underline{b})\,|\,a\in V, \underline{b}\in E_3;\ a=|\underline{b}|\}$$
c/ Ekvivalencia-reláció
Olyan előirásrendszer, amely két matematikai objektumról megállapitja, hogy /az adott nézőpontból/ azonosnak tekinthetők-e.
Azaz: egy $a\sim b : E=\{(a,b)\,|\,a\in A, b\in B;\ a\sim b\}$ reláció

ekvivalencia-reláció, ha
I. reflexiv: $a\sim a$
II. szimmetrikus: $a\sim b\rightarrow b\sim a$
III. tranzitiv: $(a\sim b)\wedge(b\sim c)\rightarrow a\sim c$

Példák: egyenlőség, kongruencia mod n, "azonos sikban lenni", stb. Minden C halmazon értelmezett E ekvivalencia-reláció páronként diszjunkt /közös elemet nem tartalmazó/ osztályokra bontja C-t. És forditva: minden /önkényes!/ osztályokra bontás definiál egy ekvivalencia-relációt: "azonos osztályban lenni".

d/Müvelet

Olyan reláció, amelyben az egyik halmazt kitüntetjük: "eredmények halmaza.

Pl.: az "összeadás" müveletet az összege reláció definiálja:

$$\ddot{o} = \{(a,b,c) \mid a \in V, b \in V, c \in V;\ a+b=c\}$$

Más fogalmazásban: a müvelet az első /n-1/ db halmaz direkt szorzatából az n-edik halmazba mutató leképezés.

$$\ddot{O} : \begin{cases} V \times V \to V \\ (a,b) \mapsto c = a+b \end{cases}$$

3. Az absztrakt algebra az algebrai strukturákkal foglalkozik. Algebrai struktura egy müveletekkel ellátott halmaz.

Megadása:
- felépitő halmazok
- a müveletek honna-hova szabályai
- axiomatikusan megkövetelt müveleti szabályok.

pl:
$V \times V, V$
$V \times V \to V$
$V \times E_3 \to E_3$

pl. tanulmányozható müveleti szabályok:
- kommutativitás léte vagy nemléte
- asszociativitás - " -
- kitüntetett elemek - " -
- invertálhatóság
- disztributivitás /legalább 2 müvelet esetén/

Vizsgálni kell az axiómák ellentmondásmentességét is. Szokásos az egzisztenciával való bizonyitás: példát mutatok a strukturára: más, ismert matematikai objektumokra és müveletekre kimutatom a strukturatulajdonságok fennállását.

I. a halmaz elemeit azonositom
II. a müveleteket definiálom
III. kimutatom az axiómák fennállását

Részstruktura

Egy A algebrai strukturának B részstrukturája, ha mint halmaz $B \subseteq A$, és ugyanazokra a müveletekre nézve A-val megegyező tipusú struktúrát alkot.

Példákat lásd az egyes konkrét struktúráknál.

4. Morfizmusok, reprezentációk

a/ Legyen M algebrai struktura $O(a,b,\ldots) = n \in M$ müvelettel. Az M' matematikai objektum az M struktura <u>homomorf</u> képe /és ezzel ugyanolyan tipusu struktura/, ha M minden $a, b \ldots$ eleméhez hozzárendelve M'-ben egy $a', b' \ldots$ elemet, M'-ben definiálható egy olyan $O'(a', b', \ldots) = n' \in M'$ müvelet, hogy n' az n-hez rendelt eleme M'-nek.

Azaz röviden: az $M \to M'$ leképezés müvelettartó:

$$\begin{array}{ll} M: & O(a, b, \cdots) = n \in M \\ \downarrow & \quad\;\; \downarrow\;\; \downarrow \qquad\quad\; \downarrow \\ M': & O'(a', b', \ldots) = n' \in M' \end{array}$$

Ekkor az $M \to M'$ leképezés <u>homomorfizmus.</u>

Ha M' /mint halmaz/ $M' \subset M$, akkor <u>endomorfizmusról</u> beszélünk.

b/ A kölcsönösen egyértelmü homomorf leképezéseket <u>izomorfiának</u> nevezzük.

Egy strukturának önmagára való izomorf leképezése <u>automorfia.</u>

Pl.: a valós szám $\mapsto$ a szám törtrésze

pl.	1,67	$\mapsto$	0,67
	-3,2	$\mapsto$	0,8
		stb.	

$\{$valós számok$\} \to [0,1)$ leképezés a megfelelően definiált törtrész-összeadással és szorzással homomorfizmus.

Pl. a tér tükrözései az origóra /müvelet a folytatás/ és az $\{1, -1\}$ halmaz /müvelet a szorzás/ <u>izomorfok</u>

c/ <u>Az izomorfizmus-elv</u> az algebra éltető nedve és alapötlete: az egymással izomorf matematikai objektumokat azonosnak tekintjük /kivéve, ha egy nagyobb halmaz részhalmazai/, és csak az izomorf leképezéssel szemben invariáns tulajdonságokat vizsgáljuk.

Precizebben: algebrai strukturák izomorfiája ekvivalencia-reláció /bizonyitsd be!/. A közös, invariáns tulajdonságokat az ekvivalencia-osztály bármelyik elemén vizsgálhatom, ahogy kényelmesebb.

Pl.: a Schrödinger-hullámmechanika és a Heisenberg-mátrixmechanika izomorfok: ugyanabban az ekvivalencia-osztályba /Dirac--kvantummechanika/ tartoznak. Ki melyiket szereti jobban, abban számolhat. A mindkettőben értelmezhető végeredmények biztosan azonosak lesznek.

d/ Reprezentáció, ábrázolás

Egy M struktura helyettesitését egy M' strukturával, ha létezik egy $\mathcal{H}: M \to M'$ homomorfizmus, reprezentációnak nevezzük.

Ez akkor hasznos, ha M'-ben könnyebben tanulmányozhatjuk ugyanazokat a tulajdonságokat. Pl.: a"lineáris transzformáció" nevű absztrakt micsodát, jól ismert, valós számhalmazzal leirható mátrixszal helyettesithetjük.

Másik példa az analitikus geometria: a sik görbéit a $2^{V\times V}$ -beli egyszerűbben kezelhető objektumokkal helyettesithetjük / $2^{V\times V} =$ {valós számpárok halmazai} /

A reprezentáció hű, ha M különböző elemeinek M' különböző elemei felelnek meg.

Szükebb értelemben vett reprezentáció: az M struktura elemeit bizonyos lineáris terek lineáris transzformációival ábrázoljuk. Ezek tovább reprezentálhatók mátrixokkal. A müveleteket pedig igyekszünk leképezni a közönséges mátrixmüveletekre /szorzás, összeadás, skalárral való szorzás, stb./.

5. Konkrét strukturák definiciója, egyszerü tulajdonságaik

A/ Félcsoport

def. S nem üres halmaz félcsoport, ha értelmezhető egy /szorzásnak nevezett/ $S \times S \to S$ müvelet, melyre:

1/ $\forall a,b \in S \quad \exists c \in S, \; c = ab$ zártság

2/ $\forall a,b,c \in S \quad (ab)c = a(bc)$ asszociativitás

Például:

- valós számok szorzása
- - " - összeadása
- $f(x), g(x)$ korlátos fgv -k szorzata $[a,b]$ -intervallumon
- n dimenziós lineáris tér vetitései $(\in S)$ az egymás után elvégzésre mint müveletre

B/ Csoport

G csoport, ha

1. 2. G félcsoport

3. $\exists\, e \in G,\ \forall a \in G \quad ea = a$ /baloldali egységelem létezése/

4. $\forall a \in G \ \exists\, b \in G \quad ba = e$ /balinverz léte/

jelölés $b = a^{-1}$

Pl.: - valós számok additiv csoportja: $(V, +)$
- nemzérus racionális számok multiplikativ csoportja $(Q \setminus \{0\}, \cdot)$
- szabályos háromszög 120°-os elforgatásai /müvelet: továbbforgatás/

ez izomorf az $\left\{1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$ halmaz multiplikativ csoportjával /bizonyitsd be/

- tetszőleges geometriai objektum hasonlósági transzformációi /müvelet: a transzformációk egymás utáni elvégzése/
- ~~páratlan számok szorzása, stb.~~

Egy csoport Abel-féle, ha a szorzás kommutativ. $ab = ba$
Fontos a permutációcsoport: n elem permutációi az egymás utáni elvégzésre nézve csoportot alkotnak.
Cayley tétele /bizonyitás később: minden véges csoport izomorf az azonos elemszámu /azonos rendü/ permutációcsoport valamelyik részcsoportjával.

C/ Gyürü

Kétmüveletes struktura /szokás szerint összeadás és szorzás/
Axiómák: R gyürü, ha

1. +-ra nézve Abel-csoport /egységeleme a gyürü <u>nulleleme</u>/
2. .-ra nézve félcsoport
3. érvényes a kétoldali disztributivitás

$$\forall a,b,c \in R: \quad \begin{aligned} a(b+c) &= ab+ac \\ (a+b)c &= ac+bc \end{aligned}$$

Pl. az egész számok gyürüje
    nxn-es mátrixok szorzásra és összeadásra

Ha egy gyürüben $a\neq 0$, $b\neq 0$, de $ab=0$, akkor a-t és b-t bal-, ill. jobboldali <u>nullosztónak</u> hivják.

Pl.: a /mod n/ kongruenciaosztályok összeadásra, és szorzásra /mod n/ nézve gyürüt alkotnak. Ha n nem primszám, akkor az n osztóit tartalmazó osztályok nullosztók.

D/ <u>Test:</u>
olyan gyürü, amelyben a 0-tól különböző elemek $\overbrace{\text{csoportot}}^{\text{a szorzásra nézve}}$ alkotnak.
   Testnek legalább 2 eleme van.
   Pl.: a racionális számtest,
        a komplex számtest
kvaterniók teste /nem kommutativ!/
Ha a gyürüaxiómákhoz hozzávesszük a 3/ csoportaxiómát, <u>egységelemes</u> gyürüt kapunk. A 4/-et is hozzávéve, test keletkezik-

E/ <u>Lineáris tér</u>
L lineáris tér az R egységelemes gyürü felett, ha értelmezve van a következő két müvelet:
   a tér elemeinek összeadása $+: L\times L \to L$
   az R-beli <u>skalárokkal</u> való szorzás: $\cdot: R\times L \to L$

1/ L +-ra nézve Abel-csoport /egységelem: <u>Nullvektor</u>/
2/ a/ $\forall \alpha\in R, \forall a\in L \quad \alpha a\in L$ zártság
   b/ $\forall \alpha,\beta\in R, \forall a\in L \quad (\alpha\beta)a=\alpha(\beta a)$ „asszociativitás"
   c/ $\forall \alpha\in R, \forall a,b\in L \quad \alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$ disztributivitás
   d/ $\forall a\in L \quad 1\cdot a=a \quad (1\in R)$

Pl.: szokásos vektorterek
     szám-n-esek tere
     $[a,b]$ -n értelmezett függvények tere

Megjegyzés: algebrailag értelmes végtelen sok elem $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ összege. Konkrét lineáris terek esetén általában konvergenciaproblémák lépnek fel.
Lineáris terek esetén szokásosan értelmezhető a dimenzió fogalma [lin. független elemek max. száma]

F/ Speciális eset: Hilbert-tér
1.2. H lineáris tér a $\mathbb{C}$ komplex számtest fölött
3. értelmezve van még egy művelet:
skalárszorzat: $H \times H \to \mathbb{C}$
a/ $\langle a|a\rangle$ pozitiv definit, csak $|a\rangle = |o\rangle$-ra $\langle o|o\rangle = o \in \mathbb{C}$
b/ $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$ a skalárszorzat hermitikus
c/ $\langle a|\alpha b+\beta c\rangle = \alpha\langle a|b\rangle + \beta\langle a|c\rangle$ a második tagban lineáris (fizikus konvenció)
$\rightarrow$ köv: az első tagban antilineáris

Véges dimenziós Hilbert-tereket euklideszi-térnek szokás nevezni.

G. Algebra
Olyan lineáris tér /az $\mathbb{R}$ egységelemes gyürü felett/, amelyben bevezetünk még egy $A \times A \to A$ "szorzást" az elemek között.
E szorzás definiáló axiómái szerint különböző algebratipusokat különböztetünk meg. A legfontosabbak:
a/ Asszociativ algebra /hiperkomplex rendszer/
Az $a \cdot b$ algebrai szorzás asszociativ, tehát rá nézve A félcsoport
Igy erre a szorzásra és az összeadásra A gyürü.
Teljesülnie kell:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall a,b \in A \quad \alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

$(A \setminus \{o\})$ /Ha A szorzásra nézve csoportot alkot, azaz test is, akkor A divizióalgebra/

b/ Lie-algebra
A szorzás nem asszociativ, hanem:
1. $\forall a \in A \quad aa = o$
2. $\forall a,b,c \in A \quad (ab)c + (bc)a + (ca)b = o$ (Jacobi azonosság)

Ezekből következik az antikommutativitás: $ab = -ba$

c) Jordan-algebra

1) $\forall a,b \in A \quad ab = ba$

2) $\forall a,b \in A \quad (a^2 b)a = a^2 (ba)$

~~Minden asszociativ algebra Jordan-algebra is.~~

Jelentőségük: tetszőleges asszociativ algebrából nyerhető Lie- és Jordan-algebra, a szorzás megfelelő ujradefiniálásával

Lie: $a \times b = ab - ba = [a,b]$ Jordan $a \circ b = ab + ba = \{a,b\}$

A kommutátorokkal, illetve antikommutátorokkal definiált "szorzásnak" nagy szerepe van a kvantumtérelméletben.

Tétel: tetszőleges Lie-algebrához van olyan asszociativ algebra, hogy az abból kommutátorral képzett Lie-algebra egy részalgebrája izomorf az eredeti Lie-algebrával.

Ha egy algebra mint vektortér véges dimenziójú, akkor ebben /véges elemszámu/ bázist megadva, a szorzás definiciójához elég megadni a báziselemek összes szorzatát. A többi elem szorzata az axiómák segitségével kiszámolható:

$$A \ni x = \sum_i a_i u_i$$

$$A \ni y = \sum_i b_i u_i \qquad \{u_i\} \text{ a bázis.}$$

$$u_i u_k = v_{ik} = \sum_l \lambda_l^{ik} u_l \qquad \text{(a báziselemek szorzata)}$$

$$xy = \Big(\sum_i a_i u_i\Big)\Big(\sum_k b_k u_k\Big) = \sum_{ikl} (a_i b_k \lambda_l^{ik})\, u_l = \sum_l c_l u_l = z$$

A λ_l^{ik} -ek az algebra karakterisztikus együtthatói (vagy struktúra-állandói)

Példák algebrára:

Asszociativ algebra:

- az nxn-es mátrixok gyürüje, kiegészitve a skalárral való szorzással, mátrixalgebrát alkot /a valós vagy komplex számtest felett/
- a valós számok teste feletti $\mathbb{C}$ algebra, mint vektortér 2 dimenziós, bázisa: e, a . A szorzás definiciója:

$$e \cdot e = e \qquad e \cdot a = a \cdot e = a \qquad aa = -e$$

Ez a komplex számtesttel, mint algebrával izomorf divizióalgebra.

- a nemszinguláris mátrixok divizióalgebrát alkotnak
- csoportalgebra

  Legyen G tetszőleges /véges/ csoport

  A G csoportalgebrája, ha A mint lineáris tér bázisát a $g\in G$ csoportelemek alkotják, és az algebrai szorzást, mint a bázis-elemek csoportbeli szorzását definiáljuk. /eredmény: a bázis egy másik eleme/
- a $p=\sum' a_n x^n$ alakú elemek polinomgyűrűje ∞ dimenziós asszociativ algebra: Bázisa $\{1, x, x^2 \dots x^n \dots\}$ szorzás: $x^k \cdot x^n = x^{(k+n)}$

Jordan-algebra:

-tetszőleges operátorok antikommutátora

Lie-algebra:

-tetszőleges mátrixalgebra a kommutátorral, mint szorzással.

-a 3 dimenziós tér közönséges vektoriális szorzása /biz be!/

-a kvaterniók asszociativ algebrájából kommutátorral definiált Lie-algebra

/kveterniók: a valós számok teste fölötti asszociativ algebra: 4 dimenziós, bázisa e, i, j, k

$$e^2=e,\quad i^2=j^2=k^2=-e$$

$$ij=-ji=k,\quad jk=-kj=i,\quad ki=-ik=j$$

Egy kveternió alakja: $x_0+x_1 i+x_2 j+x_3 k$ $\left(x_0,x_1,x_2,x_3 \text{ valós}\right)$

Ha a Lie szorzatot a fél kommutátorral definiáljuk:

$$a\times b=\frac{1}{2}(ab-ba)=$$

$$=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)i+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)j+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)k$$

A K kvaternió Lie-algebrának rész-Lie-algebrája az a V Lie-algebra, amely a kvaterniók $\alpha_0=0$ tulajdonságú részhalmazából kiindulva végzi el azt a konstrukciót. Ekkor az i,j,k elemek által generált 3 dimenziós térben a közönséges vektorszorzással izomorf műveletet vezettünk be.

6. Struktúrák direkt szorzata, direkt összege

Induljunk ki a halmazok direkt szorzatából

$$A = \{a_i\} \qquad B = \{b_i\}$$
$$A \times B = \{a_i b_k\}$$

Ha A és B azonos tipusú egyműveletes strukturák, akkor bevezethetünk a diretszorzat-halmazban egy müveletet, amelyre nézve ez a halmaz is ugyanilyen struktúra lesz:

$$A = (\{a_i\}, O(a_1 \dots a_n)) \qquad O(a_1 \dots a_n) = a \in A$$
$$B = (\{b_i\}, P(b_1 \dots b_n)) \qquad P(b_1 \dots b_n) = b \in B$$

$$A \times B = (\{a_i b_k\}, Q(a_i b_k \dots)) \text{ megfelel,}$$
$$\text{ha } Q((a_1 b_1), (a_2 b_2) \dots (a_n, b_n)) = (a, b) =$$
$$= (O(a_1 \dots a_n), P(b_1 \dots b_n))$$

Ekkor AxB-t a struktúrák direkt szorzatának nevezzük. Több müvelet esetén bonyolultabb a helyzet, az egyes konkrét strukturáknál definiáljuk a direkt szorzatot.

Egyműveletes:

Csoportok direkt szorzata:

$$a_1, b_1 \dots \in G_1$$
$$a_2, b_2 \dots \in G_2$$
$$(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$$

A szorzás definiciója: $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$
Egységelem (e_1, e_2) inverz (a_1^{-1}, a_2^{-1})

Ha a két csoportnak nincs közös eleme, akkor a direkt szorzatot elempár helyett külső szorzat alakjában irhatjuk.

$$(a_1, a_2) \to a_1 a_2$$

Ekkor a két egységelemet azonosnak tekintjük, és az uj, direktszorzat-csoportban új szorzásmüveletet vezetünk be: ha mindkét elem ugyanabból az eredeti csoportból való /amely az új csoport részcsoportja lesz/, akkor az eredeti szorzás marad érvényben, míg ha különböző eredeti csoportokból valók, akkor a szimbolikusan bevezetett a_1a_2 külső szorzat alakjában írjuk fel az eredményt. Ki kell kötni, hogy az egyik összeszorzandó csoport elemei a másik összes elemeivel felcserélhetők.

A direkt szorzat csoport elemszáma az eredeti elemszámok szorzata

Lineáris terek direkt szorzata

Ugyanazon R gyürü feletti terekről lesz szó.

$$L_1 = \{ a_1, b_1 \dots \}$$
$$L_2 = \{ a_2, b_2 \dots \}$$
$$L_1 \otimes L_2 = \{ a_1 a_2, \dots \}$$

Ez szintén lineáris tér lesz, ha kikötjük a disztributivitások:

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1 a_2 + b_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 b_2$$

valamint $\quad (\alpha a_1) a_2 = a_1 (\alpha a_2) = \alpha (a_1 a_2)$

teljesülését.

E tér dimenziója a dimenziók szorzata. Az $\{e_1 \cdots e_n\} \in L_1$ és $(f_1 \cdots f_n) \in L_2$ bázisok esetén a szorzattér bázisa:

$$(e_1 f_1, e_1 f_2 \ \dots \ e_n f_m) \subset L_1 \otimes L_2$$

Pl. Két 3 dimenziós vektor tér diadikus szorzata 9 dimenziós vektortér

Direkt összeg

Két lineáris tér békés egymás mellé építését jelenti, a még hátralevő müveletek természetesen adódó definiálásának.

Lineáris terek direkt összege /közös R gyürü felett/

$L_1 \ni a_1, \ L_2 \ni a_2 \quad ; \ L_1 \oplus L_2 = \{(a_1, a_2)\}$ szintén vektortér

ha $\quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

$\quad \alpha (a_1, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2)$

[Ez épp a csoportelméleti

Az összegtér dimenziója a dimenziók összege.
Ha a két térnek nincs közös eleme, a nullelemet közösnek tekinthetjük. és a_1+a_2 alakban írhatjuk az összegtér elemeit. $L_1 \oplus L_2$-nek L_1 és L_2 is altere.

Tétel: Minden 1-nél nagyobb dimenziójú lineáris tér diszjunkt direkt egydimenziós alterek összegére bomlik. /egy-egy bázisvektor által generált egydimenziós alterek/

Gyürük direkt összege

$$R_1 \oplus R_2 = \{(a_1,a_2) \mid a_1 \in R_1,\, a_2 \in R_2\} \text{ is gyűrű, ha}$$
$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2) = (a_1+b_1,\, a_2+b_2)$$
$$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2) = (a_1 b_1,\, a_2 b_2)$$

Diszjunkt gyürüknél irhatjuk a_1+a_2 alakban is az elemeket.
A szorzást lehet ugy "összefolytatni", hogy azonos gyürükből származó elemek szorzata az eredeti szorzat, különböző gyürükből származó elemek szorzata a közös nullelem. Ekkor

$$(a_1,a_2)(b_1,b_2) = (\underset{R_1}{a_1}+\underset{R_2}{a_2})\cdot(\underset{R_1}{b_1}+\underset{R_2}{b_2}) = \underset{R_1}{a_1 b_1}+\underset{0}{a_1 b_2}+\underset{0}{a_2 b_1}+\underset{R_2}{a_2 b_2} = (a_1 b_1,\, a_2 b_2)$$

Asszociativ algebrák direkt összege

Az algebra gyürü is és lineáris tér is, igy a direkt összeg képzésénél ugyanazokat a szabályokat kell kikötni:

$$A_1 \oplus A_2 = \{(a_1,a_2)\}$$
$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2) = (a_1+b_1,\, a_2+b_2)$$
$$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2) = (a_1 b_1,\, a_2 b_2)$$
$$\alpha(a_1,a_2) = (\alpha a_1,\, \alpha a_2)$$

Pl. mátrixalgebrák esetén:
Legyen A a 3x3-as mátrixok algebrája
B a 2x2-es mátrixok algebrája
Direkt összeg algebrájuk egy eleme:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Belátható, hogy az ilyen mátrixok összeadás, szorzás és skalárral szorzás esetén is ilyen alakúakba mennek át.

7. Mátrixreprezentációk

A legtöbb eddig tárgyalt algebrai strukturát lehet megfelelő típusu mátrixokkal reprezentálni.

Az nxn-es mátrixok a közönséges mátrixmüveletekre nézve asszociativ algebrát alkotnak. Ha az ábrázolni kivánt struktura az assz. algebra definiáló strukturái között megtalálható /pl. csoport/, akkor már csak a megfelelő n-et és a megfelelő homomorfizmust kell megkeresni. Ha további kikötések is vannak /pl test ábrázolásánál/ akkor az nxn-es mátrixok megfelelő részhalmazán kell ábrázolni /pl. a nemszinguláris mátrixokon: $\det A \neq 0$ / Ha viszont az ábrázolandó struktura axiómái ellentmondanak a mátrixalgebrának, akkor okos kompromisszumként olyan müveleteket lehet definiálni, amelyek a mátrixmüveletekkel kifejezhetők, és kielégitik a szükséges axiómákat. /pl. a Lie-algebra szorzásának kommutátoros definiciója/. Ha az ábrázolandó struktura olyan távol áll a mátrixokétól /pl. topológikus tér/, hogy ez sem megy, akkor kisnyúl.

Ábrázoló homomorfizmus természetesen nemcsak egyféleképpen választható adott strukturához. Pl. különböző dimenzióju terekre ható transzformációkat leiró mátrixokat választhatunk. Azonos dimenzió esetén előfordulhatnak ekvivalens és nemekvivalens ábrázolások. A struktura szerkezete meghatározza a lehetséges ábrázolások számát, dimenzióját, egyéb lényeges tulajdonságait. Erre a csoportok és algebrák ábrázolásánál számos példát fogunk mutatni.