Csoportelmélet

Előadó: Dávid Gyula

1. óra

- jan. első hetében lesznek a speci zh-k val. leg (csak 1 időpont lesz)
- nem kell jelentkezni elektronikusan

Aj. irodalom:

- Csoportok és gráfjaik (Magnus, Grossmann)
- Alkalmazott csoportelmélet (Hall) → 1.+2. félév anyaga
- Csoportelm. Szakköri füzet (Gyapjas Ferenc)
- Fuchs algebra

Bevezetés

ugyanazt a dolgot többféleképpen írjuk le (több nyelven)

↳ kell fordítás!!

a fordítás is egy trafó lesz → csoportot alkotnak a ford.-ok

Hogy kell szeparálni a járulékos és „valódi" dolgokat?

Szimmetria

vmilyen transzformációra nem változik a test (dolog)

↓

vmilyen fv. (pl. geom. fv.) → az előbb a koordinátatrafót néztük (1. old)

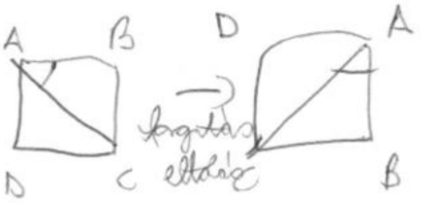
pl. elforgatás, eltolás, tükr.

de lehet $p^+ \to \bar{p}^-$ (antiproton)

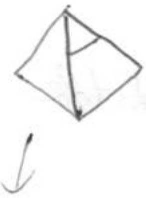
$e^- \to \bar{e}^+$ (pozitron)

(csere)

anyag ↔ antianyag : de tulajdonságaik ugyanazok
↳ szimmetrikusak



ideális objektum ugyanolyan, de ha van más tul.-dga, már nem



↓

ugyanolyan-e, mint az előzők?

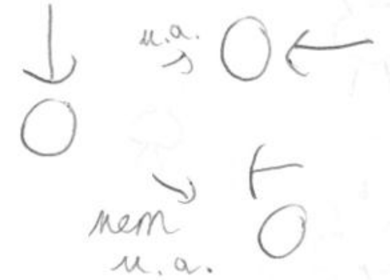
attól függ: ha belső viszonyokat tekintünk, akkor igen

ha a papír széléhez visz., akkor nem

aktív transzf.: az objektumot változtatjuk

passzív —״—: az —״— leírását —״—
(pl. más koord. rendszer)

ingaóra:



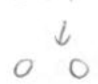
béka: rátaposunk → ezt a transzformációt nem lehet megfordítani
(invertálhatatlan trafó)

az, hogy ez a transzformáció invertálható-e, a fizikában kísérlet mondja meg

kristály

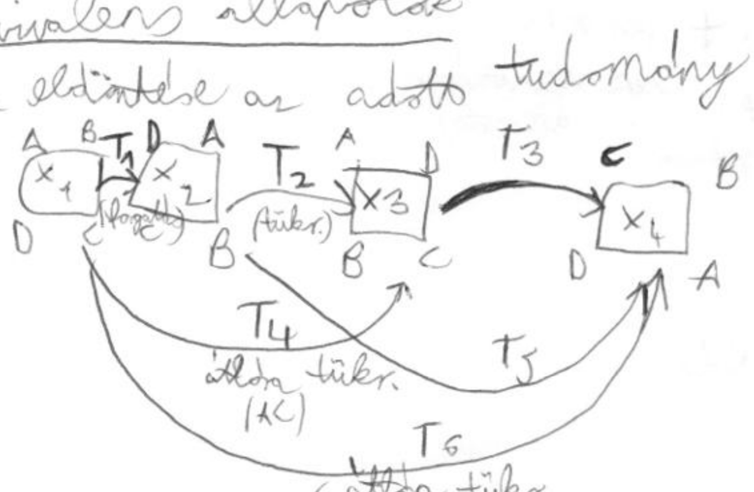
} kül. és azonos spinű atomok a rácsban

nem ugyanaz (eddig -it- volt) → de új tapasztalatokat szereztünk
↳ ez más állapot



Ekvivalens állapotok

Ezek eldöntése az adott tudomány feladata



operátor

$x_2 = T_1 x_1$

$x_3 = T_2 x_2 =$

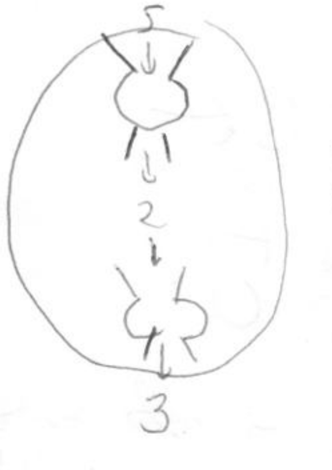
$= T_2 (T_1 x_1)$

$x_3 = T_4 x_1$

$T_4 x_1 = T_2 (T_1 x_1)$

$T_4 x_{(1)} = T_2 T_1 x$

$\boxed{T_4 = T_2 T_1}$ „folytasd"



→ maguk a transzformációk is csoportot ~~vektorteret~~ alkotnak !

$T_4 = T_2 T_1$

$T_5 = T_3 T_2$

$T_6 = \underbrace{T_5}T_1 = T_3 T_4$

$\forall T_1 T_2 T_3 \in G: (T_3 T_2) T_1 = T_3 (T_2 T_1)$ asszociativitás

nem csinálunk vele semmit → identitás

$\exists 1 \in G \ \forall T \quad 1T = T1 = T$

béka+ (ez már nem ekvivalens állapot)

ekvivalens ~~állapotok~~ tükrözés! (P) projekció

eltolás, $\text{béka}_1 \to \text{béka}_2$

$\exists 1 \in G \forall T \; 1T = T1 = T$ identitás

$\forall T \ \exists T' \quad T'T = TT' = 1$

$G \times G \to G$

$T \in G$

zárt $\forall T_1, T_2 \in G \quad \exists T_4 \in G \quad T_4 = T_2 T_1$

assoc $\forall T_1, T_2, T_3 \in G \quad T_3(T_2 T_1) = (T_3 T_2) T_1$

neut $\exists 1 \in G \quad \forall T \in G \quad 1T = T1 = T$

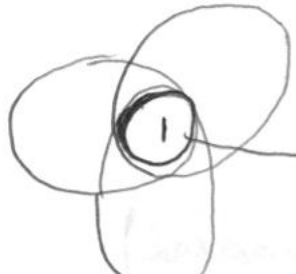
inv $\forall T \in G \quad \exists T' \in G \quad T'T = TT' = 1$

– egy fizikai objektum szimmetriatranszformációi csoportot alkotnak.

↓

- Mik egy adott objektum szimmetriatr.-i?
- Mi következik a szimmetriatul.-ból?
- Általában mi következik a csoporttul.-ból?
- Ha olyan trafót végzünk, ami már nem ~~sz~~ szimmetriatr., akkor milyen új tul.-ok lesznek?

Vannak-e az objektumoknak közös szimm. tulajdonságaik?



→ Poincaré-csoport

- identitás
- térbeli eltolások

Térben eltolom az objektumokat a környezetükkel együtt → ugyanaz marad az objektum és a fizika törvényei ~~is~~ is

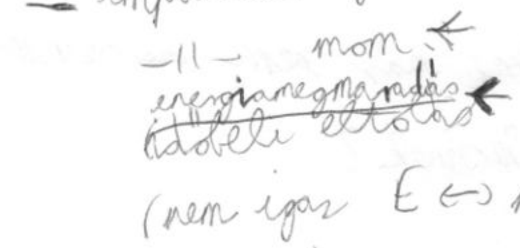
= a térnek nincs kitüntetett pontja", a "tér eltolási invariáns

a térnek nincs közepe
= a tér homogén : eltolások
(pl. a fénysebr. nem függ Budapesttől)

- elforgatás invariancia (izotróp)
  anizotróp : elforgatásra nincs invar.
  = a tér izotróp
- időbeli eltolás invar.: az idő homogén
  (valójában nem, pl. 20 milliárd évvel ezelőtt nem volt világ)

grav.

= impulzusmegm. ← eltolásinv.
  –"– mom. ← forgatásinv
  ~~energiamegmaradás~~ ← ~~térbeli~~ időbeli eltolás
  ~~időbeli eltolás~~
  (nem igaz $E \Leftrightarrow m$)
  ↓
  (az en. nem marad meg)



inerciarendszerek ↓ : (a törvények megmaradnak)
- Galilei-transzformáció
  (Galilei-féle relativitási elv)

a tükrözés nem tartozik a világ szimm.-ái közé
(elemi részecskéknél, pl. ν → nem tükrinv.)

– egy folyamat időbeli tükrözése nem játszódik le (ez nem eldöntött → sok vsz. → van valószínűség, hogy visszafelé is lejátszódik)

Poincaré-csop.

- identitás
- időbeli eltolás
- térbeli –II–
- –II– forgatás
- Galilei-tr.

↓

összesen 2-féle módon rendezhetők csoportba (1987)

↓ nincs más mód

klassz. mech. – rel. elmélet

csoportaxiómák:

- kommutativitás nem elemük
  - komm. csoportok
  - nem komm. csoportok
- véges és végtelen csoportok

2. óra

Jelölések

$G \ni g$ $(G, \cdot)$

$\downarrow$

művelet (ponttal jelölik)

1) $\cdot : G \times G \to G$

- zártság: $\forall g_1, g_2 \in G \ \exists \ g_3 = g_1 g_2$
- associativitás: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad (g_3 g_2) g_1 = g_3 (g_2 g_1)$

(félcsoport: zárt, associatív, de nincs benne seml. elem, se inverz)

pl. páros számok szorzásra $\to$ 1 nincs benne
$\to \frac{1}{2n}$ nincs benne

- semleges elem: $\forall g \in G$-re $\exists \ e \in G \quad e \cdot g = g \cdot e = g$
- inverz: $\forall \ \in G \quad \exists g' \in G \quad g \cdot g' = g' g = e$

kommutativitás nem mindig teljesül

pl. határozás, ... (a bal és jobb inverzek úgyis megegyeznek)

van úgy, hogy egyik irányú létezik, de másik nem inverz és/vagy semleges e.

áll.: ha $\forall g \in G \ \exists e, f \ \begin{cases} eg = g \\ gf = g \end{cases}$

$e = e \cdot f = f$

2) elemek száma:

- legalább 1: e
- legyen: $a \neq e \to a \cdot a = a^2 \quad a^2 \cdot a = a^3 \ldots a^n$

(van még 1 eleme)

$a^{-1} a^{-1} = a^{-2} \quad a^{-2} a^{-1} = a^{-3} \ldots a^n$

$e = a^0$

$=$ végtelen sok elem?

$\Rightarrow$ Nem! Mert nem biztos, hogy mind különbözőek pl. $(\{-1,1\}, \cdot)$

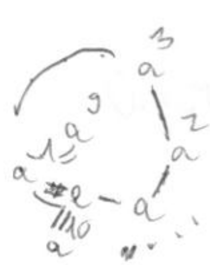
Szorzástábla

	g_1	g_2	g_3	$\cdots$	g_n
g_1	g_1g_1	g_1g_2	g_1g_3		
g_2		$\vdots$			
$\vdots$					
g_n					

	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

van inverz: $1 \to 1$
$-1 \to -1$

van egységelem: 1



$$a^{42} = \underbrace{a^7}_{e} \cdot \underbrace{a^7}_{e} \cdots \underbrace{a^7}_{e}$$

$$a^9 = a^2 \ / a^{-1}$$

$$a^9 a^{-1}$$

$$(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{9db})\, a^{-1}$$

$$\underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{8db})(\underbrace{a a^{-1}}_{e})}$$

$$= a^8 = a \ / \cdot a^{-1}$$

$$a^7 = e$$

az elem rendje: hanyadik hatványa lesz az adott elemnek a semleges elem véges csoportban véges szám az elemek rendje

$|a|=7$ → „a' rendje"

$|G|$ → „csoport rendje" : elemek száma

~~$|a|=7$~~)

$g_1 = e$

- csoportelemek : kis betű
- halmazok : nagy betű

— fizikában véges, megszámlálhatóan végtelen, kontinuum (folytonos) végtelen csoportokkal ~~vagyunk~~) foglalkozunk.

$\boxed{\text{Tétel:}}$ Egy elem rendje ~~az~~ osztója a csoport rendjének ~~(osztója)~~

$(\{0\}, +)$ ↓ 0 van benne

$0 \boxed{0}^{0}$ → semleges elem : 0 → inverz : 0

↓

1 elemű csoport

triviális csoport

(triviális ← trivia

középkor 7 szabad művészet (4 bonyolultabb, 3 egyszerűbb → „trivia" ↓ 3 alapvető tud.-ok)

↓

= alapvető

$(\{1\}, \cdot)$ ez is triviális csoport

↳ a $(\{0\}, +)$ azonos struktúrájú : izomorf

↓

mindkettő egy „absztrakt csoport" reprezentációja
(a műveletek és elemek megfeleltethetőek egymásnak)

triviális csoport: $\boxed{C_1}$

C_2	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

← mivel zárt, nem lehet $\overset{2}{a}$ benne

	e	a
e	e	a
a	a	~~b~~

	e	a
e	e	a
a	a	a

Áll: csoportban
$ax=b$ $\quad a,b\in G$
egy egyenletnek mindig van egyértelmű megoldása
(pl. ({valós számok}, ·) → $a=0$-ra ~~-nak~~ nincs mo., ha $b\neq 0$)
$\mathbb{R}$
↓
ez nem csoport (0-nak nincs inverze)

axióma (inv.)
4) → $a^{-1}\cdot /\ ax=b$ — 1) ∃ a művelet eredménye
2) → $a^{-1}(ax)=a^{-1}b$
4) → $(a^{-1}a)x=a^{-1}b$
3) → $ex=a^{-1}b$ → $\boxed{x=a^{-1}b}$ → van egyértelmű mo. és $\boxed{x\in G}$!!

↑ mivel $a^{-1}, b\in G$, és a zárt

~~Ex~~ Egzisztencia tétel: $\exists$ vmi

matekban

Unicitás tétel: egyetlen megoldás van

$$ya = b \ / a^{-1}$$

$$y(aa^{-1}) = ba^{-1}$$

$$\boxed{y = ba^{-1}}$$

Lehet-e ilyen?

$$\begin{array}{c|ccccc} & e & g_2 & g_3 & \cdots & g_n \\ \hline & & & & & \\ g & g & \cdots & g_7 & \cdots & g_7 \end{array}$$

$$g \cdot g_3 = g_7$$

$$g \cdot g_{12} = g_7$$

$$g x = g_7$$

$\downarrow$

ekkor nem lenne egyértelmű mo.

$\Downarrow$

- 1 sorban csak az elemek permutációja szerepelhet!

$$\begin{array}{c|cc} & e & a \\ \hline e & e & a \\ a & a & e \end{array} \rightarrow \exists \qquad \begin{array}{c|cc} & e & a \\ \hline e & e & a \\ a & a & a \end{array} \rightarrow \nexists$$

$\Downarrow$

csak 1 2 elemű absztrakt csoport létezik

$$\begin{array}{c|ccc} & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ a & a & & \\ b & b & & \end{array}$$

$\rightarrow$ az első sor a fejléc (~~miatt~~ 3. axióma miatt)

C_3	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	b
b	b		

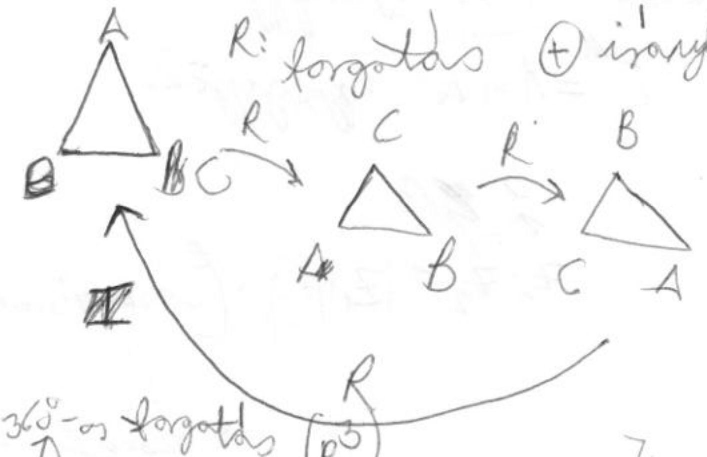
lenne: nem jó

legyen $b = a^2$

C_3	e	a	a^2
e	e	a	a^2
a	a	a^2	e
a^2	a^2	e	a

Fizikusok csoportokat transzformációkra használják
(transzf.: elemek, „folytatás": művelet)

R: forgatás ⊕ irányba 120 fokkal



$R \cdot R = R^2$

$-R = R^2$

360°-os forgatás (R^3)

	I	R	R^2
I	I	R	R^2
R	R	R^2	I
R^2	R^2	I	R

	e	a	a^2
e	e	a	a^2
a	a	a^2	e
a^2	a^2	e	a

izomorf (azonos str.)

$z_1 = 1 + i0$

$$z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

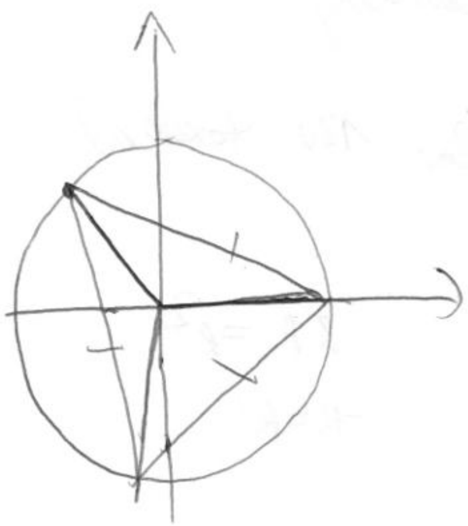
$$z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$\left(\{z_1, z_2, z_3\}, \cdot\right)$$

$$z_2 \cdot z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = +\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} =$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_3$$

szorzás nem visz ki



komplex 3. egységgyökök

$\varepsilon^n = 1 \Rightarrow n$. egységgyök

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \cdot \left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right)$$

szögek összeadódnak

	z_1	z_2	z_3
z_1	z_1	z_2	z_3
z_2	z_2	z_3	z_1
z_3	z_3	z_1	z_2

	1	ε	ε^2
1	1	ε	ε^2
ε	ε	ε^2	1
ε^2	ε^2	1	ε

→ z_2 is izomorf C_3-mal

$\varepsilon^3 = 1$

Ciklikus csoportok

pl. C_1, C_2, C_3

pl. forgatásra ciklikusak: α szöggel forgatunk, ahol

$\leftarrow n \cdot \alpha = 360°$

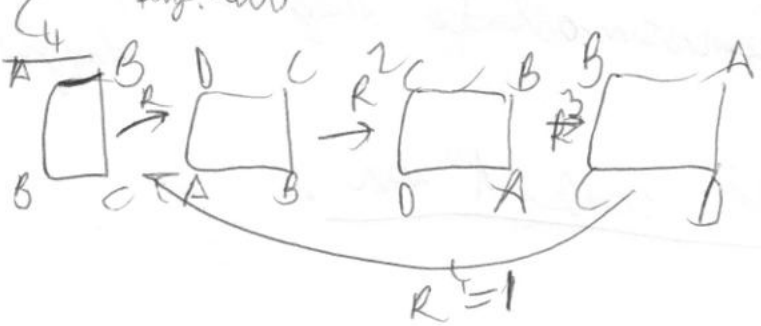
$C_n \longleftrightarrow$ szabályos n szög esetén ez szimm. ~~trafó~~

csoport

írja le a szab. n szög forg.-ait

csoport rendje

C_4



	I	R	R^2	R^3
I	I	R	R^2	R^3
R	R	R^2	R^3	I
R^2	R^2	R^3	I	R
R^3	R^3	I	R	R^2

$\sim$ e-R, a-R

	e	a	a^2	$\ldots$	a^{n-1}
e					
a					
a^2					
$\vdots$					
a^{n-1}					

$\underline{n}$ egész szám $\to$ szabályos n szög forgatása

↓

= végtelen sok ilyen véges elemű ciklikus

csoport van

mindegyik kommutatív

Van-e más csoport?

C_1, C_2, C_3 csak így konstruálható meg a csoportaxiómák alapján

$\boxed{\text{Tétel}}$: prímrendű csoportból csak 1 van.

de pl. 4. rendűből több

3. óra

C_1	e
e	e

C_2	e	a
e	e	a
a	a	e

~

	1	T
1	1	T
T	T	1

→ tükrözés $\vec{v} \to \vec{v}' = \hat{T}\vec{v}$

és $T\vec{v}' = v$

$(\hat{T}\hat{T})v = v$

$T^2 = 1$

C_3	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$b = a^2$

C	e	a	a^2
e	e	a	a^2
a	a	a^2	e
a^2	a^2	e	a

$a^3 = e$

– csoport definiáló relációja:

megadja a csoport elemei közötti összefüggéseket, de nem következik a csoportaxiómákból

C_n	e	a	a^2	$\dots$	a^n
e	e	a	a^2	$\dots$	a^n
a	a				
a^2	a^2				
$\vdots$	$\vdots$				
a^n	a^n				e

$a^n = e$

$\boxed{a^n=e}$ a def. reláció

↓

ciklikus csoport → $\frac{2\pi}{n}$-el forgatások szabályos n-szögre

↳ ezek ciklikus csoportot alkotnak

I.

K	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

II.

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

(elvileg ellenőrizni kéne az asszociativitást is, nem elég beírogatni a permutált elemeket)

III.

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

$b = a^2$

$c = b \cdot a = a^3$

C_4	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

különbözőek-e?

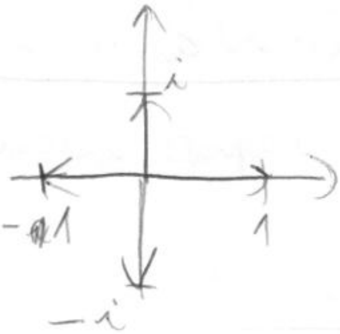
I. $a^2=e$

$b^2=e$ → ez biztos más → $\boxed{\text{Klein-csoport}}$

$c^2=e$

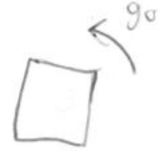
pl.

	1	i	$-1 = i^2$	$-i = i^3$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	$+1$
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	$+1$	i	-1



⇓

ez is C_4 ⟷ 90°-os forgatás a komplex síkon



(négyzet szimm. trafó)

↓

más sokszögre nem az

↓

ettől függ, hogy miről beszélünk, és hogy minek mi a szimm. csoportja

III. $a = b^2$ $\quad b^4 = e$

$c = b^3$

C_4	e	b^2	b	b^3
e	e	b^2	b	b^3
b^2	b^2	e	b^3	b
b	b	b^3	b^2	e
b^3	b^3	b	e	b^2

→ ez is C_4

Klein csoport: minek a szimmetriacsoportja?

K	e	a	b	$ab = c$
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

def. relációk

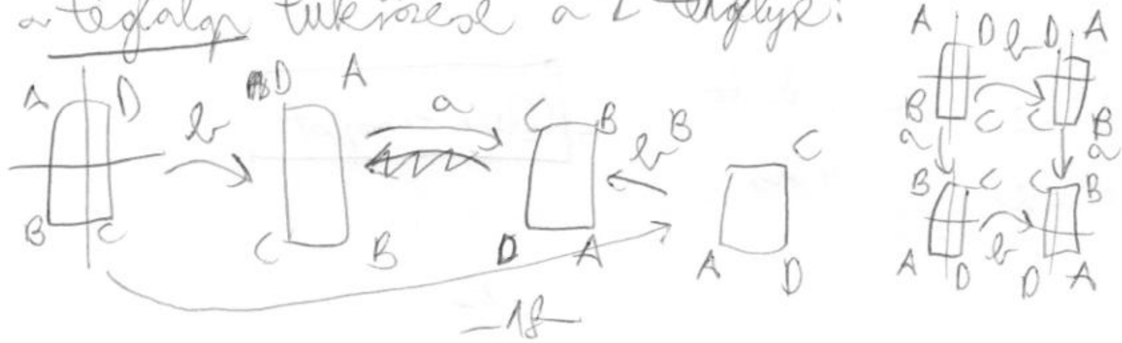
$a^2 = e$

$b^2 = e$

$ab = ba$

$(ab)^2 = e$

Ez a téglalap tükrözése a 2 tengelyre:



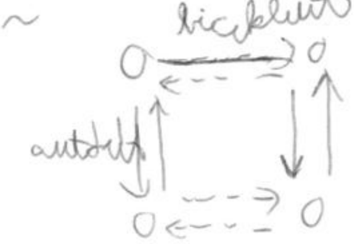
a: tükr. — tengelyre

b: tükr. | tengelyre

Téglalap nélkül.

a csoport gráfja

~



Minél kevesebb elemmel kell kifejezni az elemeket

- ↳ előfordul, hogy pár elem hatványaival a többi kifejezhető!!

Ezek a csoport generátorai: az összes elem kifejezhető ezekkel (és hatványaikkal)

- csoportrelációk: az adott csoportban állnak fent)
- definiáló reláció: nem triviális (többiből le nem vezethető!!) összefüggés (reláció)
- prezentáció: generátorok + definiáló relációk megadása

+ axiómákból sem vezethető!! le

Miért nem írjuk oda az állapotokat?

– mert minden állapot egyenértékű (a betűket csak mi írtuk oda)

(mert szimmetriatranszformációkkal foglalkozunk

minden irányból ugyanazt látjuk (most a ↑ b ↗ indulj ki)

$a(bb^{-1})a^{-1} = e$ ← csoportaxiómák

jelentése

! A definiáló relációk a csoportban
egy nem triviális köntatot adnak meg

ami nem következik
a csoportax.-ból

Újabb példa:

- betűk: a b c d f g   művelet: egymás mellé írjuk

A B C D F G

(a^{-1} b^{-1} ...)

a b ~~a A~~ c D   bármilyen sorrendben

2 ugyanolyan nagy és kis betű = ⊔ (identitás)

$(a\,b\,a)(A\,c\,D) = a\,b\,\cancel{a}\cancel{A}\,c\,D = abcD$

$(abc)(CBA) = ab(\cancel{cC})BA = a\cancel{bB}A = \cancel{aA} = ⊔$

Összes lehetséges szavak halmaza: ~~asszociatív~~ → csoport

- zárt
- asszoc. $[(\;)(\;)](\;)$

$(\;)[(\;)(\;)]$

$(\;)$

- egységelem: ⊔
- inverz: $(aBc)(CbA) = aBbA = aA = ⊔$

– nincs benne definiáló reláció!

⇓

szabad csoport

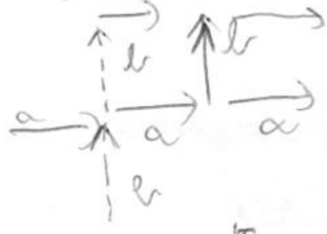
6 generátoros (az $\{A, B, C, a, b, c\}$)

↳ $\boxed{F_6}$

~~(inverzek)~~

F_2:

a, b, a^{-1}, b^{-1}



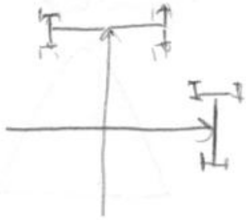
nem találkozhatnak, mert nem mondtuk, hogy $a \cdot b = b \cdot a$

↓

egyre rövidebbre rajzoljuk őket

(de ez csak a rajz, valójában ugyanazok)

fraktál (∞ sok szétválás)



↓

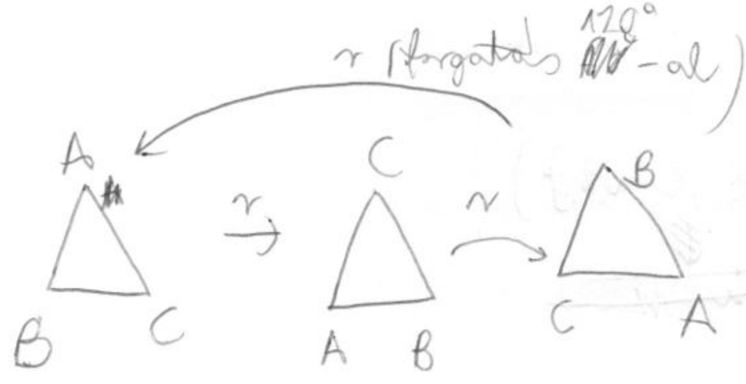
fagráf → nincsenek benne nem triviális körök

~~(szabad csoportok)~~

∞ sok eleme van

(mert nincsenek def. relációk, amik a szorzatokat visszavezetnék ~~egy (?)~~ az identitásra (körök))

Papírból kivágott △ szimmetriái



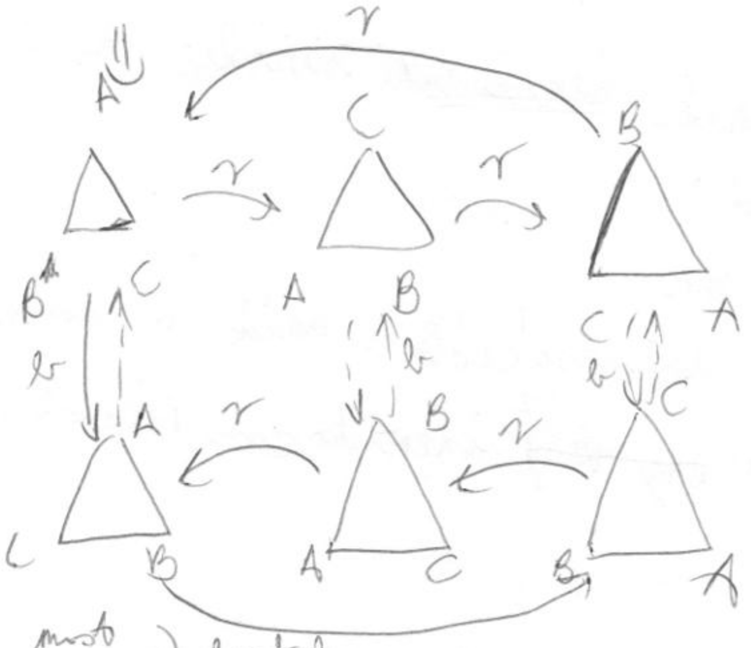
a forgatást is a △-höz ↑ rögzítem!

↓ tükrözni akarunk → melyik tengelyre? (mind ugyanolyanok)

↓ el kell rontani a szimmetriát

objektumhoz rögzítem

külvilághoz rögzítem



r: 120°-os forg

b: megfordítás

most ↻ forgattunk (erre)

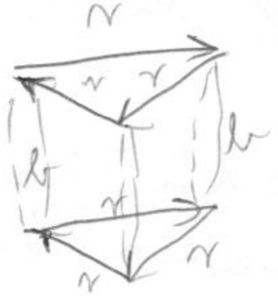
$r \cdot b \neq b \cdot r$

⇓

Nem kommutatív csoport!! (legkisebb)

D_3
↓
dieder

D_n szabályos n szög (dieder) csoportja ($\frac{360}{n}$°-os forgatásra + tükrözések vmely tengelyre)



→ : egyirányú út
- - - - : kétirányú út

ugyan ~~úgy nézel~~ annak felelnek meg ugyanazt írják le

homogén gráfok

(csoportelméletben ilyenek írják le a csoportokat)

Hány eleme van?

Áll.: Ahány pontja a gráfnak van

$(b\,r)\cdot = B$ tengelyre tükr ~ Klein-csop.ban: $a \cdot b = c$
↓
most ez is lehetett volna más ~~neve~~ elem, de az már nem lenne generátor

- b, r → a csoport generátorai

többféleen választhatjuk őket
↓
~ többféle bázis

$e \quad r \quad r^2 \quad t \quad tr \quad tr^2$

<u>Szabályok</u>

e

r

r^2

t

tr

tr^2

$$\boxed{\begin{aligned} r^3 &= e \\ t^2 &= e \\ rtrt &= e \end{aligned}}$$

$r^{-1} = r^2$

$t^{-1} = t$

Áll: 3 egyenlőség definiálja a csoportot

$(rtrt)t = et$ → most balról jobbra végezzük a műveleteket

$rtr(tt) = t$

$\underline{\underline{rtr = t}}$ $\;/\cdot r$

$rtr^2 = tr$ $\;/\cdot r$

$rtr^3 = tr^2$

$rt = tr^2$

$\underline{\underline{rt = tr^2}}$

ezek a szorzótábla kiszámolásához kellenek, hogy az egyes elemeket megadjuk

$r\,r \ldots$ $\cancel{tt}$

rt

tr^2

<u>buborékoltatás</u>: t folyamatosan halad balra → t-t talál → e

→ r-t talál → $rt = tr^2$

páros sok t → $r\,r\,r \ldots$ (kiejtják egymást)

páratlan sok t → $t\,r\,r \ldots$

$\Downarrow$

$\underbrace{r \ldots r}$

0, 1 vagy $2r$ (r^k $k \geq 3$ esetén visszavezethető $r^0/r^1/r^2$-re)

$\Downarrow$

a végén 6 elem maradhat

$\downarrow$ elemszám

$1t$	r^0	t
	r^1	tr
	r^2	$tr^2 = rt$
$0t$	r^0	e
	r^1	r
	r^2	r^2

$\Downarrow$

szóprobléma: szavakat írunk egymás mellé (szorzás)

bebizonyították, hogy nem lehet megoldani

- ezzel a buborékoltatással meg lehet oldani a visszavezetést ~~(de nincs rá általános)~~ ebben az esetben

de általában tetszőleges def. relációkat nézve nem lehet olyan ált. algoritmust megadni, ami visszavezetne a csoportelemekre

(↳ Frakterbrot: szóprobléma)

(↳ pl. egy számítógép nem tud tetsz. def. relációkból csoportot megadni)

$rt = tr^2$

$\Downarrow$

D_6	e	r	r^2	t	tr	tr^2
e	e	r	r^2	t	tr	tr^2
r	r	r^2	e	tr^2	t	tr
r^2	r^2	e	r	tr	tr^2	t
t	t	tr	tr^2	e	r	r^2
tr	tr	tr^2	t	r^2	e	r
tr^2	tr^2		tr	r	r^2	e

~~$r \cdot tr^3 = tr^2$~~

$r^2 t = r(rt) = r(tr^2) =$

$= (rt)r^2 = tr^2 \cdot r^2 = tr^4 = tr$

$(tr)^2 = e$
$(tr^2)^2 = e$ $\Bigg\} \Rightarrow$ ezek is tükrözések → a többi tengelyre

↓

jelölhetnénk más betűvel,
de mi ~~a~~ 2 generátorra vezettük
vissza, így ki kellett jelölni egyet a 3-ból, mert ezek nem függetlenek

$(tr^2)\cancel{(\ldots)}t = tr(rt) = (tr^2)t = t\,tr^2r^2 = r$
$\quad \overset{\shortparallel}{rt}$

= de kijött a
~~csoport~~
szorzástáblájából,
hogy mind 1, melyik
tengelyt választjuk a t-hez ~~szögé~~ !!

⇓ ↓
általános fogalmak

5. óra

Csoportok felbontása

1) Lagrange-tétele:

$H < G$

jelölés $\boxed{H < G}$ ≡ H részcsop.-ja G-nek

H részcsoport → G halmaz részhalmaza, és ugyanarra a műveletre csoport → ez is zárt!

Áll.: $\boxed{|H| \mid |G|}$

H elemeinek száma

osztója

G elemeinek száma

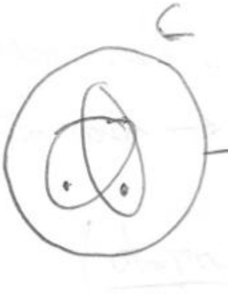
pl. (3D-s vektorok → síkbeli vektorok)

- 2 ~~egyet~~ triviális részcsoportja ∀ csoportnak van: önmaga, és a triviális csop. (C_1)
- valódi részcsoport: nem trivi. részcsop.

a) 1. lépés:

K: komplexus (rész~~csoport~~ halmaz)

$K \subseteq G$



→ veszek 2 részhalmazt, és összeszorzom az elemeket → bármi kijöhet komplexusszorzás:

$KL=\{kl \mid k\in K, l\in L\}$ k·l már nem biztos, hogy $\in K$, vagy $\in L$, vagy $K\cup L$

K, L részhalmaz

az elemek egymással vett szorzatát veszem

- $\{a\}K=\{ak \mid k\in K\}\equiv aK$ → egy elemű halmaz * tetsz. komplexus ~~komplexus~~ jelölése
- $K\{l\}=\{kl \mid k\in K\}\equiv Kl$

$|aK|=|K|$ $\qquad aK\neq Ka$, mert nem biztos, hogy kommutatív a csoport

↑

az elemek száma ugyanaz

lásd szorzástábla

↑

akkor nem lenne egyértelmű mego. egy egyenletnek

(itt nem kaphatom meg ugyanazt ← többféleképpen)

(viszont az elemek nem egyeznek meg feltétlenül, mert az: kiveszek K-ból)

K nem biztos, hogy részcsoport (csak részhalmaz)

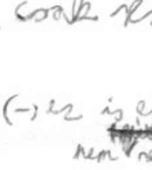
- Speciálisan: $H<G$ (H részcsoport)

aH (baloldali) mellékosztály (→ ez is egy részhalmaz, de nem részcsoport)
↳ nincs benne az egység

↳ a mellékosztályokat mindig egy adott részcsoportra nézve kell értelmezni

$aH=\{ah \mid h\in H\}$

Áll:
$$\boxed{aH \begin{cases} =H \\ \text{vagy} \\ aH\cap H=\emptyset \end{cases}}$$
(diszjunktak)



$\boxed{\text{biztos } a\in aH, \text{ mert } e\in H}$

α) $a\in H$ → ilyenkor $aH=H$ (ugyanazok az elemek vannak, csak más sorrendben felsorolva) ← szorzástábla

↓

mert H zárt (részcsoport)

β) $a\notin H$

↳ van metszet?

Biz (β): tfh. $\exists$ metszet

$x \in H \qquad x \in aH \qquad h_1, h_2 \in H$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x = h_1 \qquad x = a h_2$

$h_1 = a h_2 \quad / \leftarrow h_2^{-1} \in H$

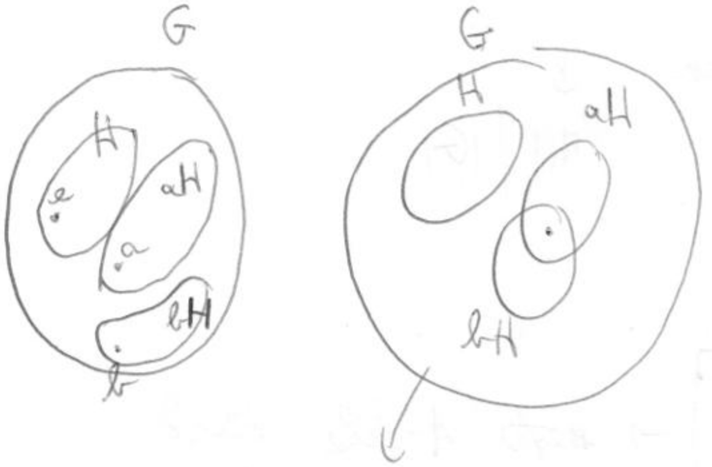
$h_1 h_2^{-1} = a$

$\Downarrow$

ilyenkor $a \in H$ lenne,
de β)-ban feltettük, hogy $a \notin H$

$\downarrow$

ellentmondás



Belátjuk, hogy aH és bH is diszjunkt, ha $b \notin aH$:

$H < G$

$aH = \{ah \mid h \in H\}$

$bH = \{bh \mid h \in H\}$

$b \notin H$

$b \notin aH$

$y \in aH \quad y \in bH$

$y = a h_1 = b h_2 \quad / \cdot h_2^{-1}$

$h_1, h_2 \in H$

$a(h_1 h_2^{-1}) = b$

$h_3 \leftarrow$ mert H részcsoport

$a h_3 = b \Rightarrow b \in aH$

$\downarrow$

ellentmondás, mert $b \notin aH$ (felt.)

b) 

G ← tehát ha mellékosztályokra bontom a csoportot (H-ra nézve), akkor így fog kinézni a felbontás

$H < G$

aH

bH mert $|bH| = |H|$

$|H| = |aH| = |bH|$

↓

felbontom sok ilyen diszjunkt részhalmazra

$G = \underbrace{H \cup aH \cup bH \cup cH \ldots}_{n \text{ db ilyen halmaz}}$

↓

de egy idő után elfogy a csoport

$\boxed{|G| = n|H|}$ $n \in \mathbb{N}$ ← ezt akartuk belátni

$n = G:H$

H indexe G-ben

↓

$|H| \mid |G|$

⇓

- $\boxed{\text{Prím rendűből csak } \underline{1} \text{ csoport van}}$ → mert 1-féle belső szerkezet lehetséges
(ez a $\underline{C_p}$, ha p a prímszám)
(ha lenne több ilyen, azokat ugyanígy ~~tudnám~~ tudnám csak mellékosztályokra (1-re) bontani → ugyanazok)

(· C_n csoportok kommutatívak
· D csoportok nem —||—

⇓

D nem izomorf C-vel)

= ugyanez a levezetés Ha -val is igaz

2) $\underline{aH \stackrel{?}{=} Ha \text{ általában?}}$

↓ kommutatívra biztos

$D = \{e, r, r^2, t, tr, tr^2\}$

$D_3 > H_1 = \{e\} \simeq C_1$ → trivi ~~mellék~~ részcsoportok

↓ izomorf

$D_3 > H_6 = \{e, r, r^2, t, tr, tr^2\} = D_3$

H_2

	e	t
e	e	t
t	t	e

$D_3 > H_2' = \{e, t\} \simeq C_2$

	e	tr
e	e	tr
tr	tr	e

$D_3 > H_2'' = \{e, tr\} \simeq C_2$

	e	tr^2
e	e	tr^2
tr^2	tr^2	e

$D_3 > H_2''' = \{e, tr^2\} \simeq C_2$

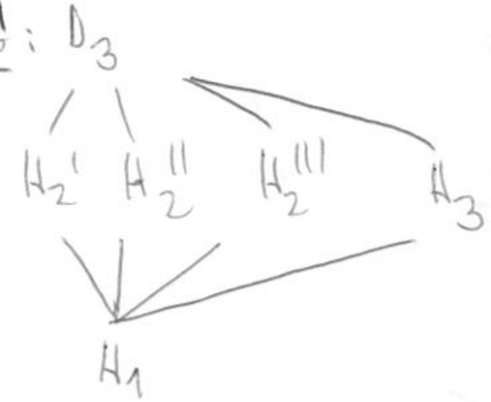
↓ észrevétel

('e' mindegyikbe benne van, mert mindegyikbe van ~~mellékosztály~~ egységelem ← mindegyik csoport)

	e	r	r^2
e	e	r	r^2
r	r	r^2	e
r^2	r^2	e	r

$D_3 > \underbrace{\{e, r, r^2\}}_{H_3''} \simeq C_3$

háló:



részcsoportháló

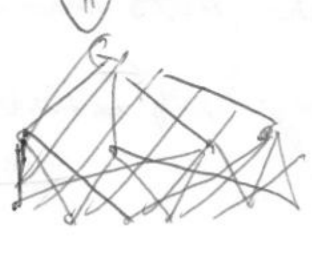
$\boxed{\text{Hf}}$

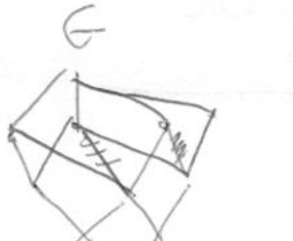
~~hat~~ egy csoport
2 részcsoportjának
metszete is csoport

↑

csoportaxiómák

⇓





⇓

Megvannak a részcsoportok.

Mellékosztályok:

$\rightarrow aH = \{ah,\ h \in H\}$

erre: $\boxed{H = \{e, t\}}$

$$eH = \{ee, et\} = \{e, t\} = H$$

$$tH = \{te, tt\} = \{t, e\} = H$$

$\rightarrow t, e \in H \rightarrow tH = H$, $eH = H$

$$rH = \{\underbrace{re}_{r}, \underbrace{rt}_{tr^2}\} \neq Hr = \{er, tr\} = \{r, tr\}$$

$\downarrow$

a jobb és baloldali mellékosztályok nem egyeznek meg !!!

$$(tr^2)H = \{(tr^2)e, (tr^2)t\} = \{tr^2, r\} \neq H(tr^2) = \{e(tr^2), t(tr^2)\} = \{tr^2, r^2\}$$

$\rightarrow$ a és a' is reprezentálja aH-t

(mindkét elemmel komplexusszorozva H-t aH-t kapom)

Legyen:

$a' \in aH$

vagyis $a' = ah_1$ ($h_1 \in H$)

$$\rightarrow a'H \rightarrow a'h_2 = (a h_1)h_2 = a(h_1 h_2) = ah_3$$

$\Downarrow$

! a' ugyanazt a mellékosztályt generálja, mint a

!! $\boxed{\text{Ha } b \in aH \Rightarrow bH = aH}$

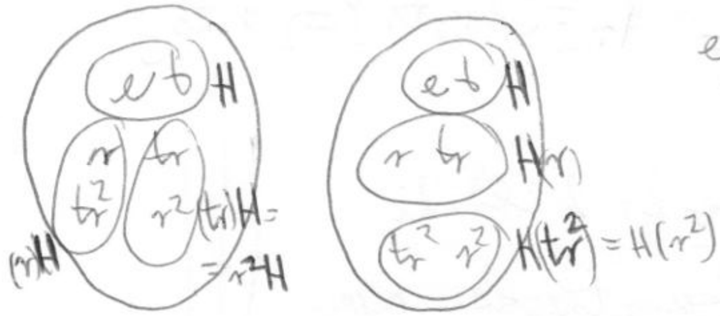
ha $b \notin aH \Rightarrow bH \cap aH = \emptyset$ ← már beláttuk

$(r^2)H = \{r^2 e, r^2 t\} = \{r^2, tr\}$ $\quad H(r^2) = \{e r^2, t r^2\} = \{r^2, tr^2\}$

$(tr)H = \{tr\cdot e, trt\} = \{tr, r^2\}$ $\quad H(tr^2) \quad H(tr) = \{e(tr), t(tr)\} = \{tr, r\}$

$\quad = H(r)$

A jobb- és baloldali mellékosztályok nem esnek egybe, ha $(e\ t)$-ből indulunk ki



↓

a csoportot többféleképpen tudjuk felbontani mellékosztályokra

baloldali jobboldali

$H = \{e, r, r^2\}$

$tH = \{te, tr, tr^2\}$

$Ht = \{et, rt, r^2t\} = \{t, tr^2, tr\}$

↓

Ha más részcsoportból indulunk ki, a jobb és baloldali mellékosztályok megegyez<u>het</u>nek.

DE ált.-ban nem egyeznek meg!

Ha az elemek fele csoportot alkot
↳ akkor a bal és jobboldali mellékosztályok megegyeznek
ezre listo
→ mert ha $|H|\cdot 2=|G|$ $\xrightarrow{\text{mivel}}$ $|aH|=|H|$ → ~~$|H| \cup |aH| = G$~~ $H \cup aH = G$
mivel Ha és H is diszjunkt, ez csak úgy lehet, ha $\boxed{aH=Ha}$
⇐ nincs olyan elem, ami H-ban vagy aH-ban ne lenne lenne

Normális részcsoport

- A jobb és baloldali mellékosztályok megegyeznek

• jelölés:

$N \lhd G$ ($H<G$ → H részcsoport
$H \lhd G$ → H normális részcsop.)

• def: $\forall a \in G \quad aN = Na$
ha $N \lhd G$

normálosztó = normális részcsoport

~~Lehet találni olyan~~ N részcsoportra, ha az normálosztó

$aN = Na$

$an_1 = n_2 a$ ↑ van ilyen n_1, n_2

$n_1 \in N \quad n_2 \in N \quad / \cdot a^{-1}$

$a n_1 a^{-1} = n_2$

$\boxed{ana^{-1} \in N}$

$n \in N$
$a \in G$

→ a normálosztó nem ~~és nem~~ azt jelenti, hogy kommutatív lenne a csoport
$ah_1 \neq h_1 \cdot a$ általában, viszont
$\forall h_1$-re van olyan h_2, hogy $ah_1 = h_2 a$
⇓
$aH = Ha$ (az elemek megegyeznek, csak az előállítási sorrend más)

→ konjugálás

$\boxed{aNa^{-1} \subseteq N}$ $\forall a \in G$-re (ha véletlenül $a \in N$ → $aNa^{-1} = N$)

(komplexusszorzás
↓
ez a normálosztó ~~fogalma~~ másik def-ja → ha a → $\leftarrow a^{-1}$ -el szorozzuk az N-beli elemet, az még mindig N-beli lesz

Általános konjugálás fogalom

$g \in G$

$h \in$ [illegible] G

$g' = hgh^{-1}$ ~~$\Leftrightarrow e = hgh^{-1}g'^{-1}$~~ ~~$(h^{-1} = gh^{-1}g'^{-1})$~~

e $\forall$ konjugáltja önmaga

Kommutatív csoportban $\forall$ elem önkonjugált: !

$g' = hgh^{-1} = ghh^{-1} = g$

g konjugálása ekvivalenciareláció: (vagyis $\forall$ elem konjugáltja saját magának; ha a'(konj.) $= b \Rightarrow b' = a$ és ha $a' = b$ és $b' = c$, $a = (a')'' = c$)

ekviv. reláció: érvényesek rá ezek a tul.-ok

$a \sim b$

1. $\forall a \quad a \sim a$
2. $\forall a, b \quad a \sim b \rightarrow b \sim a$
3. $\forall a, b, c \quad (a \sim b) \wedge (b \sim c) \rightarrow a \sim c$ tranzitivitás

"és"

műveleti tul.

$g \in G \quad h \in G$

$g' \sim g \quad \exists h \quad g' = hgh^{-1}$

$\downarrow$

ha meg van adva g', g, ~~akkor e olyan~~ melyik az a h, melyre $g' = hgh^{-1}$

így is meg lehet fogalmazni a konjugálást $\rightarrow$ g, g'-höz $\exists h$, melyre...

1. $g \sim g = e g e^{-1} \rightarrow \exists$ ilyen „h"

2. $g' \sim g$ — ha g konj. g' $\Downarrow$ g' konjugáltja g

$h^{-1} / \quad g' = hgh^{-1} \quad / \cdot h$

$h^{-1}g'h = \underbrace{h^{-1}(h}_{e}\underbrace{gh^{-1})h}_{e}$

$h^{-1}g'h = g \longrightarrow g = (h^{-1})g'(h^{-1})^{-1}$

3. $g' \sim g \qquad g' = h_1 g h_1^{-1}$

$g'' \sim g' \qquad g'' = h_2 g' h_2^{-1}$

$$g'' = h_2(h_1 g h_1^{-1})h_2^{-1} = \underbrace{(h_2 h_1)}_{h_3} g \underbrace{(h_1^{-1} h_2^{-1})}_{h_3^{-1}}$$

$g'' = h_3 g h_3^{-1}$

$\Downarrow$

ha $g' \sim g$ és $g'' \sim g \Rightarrow g'' \sim g$

= Egymás konjugáltjának lenni ekvivalencia reláció

$h_3 = h_2 h_1$

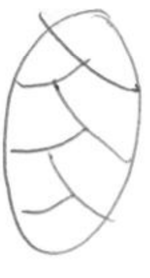
$h_3^{-1} = h_1^{-1} h_2^{-1}$

$h_3 h_3^{-1} = (h_2 h_1)(h_1^{-1} h_2^{-1}) = h_2 \underbrace{(h_1 h_1^{-1})}_{e} h_2^{-1} = e$

$\cancel{h_2} \, e$

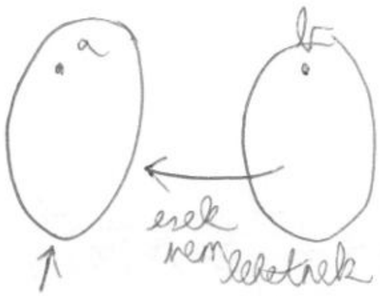
↓

Pikkelyezés



→ ∀ elemhez a saját konjugáltjait is veszem } osztály

↑ az összes többi elemmel megkonj.-ket



ezek nem lehetnek ekvivalensek, mert lenne közös metszet

↑ a-val ekvivalens elemek (~~vele~~ az ∀ konjugáltjai)

kommutatív csoportban

= konjugált elemosztályokra való felosztás

$D_3 = \{e, r, r^2, t, tr, tr^2\}$

$\{e\}$

$\downarrow \forall$

e konjugáltjai önmaga

$h\,r\,h^{-1} = \{ere^{-1}, rrr^{-1}, r^2 r (r^2)^{-1}, trt^{-1}, (tr)r(tr)^{-1}, (tr^2)r(tr^2)^{-1}\}$

$ere^{-1} \to r$, $rrr^{-1} \to r$, $r^2r(r^2)^{-1} \to r$, $trt^{-1} = trt = r^2$, $(tr)r(tr)^{-1} = r^2$, $(tr^2)r(tr^2)^{-1} = r^2$

$\{r, r^2\} \to r$ konjugáltjai

$h \cdot r^2 \cdot h^{-1} = \{ere^{-1}, rr^2r^{-1}, r^2r^2(r^2)^{-1}, tr^2t^{-1}, (tr)r^2(tr)^{-1}, (tr^2)r^2(tr^2)^{-1}\}$

$ere^{-1} = r$, $rr^2r^{-1} = r^2$, $r^2r^2(r^2)^{-1} = r^2$, $tr^2t^{-1} = r$, $(tr)r^2(tr)^{-1} = r$, $(tr^2)r^2(tr^2)^{-1} = r$

$\downarrow$

ugyanaz jön ki, mert egy osztály bmely elemével reprezentálható

$\{e\}$, $\{r, r^2\}$ → konjugált elemosztályok

$h\,t\,h^{-1} = \{\underbrace{ete^{-1}}_{t}, \underbrace{rtr^{-1}}_{rtr^2 = tr}, \underbrace{r^2t(r^2)^{-1}}_{r^2tr = tr^2}, \underbrace{ttt^{-1}}_{t}, \underbrace{(tr)t(tr)^{-1}}_{trttr = tr^2}, \underbrace{(tr^2)t(tr^2)^{-1}}_{tr^2ttr^2 = tr}\}$

$=$

$h\,tr\,h^{-1}$

$h(tr^2)h^{-1}$

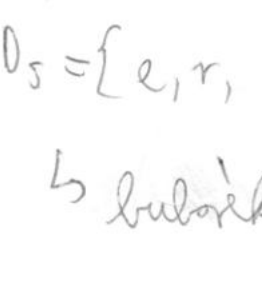
→ a konjugált elemosztályok különböző elemszámú → ezek egymás konjugáltjai

„összeforr, ami összetartó részhalmazokra bontja
zik" → $(t)^2 = t$ $(tr)^2 = tr$ $(tr^2)^2 = tr^2$

ezek mind tükrözések, csak más tengelyre,
↓
(de ezt nem különböztetjük meg elvileg)

(1-dik részcsoport tra mellékoszt. bontásnál azonos elemüeket kapjuk)

D_5:



$r^5 = e$
$t^2 = e$
$rt = tr^4$

D_n $r^n = e$
$t^2 = e$
$rt = tr^{n-1}$

$D_5 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, t, tr, tr^2, tr^3, tr^4\}$

↳ buborékoltatás diéderrel működik
↓
2 $\boxed{HF}$ szorzástábla → konjugált elemosztályok

konjugált elemosztályok kitalálással:

→ tükrözések.

ez jellemző (most pl. az azonos ~~tük~~ trafók ~~kerültek~~ azonos konjugált ~~a csoport tul. -ságai~~ elemosztályba)

a csoport fontos tulajdonsága, hogy

hány konjugált elemosztályra bomlik !!!

legfeljebb annyi, amennyi a csoportelemek száma

pl. kommutatív csoportnál pont annyi ($\forall$ elem magában áll)

$N = |G|$

k: konjugált elemosztályok száma

$N = a_1^2 + a_2^2 + \dots a_k^2$, ahol $a_1, a_2 \dots a_k \in \mathbb{N}$

Burnside-tétel

k db négyzetszám összegére bomlik

pl. D_3 $N=6$

$k=3$

$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$

D_5 $N=10$

$k=4$

$10 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2$

kevés csoportelemnél

= 1. mellékosztályokra bontás:

- egyenlő elemszámú mellékosztályok

de csak 1 csoport (aminek a mellékoszt.-it néztük)

de bal és jobboldali mellékoszt.-ra bontás nem egyezik meg

2. konjugált ~~mellékoszt~~ elemoszt.-ra) bontás:

kül. elemszámú mellékosztályok

6. óra

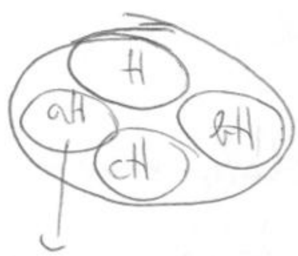
Ism.:

$H < G$ részcsop.

részcsoportok → trivi: $\{e\}$

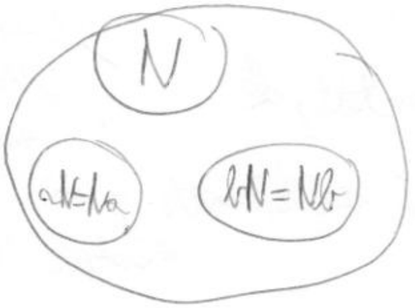
önmaga

$|H| \mid |G|$ (Lagrange-tétel)



$aH \neq Ha$ általában

bmely elemmel reprezentálhatom



$N \triangleleft G$ invariáns / normális részcsoport ~~//~~, normálosztó

$aN \ni an_1 = n_2 a \in Na$

$n_1 \in N$

$\forall a \in G$-hez $\forall n_1 \in N \quad \exists n_2 \in N$

$an_1 = n_2 a \rightarrow$ jobb- és baloldali mellékoszt. megegyeznek

$an_1 a^{-1} = n_2 \in N$

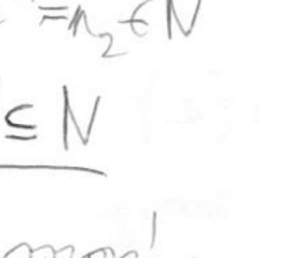
$\underline{aNa^{-1} \subseteq N}$

komplexusszorzás

ana^{-1} konjugálás

általában —"— : (részcsop.-tól függetlenül)

$g \in G$
$h \in G$
$g' = hgh^{-1}$
$g' \sim g$



1-1 konj. mellékosztály azonos geom. trafót ír le

↓
normálosztó definíciója:

∀ elem ∀ konjugáltja benne van a csoportban

Csoportok mátrixos reprezentációja

(ábrázolása)

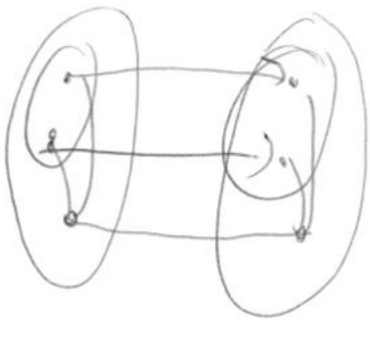
$G \ni g \longmapsto \underline{\underline{D}}(g)$ → ezek is ~~kommutatív~~ assoc. algebrát alkotnak

→ általában komplex elemű mátrixok

$\underline{D}$: ábrázolás (Darstellung)

akkor leképezés, ha homomorfizmus
(ábr.)

⇕



2 elem szorzatának repr.-ciója =
= a 2 elem repr.-cióinak szorzata !

$g_3 = g_1 g_2$

$D(g_3) = D(g_1) \cdot D(g_2)$ → négyzetes mátrixokkal repr.-táljuk az elemeket

$D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2)$

Ábrázoláselm. kérdései

- van-e ábrázolás
- ? × ?-as mátrixok
- 1 ábrázolás van-e ?, vagy több?
- hogy lehet megtalálni őket?

$$D(g_1 g_2) = D(g_1)\, D(g_2)$$

$$D(g_1 e) = D(g_1)\, D(e)$$

$$D(g_1) = D(g_1)\, \underbrace{D(e)}_{\underline{\underline{I}}}$$

$\underline{\underline{I}}$ egységmátrix lesz az egységelem

$$(g g^{-1}) = e$$

$$\cancel{D(g)\cdot D(g}\quad I = D(e) = D(g g^{-1}) = D(g)\cdot D(g^{-1})$$

$$D(\underbrace{g^{-1}}_{\text{csoportbeli invertálás}}) = \underbrace{D(g)^{-1}}_{\text{mátrixinvertálás}}$$

$\Downarrow$

a csoportot csak olyan mátrixok repr.-hatják, melyek inverze $\exists \rightarrow \det D \neq 0$

- konjugálás

$$D(g') = D(hgh^{-1}) = D(h)\,D(g)\,D(h^{-1})$$

$$\det D(g') = \det(D(h)) \cdot \det(D(g)) \cdot \det(\underbrace{D(h^{-1})}_{D^{-1}(h)}) = \det D(g)$$

$\Downarrow$

konjugált elemek determinánsai ugyanakkorák!

↳ 1 konj. elemoszt.-ban lévő elemek det-jei —‖—

~~Spur~~

$Sp(ABC) = Sp(CAB) \to$ det. szabály

$$Sp(D(g')) = Sp(D(h)D(g)D(h^{-1})) = Sp(\underbrace{D(h^{-1})D(h)}_{D(h^{-1}h)=D(e)=I}D(g)) = Sp\,D(g)$$

$\Downarrow$

1 konj. elemosztályon belül $\forall$ elem repr. mátrixának:

- ugyanakkora a determinánsa
- —‖— akkora a spurjuk
- a sajátértékeik is megegyeznek

$\boxed{\eta(g) = \mathrm{Sp}\, D(g)}$ → csoportelm.-ben külön név a spurra

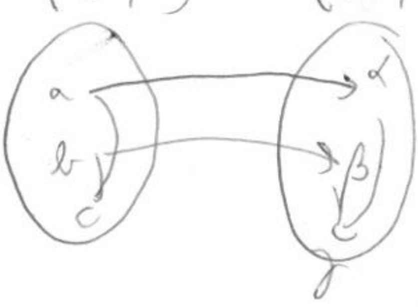
↓

a reprezentáció ~~…~~ karaktere ~~…~~ = a repr. mátrix spurja

$\eta : G \to \mathbb{C}$

homomorfizmus általában csoportoknál (most nem mátrixokat nézünk)

$(G, *)$ $(G', \circ)$



$G' \ni \alpha = \phi(a)$ $a \in G$

$G' \ni \beta = \phi(b)$ $b \in G$

$G' \ni \gamma = \phi(a * b)$

$=$

$\underbrace{\phi(a)}_{\alpha} \circ \underbrace{\phi(b)}_{\beta}$ $\alpha \circ \beta$

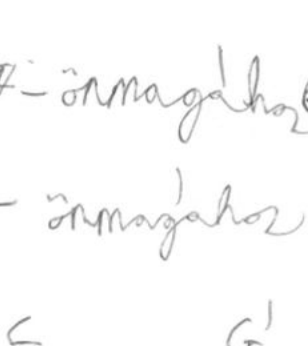
ha $\phi(a) \circ \phi(b)$ ~~$\alpha \circ \beta$~~ $= \phi(a * b)$ akkor beszélünk homomorfizmusról

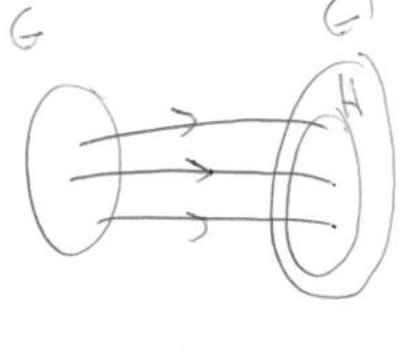
↓

van-e homomorfizmusa egy adott csoportnak?

- önmagához ~~ugyanazt~~ önmagát rendeli
- önmagához e-t rendeli ($\forall$ elemre)

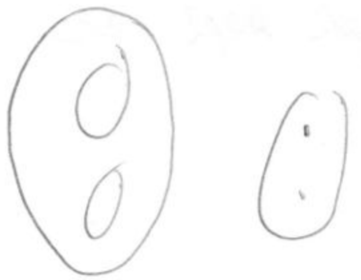
} ezek ln





$H < G'$

- Ha $|G'| > |G|$ (több eleme van), akkor mivel G elemeit legfeljebb $|G|$ db elemre képezhetünk le
  ↓
  kitüntetjük G' egy részcsop.-ját ($H = 6$)



- ha $|G'| < |G|$ → ilyen lehet, ha több elemnek van a képe de ilyenkor nem invertálható

- ha $|G| = |G'|$ → megfordítható homomorfizmus =
  (inv. ható)
  = <u>izomorfizmus</u>

~~tét~~-ban homomorf leképezésnél:

$\Phi(h) = e'$

↓ azon G-beli elemek halmaza, melyek egy

– <u>ősk</u>ép: adott G'-beli elem a képe

– <u>a leképezés magja:</u> $\mathrm{Ker}\,\Phi \subseteq G$ és $\Phi(h) = e'$

azon G-beli elemek halmaza, melyek képe az <u>egységelem</u> (e')

– <u>tétel:</u>

<u>Ker Φ egyben részcsoport is</u>.

$h_1, h_2 \in \mathrm{Ker}\,\Phi$

$\Phi(h_1) = e'$

$\Phi(h_2) = e'$

$h_3 = h_1 h_2$ $\qquad$ $h_3 \in \mathrm{Ker}\,\Phi$

$\Uparrow$

$\Phi(h_3) = \Phi(h_1 \cdot h_2) = \Phi(h_1) \cdot \Phi(h_2) = e' \cdot e' = e'$

$\Downarrow$

- h_1 és h_2 szorzata is benne van $\mathrm{Ker}\,\phi$ -ben : zárt

- egységelem képe az egységelem (triviális)

- ~~asszoc.~~ inverz :

$h \in \mathrm{Ker}\,\phi$

$h' \to$ inverz

$e = h'h$

$$e' = \phi(e) = \phi(h'h) = \phi(h')\underbrace{\phi(h)}_{e'} = \phi(h')\,e'$$

$\Downarrow$

$\phi(h') = e'$

$h' \in \mathrm{Ker}\,\phi$

Kerϕ-beli egy elem inverze is Kerϕ-ben van

- asszoc. is igaz

$\Downarrow$

$= \mathrm{Ker}\,\phi < G$ (nem csak $\mathrm{Ker}\,\phi \subseteq G$)

(részcsop.)

- tétel

Kerϕ normálosztó is.

$h \in \mathrm{Ker}\,\phi$ $\quad \phi(h) = e'$

$a \in G$

aha^{-1}

($\phi(a) \neq e'$ most)

ha ϕ leképezés

$$\phi(aha^{-1}) = \phi(a)\underbrace{\phi(h)}_{e'}\phi(a^{-1}) = \phi(a)\,\phi(a^{-1}) = \phi\underbrace{(a\,a^{-1})}_{} = \phi(e) = e'$$

$\cancel{aha^{-1}}$

$\phi(aha^{-1}) = e$

$aha^{-1} \in \operatorname{Ker}\phi$

$\Downarrow$

$\Rightarrow$ homomorfizmus magja normálosztó

(az eredeti G csoportban)

homomorf. ~ normálo.

Tekintsünk egy normálosztót

$aN \ni an_1 = n_2 a \in Na$

$aN = Na$

$bN \ni bn_3 = n_4 b$

$(an_1) \cdot (bn_3) = (n_2 a)(bn_3) = n_2 (ab) n_3 =$

ez tetsz. a-ra igaz, mert N normálosztó

mert c is valamelyik mellékoszt.-ban van

$= n_2 (c n_3) = n_2 (n_5 c) = \underbrace{(n_2 n_5)}_{n_6} c = n_6 c \in Nc = cN$

$(aN)(bN) \subseteq (cN)$

$(aN)(bN) = (cN)$

$$\underset{\text{komplexusszorzás}}{\underset{\downarrow}{(aN)}} \cdot (bN) = cN \qquad a * b = c$$

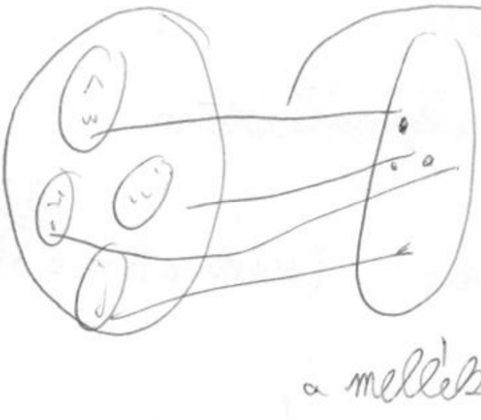
ez egy leképezés: egy elemhez azt a mellékosztályt rendeli, aminek ő is az eleme

$\Downarrow$

több elemhez rendel 1 mellékosztályt

$\downarrow$

ez HOMOMORFIZMUS



eltekintünk attól, hogy milyen eleme a mellékosztálynak

$\Downarrow$

csak a mellékosztály ~~tul~~-ai számítanak

$$\underbrace{\frac{|G|}{|N|}}_{\text{mellékosztályok száma}} = \text{a mellékosztályok halmazának elemeinek száma}$$

Mi ennek a leképezésnek a magja?

$N \circ (bN) = (bN)$ (mert $n_1 b n_2 = b n_3$)

$\Downarrow$

a leképezés magja a normálosztó

$\Downarrow$

homomorfizmus $\underset{\text{definiálja a mellékoszt. által}}{\overset{\text{a magja}}{\rightleftarrows}}$ normálosztó

$$\left|\frac{G}{N}\right| = \frac{|G|}{|N|}$$

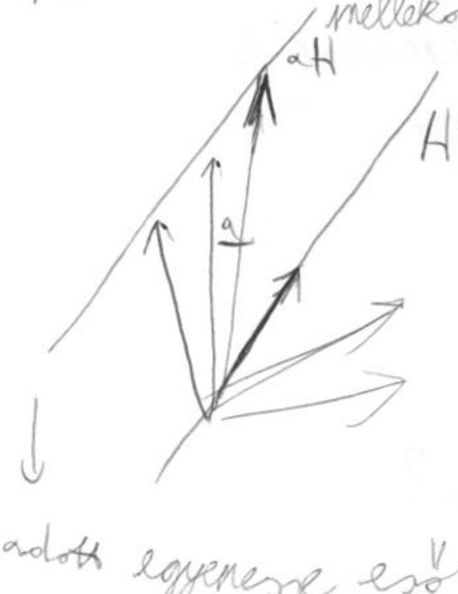
!!

faktorcsoport: $\forall$ normálosztó definiál egy faktorcsoportot

$\frac{G}{N}$ (a mellékosztályok csoportja)

1 elem = 1 mellékoszt. a normálosztóra

— pl. vektorok, művelet = összeadás (most $aH = a+H$ jelölés)

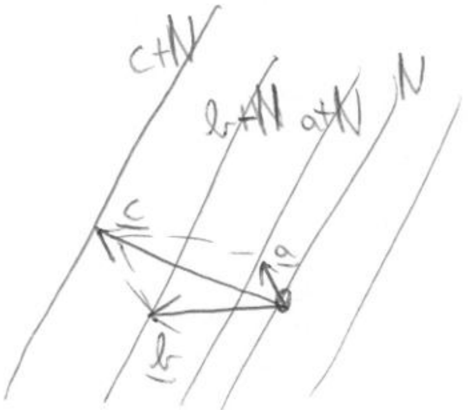


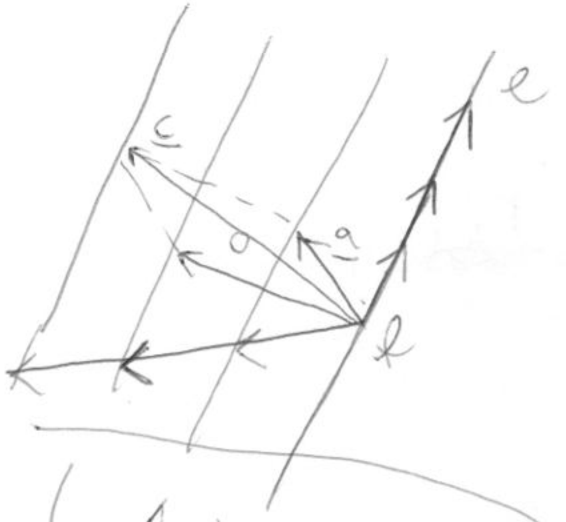
H = ~~...~~ részük a mellékosztály~~okat~~

$\underline{a}$ + H-beli vektor = a+H-beli vektor

$\in a+H$

adott egyenesre eső végpontú vektorok alkotnak 1 mellékosztályt





erre mutató vektor + erre mutató vektor = $\forall$ erre mutató vektor (mert f irányú komponens nem volt)

f irányú komponenssel jellemezhetjük a mellékosztályokat

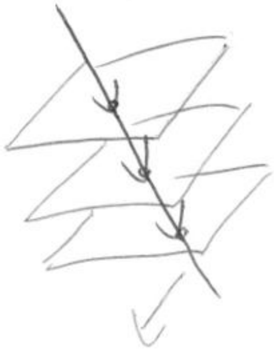
$\Downarrow$

f -en lévő vektorok alkotják a faktorcsoportot:

$\forall$ jellemez egy e-vel $\parallel$-os egyenest

most a síkban
lévő vektorok
alkotnak faktorcsoportot

vagy

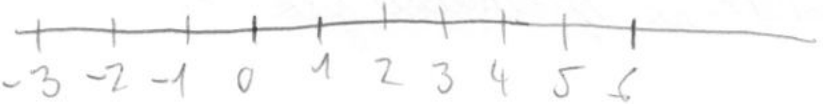


fóliázzuk a síkot

az erre vett vetületek alkotnak faktorcsoportot

— modulo 5

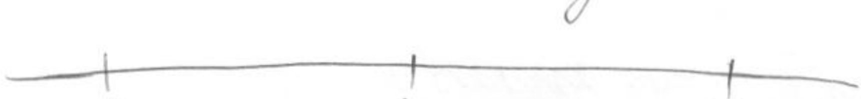
$G_1 = (\mathbb{Z}, +)$



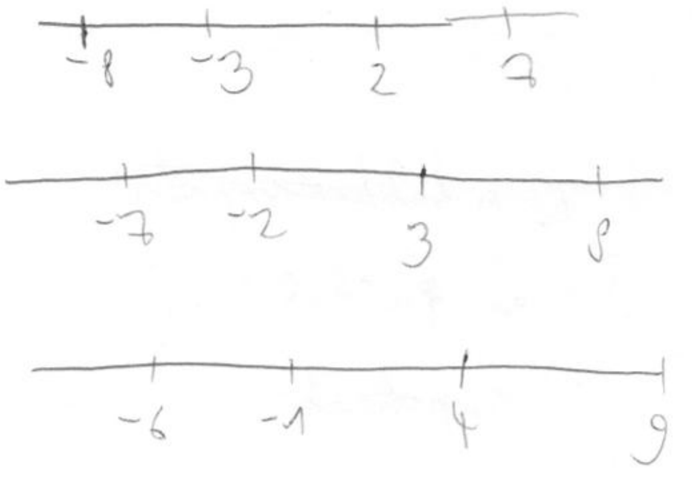
részcsoport (+ nem vezet ki)

$N \lhd G$

ennek a mellékosztályai: diszjunktak ✓



$1+N$ ($\sim aN$)



$2+N$ $\quad$ $2+5k$

$3+N$

$4+N$ $\quad$ $4+5l$

Megj.:

Ezek már nem véges csoportokra vonatkoznak

$\Downarrow$

vektoroknál: ∞ sok elem, ∞ sok mellékosztály

modulo: ∞ sok elem, véges (5) mellékosztály

↙

a faktorcsoport 5 elemű

~~2+5k~~

A $2+5k+4+5l = 6+5k+5l = 1+5+5k+5l = 1+5(1+k+l) =$

$= 1+5m$

a mellékosztályokat vhogy jelöljük

$\underline{0}$

$\underline{1}$ $\qquad \underline{2}+\underline{4}=\underline{1}$

$\underline{2}$ $\qquad$ → ezekkel tudjuk jellemezni a mellékosztályt

$\underline{3}$

$\underline{4}$ $\qquad$ ↓

de ez pont a modulo 5 (kongruens összeadás)

$\mathbb{Z}_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

ez a ~~faktor~~ csoportja a $(\ldots, -5, 0, 5, \ldots)$ csoportnak

a mellékosztályokat most a modulóval jellemezzük

izomorf a C_5-tel

Biz.: 5 prím → prím ~~elemű~~ rendű (elemű) csop.-ból csak 1 van

C_5	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2				
a^3	a^3				
a^4	a^4				

Eljárás:

~~Az~~ normálosztó → meghat. mellékosztályokat

↓ homomorfizmus

definiál egy leképezést, ami

mostra mod 5-re ← más objektumokra ~~(kat)~~ ~~való műveletek~~

vezeti vissza a ~~(normálosztókat)~~ mellékos.-kat

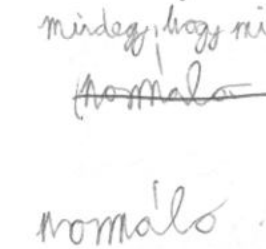
(de az igazából mindegy, hogy mivel jelöljük a mellékosztályokat, lényeg, hogy amivel jelöljük ''-ket)

~~normálo ↔ homomorf~~

normálo. ↔ homomorf.

Csoportok másfajta megadása

szorzástábla

 → 1 sor az elemek permutációja

az egyértelműség (unicitás) miatt (tétel)

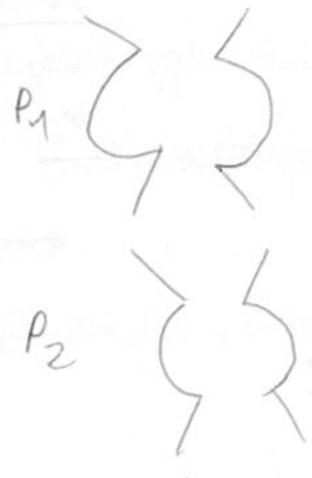
↓

permutációkkal is definiálhatom a csoportot (1 elem vmilyen permutációt ad)

permutáció: halmaz önmagára való invertálható leképezése.

pl. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$1 \to 3$
$2 \to 2$
$3 \to 5$
$4 \to 1$
$5 \to 4$



1. átmentő a 3. helyre majd 3. átmentő a 4. helyre

||

most az elem a sorszámot jelenti

$5 \to 5.$ sorszámú

- asszociatív
- zárt
- inverz

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

- egységelem

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

n elem permutációi <u>csoportot</u> alkotnak: S_n

S_n-nek $n!$ eleme van $\left(|S_n| = n! \right)$

pl. He atom


→ $2e^-$, de ezek nem megkülönböztethetőek

↓

az e^--okat a pályákon meg lehet cserélgetni

több -e^--os atomok: (Neumann, Wigner)

forgatások szimmetriája → C

e-ok cseréjének — " — → permutációk (S)

<u>Tétel:</u> Minden n elemű csoport részcsoportja egy permutációcsoportnak

n elemű csoport → ~~A~~ a fejlécnek ~~(±2)~~ n! féle permutációja van

de ebből a def. relációk által csak n-et választok ki → S_n (~~izomorf~~) részcsop.-ja

↓

véges csoportok megadása:

megmondjuk, hogy melyik S_n részcsoportja

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&5&3\end{pmatrix}$$

(a permutációk ált.-ban nem kommutatívak, de most szétbontottuk az adott perm.-t 2 diszjunkt permutációra

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}}_{(1\ 2)}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&5&3\end{pmatrix}}_{(3\ 4\ 5)}$$

jelölés: $(1\ 2)$ $(3\ 4\ 5)$
ezeket ciklikusan permutálom

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&1&4\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix}$$

$$(1\ 3\ 5\ 4)(2)\qquad(1\ 3\ 4\ 5\ 2)$$

__All.:__ Bármely permutáció felbontható ilyen ciklikus permutációkra

$\downarrow$

__Biz:__ ahová megy egy elem, onnan kilök egyet, az is elmegy valahová, és kilök egyet, ...

S_n-nél 1 konjugált elemo.-ba kerülnek, melyek azonos számú ciklikus permutációkra bonthatóak.

$$(3\ 4\ 5) = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$(3\ 4\ 5) = (34)(35)$$

2 elem felcserélése (2 szomszédos elem felcserélésével) előállítható az összes permutáció

$\Updownarrow$

szomszédok felcserélése (transzpozíció)

generálja a szimmetrikus csoportot
(tetsz. rendezettség elérhető így)

páros vagy páratlan sok transzpozícióra lehet felbontani a permutációkat

$\downarrow$

páros vagy ptlt permutáció

$\frac{n!}{2}$ db páros $\frac{n!}{2}$ db ptl. permut.

$\hookrightarrow$ a páros permutációk részcsoportot alkotnak

$S_n \trianglerighteq A_n$: alternáló csoport → páros permutációk részcsoportja

↑ normálosztó is

$$|A_n| = \frac{n!}{2}$$

Ábel → A_5 : nincs normálosztója ~~tt~~ } ⟹ nincs megoldóképlete az 5. fokú egyenletnek
5. fokú egyenlet gyökei }

7. óra

Miért jó a csoportelmélet?

A (állapotok)

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "T_1"'] \arrow[rr, bend left, "T_4"] & x' \arrow[r, "T_2"'] \arrow[rr, bend left, "T_5"] & x'' \arrow[r, "T_3"'] & x'''
\end{tikzcd}$$

G (trafók szimm. csoportja)

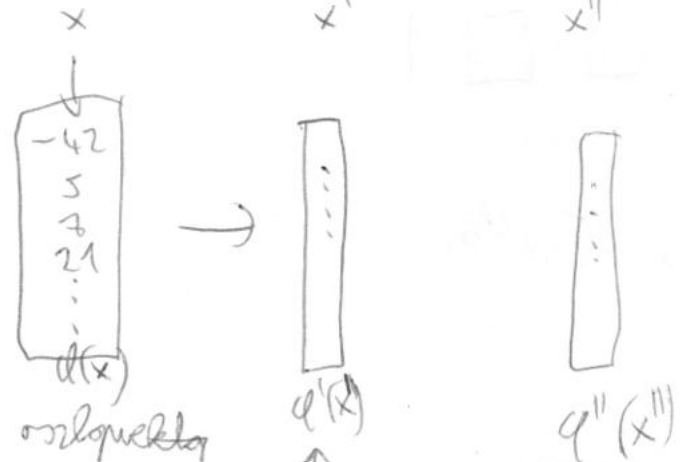
$$x' = T_1 x$$

$$x'' = T_2 x' = T_2(T_1 x) = T_4 x$$

$$x''' = T_3 x'' = T_3(T_2 x') = (T_3 T_2)\, x' = T_5 x'$$

$$\left(T_3 \underbrace{(T_2 T_1)}_{T_4}\right) x = \left[\underbrace{(T_3 T_2)}_{T_5} T_1\right] x = T_6 x$$

Méréseket végzünk:



oszlopvektor

↓

nem geometriai vektor

↑ más koord. rendszerből nézzük az adott állapotot

↓

más számértékek, de ugyanazok a jellemzők

→ ez is szimmetriatranszformáció!

↓

vagy pl. Galilei/forgatás/~~…~~ trafó

↓

ennek is megf. mátrix (rel. elm.)

átszámítható

nem triviális, de bebizonyítható, hogy lineáris

$$\underline{\varphi}'(x') = \underline{\underline{S}}(T_1)\,\underline{\varphi}(x)$$

mivel nem "fizikai" ~~geom.~~ vektor, csak egy számoszlop

$$\varphi''(x'') = \underline{S}(T_2)\,\varphi'(x') = S(T_2)\cdot S(T_1)\,\varphi(x)$$

$$\square \cdot \square \cdot |$$

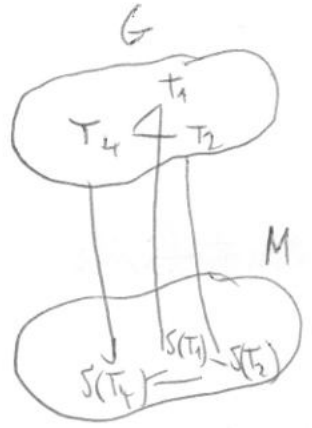
$$\underline{\varphi}' = \underline{\underline{S}}(T_1)\,\underline{\varphi}(x)$$

$$\varphi''(x'') = S(T_4)\,\varphi(x)$$

$$\boxed{S(T_2\cdot T_1) = S(T_2)\,S(T_1)}$$

ez homomorfizmus

az állapotok közötti transzformációknak megfelelnek az állapotokat leíró „vektorok" közötti átszámításoknak (mátrixoknak)



Az ábrázoláselmélet alaptétele:

Fizikai rendszer szimmetriacsoportja ábrázolódik a rendszeren értelmezett fizikai mennyiség lineáris terén ható operátorokra (mátrixokra).

↓

Mik a lehetséges ábrázolások?

Összes csoport összes ábrázolása → ?

- Véges csoportokra megvannak a lehetséges ábr.-ok.
- Kompakt Lie-csoport (∞ elemű csoport) -ra is megvan

↓

véges elemű csoportokra:

- hány ábrázolás lehet?

  homomorfizmus ⇄ normálosztó

  ahány normálosztó van, annyi ábrázolás

- ~~(hányféle)~~ mekkora mátrixok lesznek?
- mik azok a mátrixok konkrétan?

$$G \ni \underbrace{g}_{\text{csoportelem}} \mapsto \underbrace{\hat{D}(g)}_{\text{operátor}} \quad V \to V \quad \dim V = n \text{ (véges)}$$

az ábrázolás dimenziója

↓

$|G| = N \qquad \underline{\underline{D}}(g)$

$$\forall g_1 g_2 \in G \quad \hat{D}(g_1 g_2) = \hat{D}(g_1)\hat{D}(g_2)$$

~~tényleg~~ ábrázolás?

$$\underline{\underline{D}}(g_1 g_2) = \underline{\underline{D}}(g_1)\,\underline{\underline{D}}(g_2)$$

↓

elég a csp. generátorok mátrixait megalkotni, és ezekre ellenőrizni a definiáló relációkat.

Baj:

Áll. 1 ~~csoporthoz~~ ∞ sok ábrázolást lehet találni

Biz.: Tfh. ~~találtunk~~ 1 ábrázolást (D)

Legyen $\underline{\underline{D}}'(g) = \underline{\underline{F}}\, \underline{\underline{D}}(g)\, \underline{\underline{F}}^{-1}$ $\leftarrow \underline{\underline{F}}$ legyen inv.-ható mátrix

$\underline{\underline{D}}'$ is ábrázolás, mert:

$$\underline{\underline{D}}'(g_1 g_2) = \underline{\underline{F}}\, \underline{\underline{D}}(g_1 g_2)\, \underline{\underline{F}}^{-1} \overset{D \text{ ábr.}}{=} \underline{\underline{F}}\, \underline{\underline{D}}(g_1) \overbrace{}^{\underline{\underline{F}}^{-1}\cdot\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{D}}(g_2)\, \underline{\underline{F}}^{-1} =$$

$$= \left(\underline{\underline{F}}\, \underline{\underline{D}}(g_1)\, \underline{\underline{F}}^{-1}\right)\left(\underline{\underline{F}}\, \underline{\underline{D}}(g_2)\, \underline{\underline{F}}^{-1}\right) = \underline{\underline{D}}'(g_1)\, \underline{\underline{D}}'(g_2)$$

asszoc. miatt

$\underline{D}' \sim D$: ekvivalens ábrázolások

maga is ábr.

(↳ ez lényegében egy koord. rendszer ~~trafó~~)

↓

új probléma: 2 ábr. vajon ekvivalens -e?

→ különböző dimenzió esetén biztos nem ↓ ekv. négyzetesek

→ azonos –"– lehet

$$\begin{tikzcd} & \hat{A} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \underline{\underline{A}} \arrow[rr, leftrightarrow, "\underline{\underline{F}}"'] & & \underline{\underline{A}}' \end{tikzcd}$$

$$\underline{\underline{A}}' = \underbrace{F A F^{-1}}_{\text{bázistrafó}}$$

↓

valójában az ekvivalens ábrázolásokkal is ez van:
amikor operátort választunk a csoportelemhez,
az — " — többféleképpen írhatjuk le

↓

Még ez is
Ekvivalencia erejéig hány ábr. van? → ∞

– Hogy nézem meg, hogy 2 ábr. ekvivalens?

• $\det D'(g) = \cancel{(\det \underline{\underline{F}})} \det \underline{\underline{D}}(g) \det \underline{\underline{F}}^{-1} = \det D(g)$, ahol $\det \underline{\underline{F}}^{-1} = \cancel{\frac{1}{\det \underline{\underline{F}}}}$

↓

ha ugyanaz a 2 ábr. det-a, akkor ekvivalensek

• Spur is k.rendszer független

$(\mathrm{Sp}(ABC) = \mathrm{Sp}(CAB))$

$\mathrm{Sp}\, D' = \mathrm{Sp}(F D F^{-1}) = \mathrm{Sp}(F^{-1} F D) = \mathrm{Sp}\, D$

↓

$\downarrow$

Tétel: ha a spurok megegyeznek → ekvivalensek

(később biz.)

$\Downarrow$

az ábrázolást lehet jellemezni a spurral

$\chi(g) = \mathrm{Spr}\, \underline{\underline{D}}(g)$ az ábrázolás karaktere

↳ ez nem a mátrixra, hanem az operátorra jellemző

→ ekvivalens ábrázolások karaktere megegyezik

~~(ha telj.)~~

ha tudjuk, hogy 2 ~~mátrix~~ ábr. ekvivalens:

$$D \to U D U^{-1}$$

$$D' \to U' D' U'^{-1}$$

$$U D U^{-1} = U' D' U'^{-1}$$

$$(U'^{-1} U)\, D\, (U^{-1} U') = D'$$

$\downarrow$

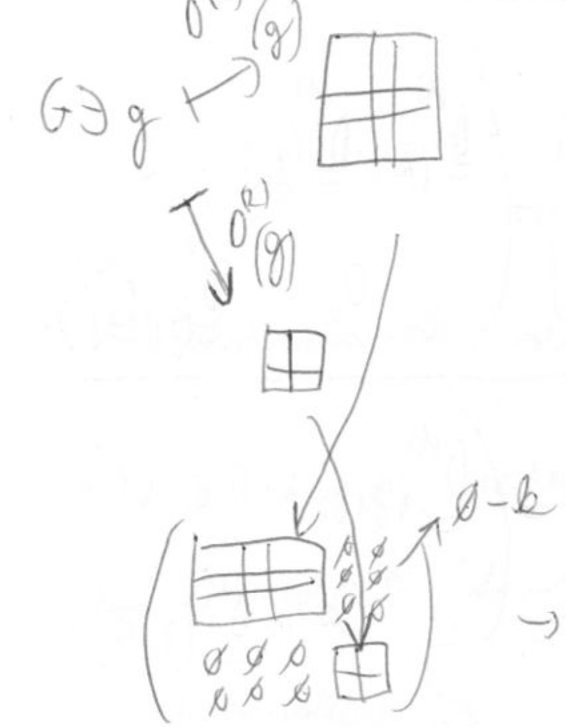
főtengelytransz. után $\underline{\underline{F}}$ megkapható (mellyel

$\underline{\underline{F}}\, \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{D}}'$ lesz)

↳ sajátértékprobléma, DE elég a Spurt megkapni,

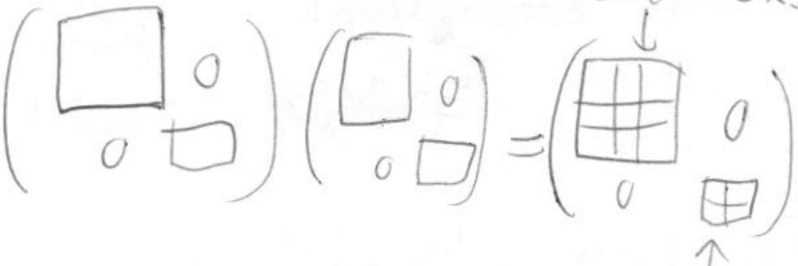
mert ez mindegyikre jellemző

– nézzünk 2 kül. dim-jű ábrázolást



→ a 2 mátrix „direkt összege"

ez a 2 3x3-as szorzata lesz



ez pont a 2 2x2-es szorzata lesz

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{A}} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{D}} \end{pmatrix}$$

ha A, B, C, D négyzetesek

„hipermátrix"

↓

mátrixokból álló mátrix

~~spec~~

blokkdiagonális mátrix (spec. hipermátrix)

Most:

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{D}}^{(1)}(g_1) & 0 \\ 0 & \underline{\underline{D}}^{(2)}(g_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{D}}^{(1)}(g_2) & 0 \\ 0 & \underline{\underline{D}}^{(2)}(g_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{D}}^{(1)}(g_1)\cdot\underline{\underline{D}}^{(1)}(g_2) & 0 \\ 0 & \underline{\underline{D}}^{(2)}(g_1)\underline{\underline{D}}^{(2)}(g_2) \end{pmatrix} =$$

$$\underline{\underline{D}}(g_1) \qquad \underline{\underline{D}}(g_2)$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{\underline{D}}^{(1)}(g_1 g_2) & 0 \\ 0 & \underline{\underline{D}}^{(2)}(g_1 g_2) \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}(g_1 g_2)$$

$$\boxed{D = D^{(1)} \oplus D^{(2)}}$$

↳ direkt összeg

$\Rightarrow$ Az ábrázolások direkt összege is ábrázolás !!

~~ez így~~ ez így látszik a mátrixon

DE direkt összeg és utána bázistrafó!

↳ elmosódik a struktúra

Az ábrázolások redukciója:

Szét lehet-e szedni (~~kisebb~~) egyszerűbb ábrázolásokra egy „bonyolult" ábr.-t?

↙ (reducibilis) ↘ (irreducibilis)

reducibi~~lis~~le representation — irreducibi~~lis~~le representation

↳ „irrep"

Véges csoport ábrázolása mindig felbontható ~~kisebb~~ irreducibilis ábrázolásokra!

(∞ csoport nem mindig)

⇒ Eddig volt:

- azonos dim. ~~csoportok~~ ábr. → lehet ∞ sok ekvivalens köztük
- kül dim. ~~csop~~ ábr. → lehetnek köztük reducibilisek

↳ Véges csoportok inekvivalens irreducibilis ábrázolás~~ok~~ai → mennyi van?

~~Áll~~.: Véges sok van!

↳ ezeket táblázatokba gyűjtötték:

„karaktertáblázatok"

Hogyan lehet szétdarabolni ired.-t?

pl. $5\times 3 = \begin{pmatrix} \boxed{} & \vdots \\ \vdots & \boxed{} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{bázis } \cancel{\text{trafó}}} \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

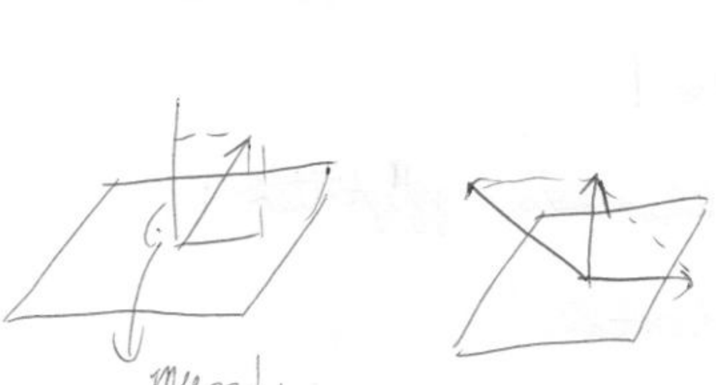
tekintsük a köv. alakú vektorokat

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Ezek az 5D tér 3D-s alterét alkotják ~ részcsoport

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ → Ezek 2D-s alteret alkotnak

(ezek [2D 3D] együtt már bázist alkotnak)



nem ~~mus~~ muszáj
⊥-nek lennie

(vektor)

$V = V_1 \oplus V_2$ → terek direkt összege

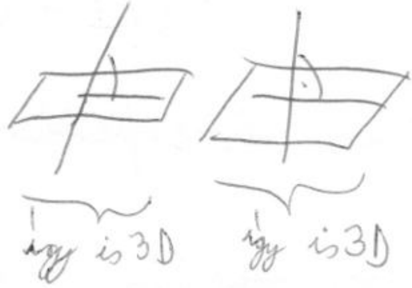
$\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$

- Ha ∀ vektor felbontható ilyen egymástól független alterekben lévő vektorok összegére → V_1 és V_2 alteret alkotnak
- Visszafelé nem megy! → melyeknek direkt összege az eredetivel az egész tér lesz

<u>kiegészítő altér</u> bármi lehet → ∞ sok van

1D-s alterek → kieg. alterek a síkhoz

→ ~~ugyanaz~~ pl.

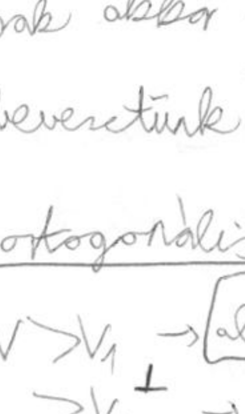


→ csak akkor egyértelmű, ha bevezetünk még egy ~~mennyiséget~~ jellemzőt, pl. síkkal bezárt szög ≡ 90°

<u>ortogonális altér</u>

$V \supset V_1$ → $\boxed{\text{altér jelölése}}$ ~ részcsoport

$\supset V_1^{\perp}$ → ortog. altér



$$\begin{pmatrix} \boxed{A} & 0 \\ 0 & \boxed{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ ha a vektor az altér eleme, és a mátrix blokkdiag.

↓

a képvektor is az altér része lesz

$$\begin{pmatrix} \boxed{A} & 0 \\ 0 & \boxed{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

vagyis: $V > V_1 \ni \underline{v}$

$D(g)\underline{v} \in V_1$

= az ábrázolóoperátor nem visz ki az altérből

(adott transzfo.-ra invariáns altér)

Másképpen:

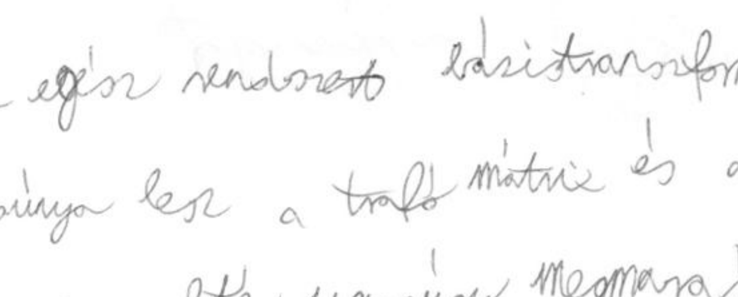
$$\boxed{\forall g \in G \quad \forall v \in V_1 < V \quad D(g)v \in V_1}$$

→ bázisfüggetlen állítás!!!

Ha az egész rendszert bázistranszformálom

↳ csúnya lesz a trafó mátrix és a vektor alakja,

de az altér ugyanúgy megmarad



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{\mathrm{D}}{=} (g_1, g_2)$$

↗ ha ez egy altérben lévő vektor, akkor nem változik a z komp.

$\forall \alpha$-ra $\Leftrightarrow$ $\forall$ csoportelemre

~~ha~~

↓

egy fizikai mennyiség több komponense

vagy több — " — ~~egy~~ komponensei ?

↳ Mi a különbség ?

lehet, hogy ~~nekünk~~ a mi érzékszerveink

külön érzékelik (x, y)-t és z-t, de

valójában keverednek

↓

ha ~~tényleg~~ így külön altere**t** alkotnak, akkor

különböző mennyiségek → rel. elm. → a ~~tér~~ és az idő

mégsem alkotnak

~~ok~~ $\boxed{1}$ → ez is ábrázolás → igen → homomorfizmus) külön altert

skalár : triviális ~~(áb.)~~ ábrázolás

↳ mi az hogy skalár? → forgatásra nézve nevezzük

(forgatásra invariáns) annak (pl. energia)

8. óra

Ábrázoláselmélet

(folyt.)

0) Ism. $G \ni g \longmapsto \hat{D}(g) \to \underline{\underline{D}}(g)$

$$\hat{D}(g_1)\hat{D}(g_2) = \hat{D}(g_1 g_2)$$

$$\hat{D}(e) = \hat{I}$$

$$\hat{D}(g^{-1}) = \hat{D}(g)^{-1}$$

Ábr. elm. alaptétele: szimmetriák ábrázolónak a ~~lineáris tér~~ lineáris tér kr. m.-en ért. ~~[illegible]~~ fv-ek (...)

- mátrix ábrázolás

1.) $\underline{\underline{D}}'(g) = \underline{\underline{f}}\,\underline{\underline{D}}(g)\,\underline{\underline{f}}^{-1}$ → ez is ábr.

$\underline{\underline{D}}' \sim \underline{\underline{D}}$ ekvivalens ábr.

$$\hat{D} \swarrow \searrow \quad \underline{\underline{D}} \qquad \underline{\underline{D}}' = \underline{\underline{f}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{f}}^{-1}$$

2.) $\begin{pmatrix} \boxed{D_1(g)} & 0 \\ 0 & \boxed{D_2(g)} \end{pmatrix}$ — V_1: $\underline{e}^{(k)}$ $\quad \underline{v} = \sum \alpha_k \underline{e}^{(k)}$; V_2: $\underline{f}^{(l)}$ $\quad \underline{w} = \sum_l \beta_l \underline{f}^{(l)}$

direkt összeg

↳ ez is ábr.

$$D = D^{(1)} \oplus D^{(2)}$$

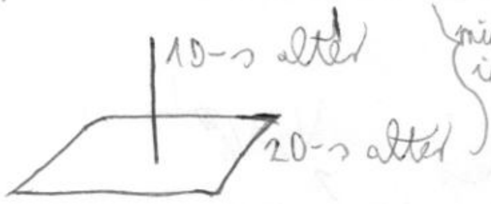
$$\underbrace{\underline{v} + \underline{w} = \sum_k \alpha_k \underline{e}^{(k)} + \sum_l \beta_l \underline{f}^{(l)}}_{\text{ezeken értelmezzük a direkt összeget}}$$

↓

de ennek vannak ~~lineáris~~ invariáns alteri, még akkor is, ha bázistranszformáljuk

pl.

3D:



20-s ~~mind~~ invariáns forgatásra z tengely körül

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

altér olyan, mint a részcsoport → amin a csop. értelmezve van

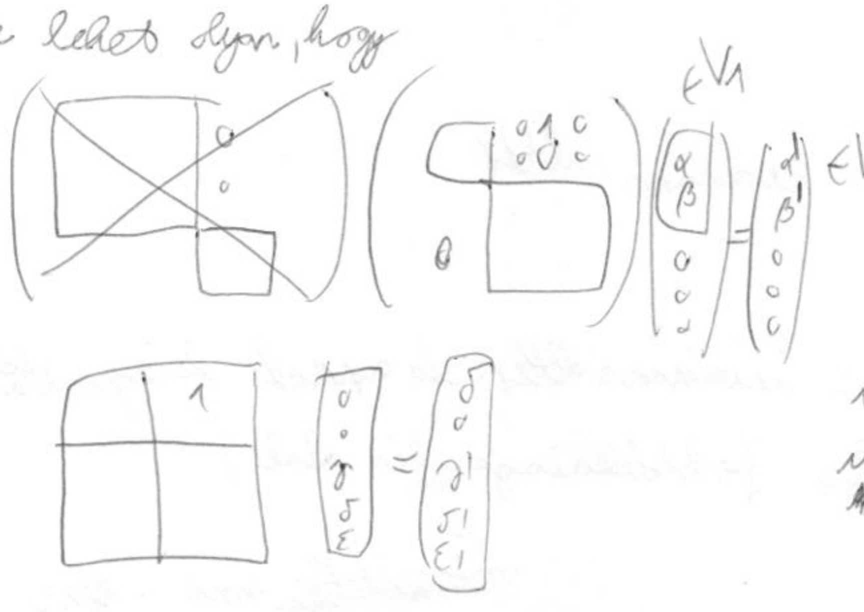
↳ altérből az $\oplus$ művelet nem visz ki ("folytasd" művelet ~~trafók~~ esetén)

↳ részcsoportból sem visz ki a művelet

$V > V_1$ invariáns altér D-nek része, ha

$\forall g \in G \quad \forall \vec{v} \in V_1 \quad D^{1}(g) \cdot \vec{v} \in V_1$

De lehet olyan, hogy



$V = V_1 \oplus V_2$

$v \in V_1 \quad D v_1 \in V_1$

$u \subset V_2 \quad D \notin V_2$

az egyik altér invariáns → a trafó nem viszi ki

DE a kiegészítő! altere nem invariáns

⇓

ilyenkor nem lehet blokkdiagonális alakba írni

a mátrixot → mi nem ezt keressük

⇓

$V > V_1 \quad V = V_1 + V_1^{\perp}$ ↗ ortogonális kiegészítő ↗ altér $V_2 = V_1^{\perp}$

$\forall g \in G \quad \forall v_1 \in V_1 \quad D(g)\, v_1 \in V_1$

$\forall v_2 \in V_1^{\perp} \quad D(g)\, v_2 \in V_1^{\perp}$ $\to V_1^{\perp} < V$

Ez a blokkdiagonalitás feltétele → ezt nézzük most, mert ezek ekvivalens ábrázolás

Triviális alterek:

- maga (n D-s)
- $\boxed{1}$ → 0 D-s (pont)

· Reducibilis ábr.

Van egy nemtriviális invariáns altér

· Teljesen reducibilis

Van egy nemtriviális invariáns altér és annak kiegészítő altere is invariáns (→ blokkdiagonális alak)

↓

szétszedhető irred.-ekre

· Irreducibilis ábr.

Nincs nemtriviális invar. altér

!! Tétel:

Véges csoportoknál ha egy ábrázolás reducibilis, egyben teljesen reducibilis is.

(∞ csoportoknál ez nem igaz!!)

↳ Másképpen: ha találunk egy invar. altert, annak a kieg. altere is invariáns.

Biz.:

- Négyzetes mátrixok ált.-ban mátrixszorzásra nem alkotnak csoportot, mert vannak nem invertálhatóak is

- Invertálh. négyzetes mátrixok altere:

$\det \neq 0$

zárt? $\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = (\det \underline{\underline{A}})(\det \underline{\underline{B}}) \neq 0$, ha $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$ és $\det B \neq 0$

↳ Igen ✓

Generál Lineár $n,\mathbb{R}$ → ~~totál~~ csoport ált. lineáris csoport

↳ $\underline{\underline{A}} \in GL(n,\mathbb{R}) \leftrightarrow \det \underline{\underline{A}} \neq 0 \Rightarrow$ ez ~~egy~~ csoportot alkotnak

$A \in SL(n,R) \leftrightarrow \det \underline{A} = 1 \Rightarrow$ ez egy részcsoport

speciális

Vannak komplex mátrixok is, és ezeken belül is van ~~dést~~ csoport

Nézzük a kör. mátrixokat: → ezek is csoportot alkotnak

$\underline{\underline{F}}\,\tilde{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{1}}$ forgatás $(O(n))$

↳ ortogonálisak

↓ vagy tükrözés és forgatás

$\widetilde{(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})} = \tilde{\underline{\underline{B}}}\,\tilde{\underline{\underline{A}}}$

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}^{-1}$

$\det(\underline{\underline{F}}\,\tilde{\underline{\underline{F}}}) = \det \underline{\underline{1}} = 1$

$(\det \underline{\underline{F}})(\det \tilde{\underline{\underline{F}}}) = \underline{\underline{1}}$

$(\det F)^2 = \underline{\underline{1}}$

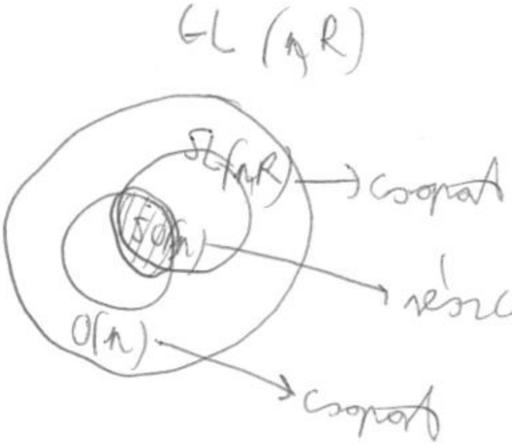
$\det \underline{\underline{F}}$ < 1 → ezek csoportot alkotnak (részcsop.-ot GL-n belül)
-1 → ezek nem alkotnak részcsoportot

SO(n)-nek (det = -1) mellékosztálya

$SO(n) \lhd O(n)$

– forgatásnál folytonos fv-ek a mátrix ~~(para)~~ elemei

~~tük~~tükrözésnél ugrik → ez nem jó



azért is, mert (← 2 csoport metszete részcsop.)

komplexeknél:

$GL(n, \mathbb{C}) \ni \underline{\underline{A}}$

$\underline{\underline{A}}^+ = (\bar{\underline{\underline{A}}})^* = \overline{\underline{\underline{A}}^*}$ → adjungálás

$\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{U}}^+ = \underline{\underline{I}}$ unitér mátrixok (unitary matrices)

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^+ = \underline{\underline{B}}^+ \underline{\underline{A}}^+$

$U(n)$

$\det(UU^+) = \det I = 1$

$(\det U)(\det \bar{U}^*)$

$(\det U)(\det U)^* = 1$

$\det U = e^{i\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ (komplex egységgyök)

↓

∞ sok unitér mátrix van

ezeken belül valós, ha

$\det U = \pm 1 \to O(n)$

$SU(n) \lhd U(n)$

$A \in SU(n) \quad AA^{+} = 1$

$\det A = 1$

↓

Vissza az ábr.-hoz:

Válasszunk olyan ábrázolást, ahol a mátrix unitér!!!

↳ Unitér ábrázolás.

Ezeken már be tudjuk bizonyítani azt a tételt, hogy a reduc. = telj. reduc.

Komplex vektorok

Pl. $\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$ → ennek a skaláris szorzata magával

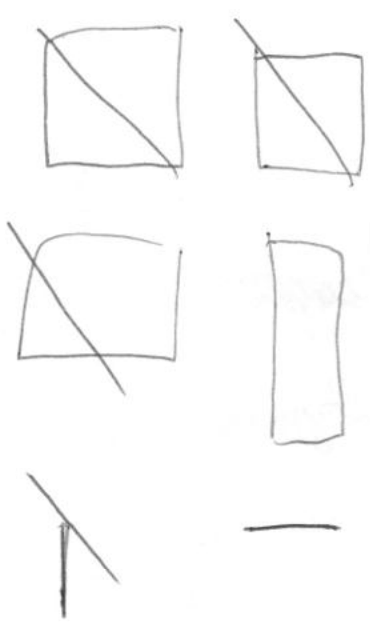
$\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = 1\cdot 1 + i\cdot i = 0$ → ⊥ önmagára?

$\begin{pmatrix}1\\ 2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2i\end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 2i\cdot 2i = -3$ → ⊖ az $|\,|^2$

2 lehetőség ⟶ megvált. a skaláris szorzás def.-ját

elfogadjuk: relativitás elm. → itt megfelel azokat, amiknek ⊖, 0 vagy ⊕ az $|\,|^2$-e → fizikai kül.

↓ kvantummech.



önadjungált mátrix = Hermitikus mátrix

$\underline{\underline{A}}^+ = \underline{\underline{A}}$

→ a sorvektorok és eredetiek transzponáltjai

skaláris szorzat valójában az $\tilde{a} \cdot b$

↓

Legyen a skaláris szorzat:

adjungált · vektor !! → és valóra visszaadja a sima sk. szorzást

$\langle a, b \rangle = a^+ \cdot b = \tilde{a}^* \cdot b$ → fizika könyvekben az elsőt adjungáljuk

pl. sk. sz.

$$\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = (1\ \ -i)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = 1\cdot 1 + (-i)i = 2$$

$$\hookrightarrow (z_1^*\ \ z_2^*)\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} = z_1 z_1^* + z_2 z_2^* = |z_1|^2 + |z_2|^2 \geq 0$$

Hermitikus skaláris szorzás:

$$\boxed{\underline{a}\,\underline{b} = \sum_k a_k^* b_k}$$

$$a a = \sum_k a_k^* a_k = \sum_k |a_k|^2$$

$\underline{\underline{A}}$ $\underline{u}, \underline{v}$

$$\sum_k \sum_l u_k^* A_{kl} v_l = \alpha$$

$$\boxed{}\ \boxed{A}\ \boxed{} = \underline{u}\, \underline{\underline{A}}\, \underline{v}$$

ezek így egymás konjugáltjai

$$\sum_k \sum_l v_l^* \left(A^+\right)_{lk} u_k = \beta$$

$$\boxed{v^*}\ \boxed{A^+}\ \boxed{u} = \underline{v}\, \underline{\underline{A}}^+ \underline{u}$$

$$A_{kl}^* = \left(A_{lk}\right)^* = A_{lk}^+$$

$$\boxed{\left(\underline{u}\, \underline{\underline{A}}\, \underline{v}\right)^* = \underline{v}\, \underline{\underline{A}}^+ \underline{u}}$$

$$\left[\vec{u}\left(\hat{A}\vec{v}\right)\right]^* = \vec{v}\left(\hat{B}\vec{u}\right)$$ operátorokra

$$\forall \vec{u}, \vec{v}$$

<u>operátor adjungáltja:</u>

ha $\left[\vec{u}\left(\hat{A}\vec{v}\right)\right]^* = \vec{v}\left(\hat{B}\vec{u}\right)$ $\forall \vec{u}, \vec{v}$, akkor $\hat{A}^+ = \hat{B}$

$\langle \ \rangle$

várható érték : bracket

kvantummech. : ez valójában 2 vektor
komplex skaláris szorzata

$\langle\ |$ sorvektor $|\ \rangle$ oszlopvektor

egy haladó e^- spinállapota

$|\ldots\ldots\rangle$
$|\uparrow\rangle \quad |\alpha\rangle$ Feynman

$\langle a | b \rangle \neq \langle b | a \rangle$

$\langle a | b \rangle = \langle b | a \rangle^*$

ezt a jelölést használjuk

$\underbrace{\langle u | A | v \rangle}_{\text{szendvics}}$ → kvantummech.-ban ezt sokat használják

($u = \psi^*$ $\quad$ $\underline{A}$ fizikai mennyiség
$v = \psi$ $\quad$ (operátor))

$$\boxed{\langle u | A | v \rangle^* = \langle v | A^+ | u \rangle}$$

tétel → l. előbb

$\underline{b} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v} \qquad \underline{z} = \underline{\underline{A}}^+\underline{u}$

$(\underline{u}\underline{b})^* \stackrel{?}{=} \underline{v}\,\underline{z}$

Vissza a csoportábrázoláshoz! (ábrázoló trf. op.-ok unitérek)

$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}^+ = \underline{\underline{I}}$

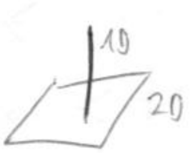
~~Vesszük~~ Vegyük a kov. direkt összegét

$W = V \oplus U$ $\quad U = V^{\perp}$ és unitér ábrázolás

$\underline{w} = \underline{v} + \underline{u} \qquad \underline{v} \in V \quad u \in U$

$\forall \underline{v}, \underline{u} \quad \underline{v}\underline{u} = 0$ → a két altérben lévő vektorok merőlegesek

$\langle v | u \rangle = 0$ (pl. 1D, 2D)



Legyen U inv. altér → Áll.: V is invariáns

$\forall \ |u\rangle \in U$

$|u'\rangle = D|u\rangle \in U$

$\forall g \ |u'\rangle = D(g)|u\rangle \in U$

ha $\langle v | u \rangle \Rightarrow \langle v | u' \rangle$ (mert u' is $\perp$-es v-re)

$= \langle v | D(g) | u \rangle = 0 \quad /^*$

$\langle u | \underbrace{D^+(g)}_{D^{-1}(g)} | v \rangle = 0$

$D^{-1}(g)$, mert D unitér

$\langle u | D(g^{-1}) | v \rangle = 0 \qquad \forall u, \forall v$

$\langle u | v' \rangle = 0$

$|v\rangle \in V$

$|v'\rangle = D(g^{-1})|v\rangle$ → $v' \perp u$-ra, de v is az volt ⇒ v' ugyanabban az altérben maradt

⇓

$|v'\rangle \in V$

⇓

V invariáns altér

Ha az ábrázoló mátrixok ∀ unitérek, akkor egy inv. altér kieg. altere is invariáns.

↓

reducibilis ábr. = teljesen red. ábr.

↓

Mi azt akartuk bizonyítani, hogy ∀ ~~red.~~ red. ábrázolás teljesen reducibilis, de most csak unitérre igazoltuk

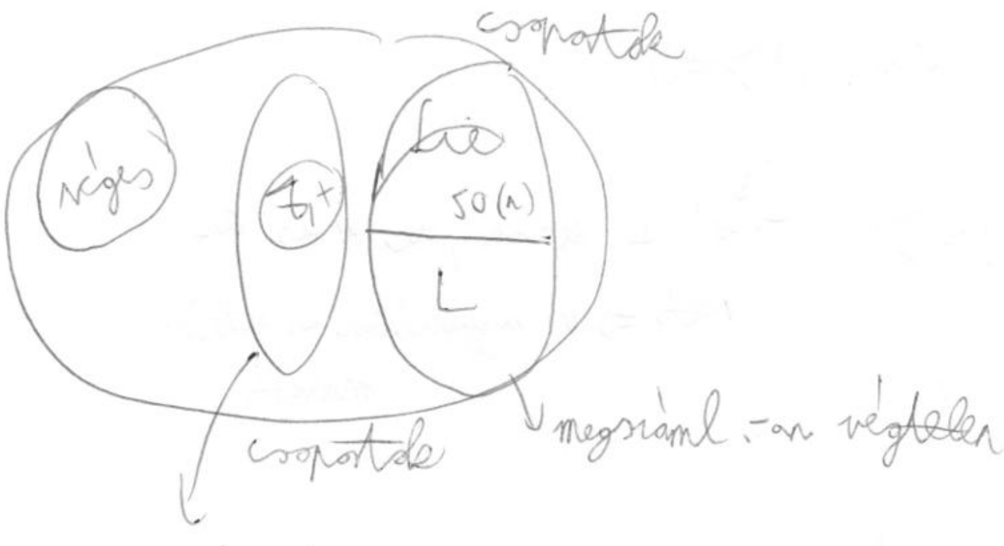
DE tetszőleges mátrixhoz ∃ olyan $\underline{\underline{F}}$, melyre

$\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{D}}(g)\,\underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{D}}'(g)$ unitér (ekvivalens egy unitér ábr.-al) → $\boxed{\text{ez véges ábr.-nál igaz}}$

⇓

Ha ez igaz, akkor ∀ reducibilis ábrázolás teljesen reducibilis (szétszedhető irreducibilis ábrázolások ~~véges~~ direkt összegére)

később biz.



nem megszámlálhatóan (kontinuum) végtelen

8. óra

$$G \ni g \mapsto \hat{D}(g) \to D(g)$$

$$\left.\begin{array}{l} D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2) \\ D: V \to V \end{array}\right\} \text{ábrázolás}$$

$$\left.\begin{array}{l} V > V_1 \ni \underline{v} \\ \forall g \quad D(g)\underline{v} = \underline{v}' \in V_1 \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 \text{ altér}$$

$$\underline{\underline{D}}(g)^{-1} = \underline{\underline{D}}(g^{-1}) = \underline{\underline{D}}(g)^{+} \quad \to \text{unitér mátrix}$$

$V = V_1 \oplus V_1^{+}$ → unitér ábrázolásra a kiegészítő altér is invariáns

Áll.: véges csop.-ban minden ábr. ekvivalens egy unitér ábr.-al, az $D' \sim D$ (ekvivalensek) ha $\exists F$

$$\forall g \quad D'(g) = F D(g) F^{-1}$$

Tétel

Véges csoportokra $\forall$ ábr. ekvivalens egy uniter ábr.-al.

kitérés:

ket — bra

$| \rangle \to \langle |$

a_k (oszlop) — (sor) a_k^* $= (\text{oszlop})^*$

$(\text{sor})(\text{oszlop}) = \sum a_k^* b_k$

$\parallel$

$\langle a | b \rangle \to$ újfajta skaláris szorzás

$\langle a | b \rangle = \langle b | a \rangle^*$

$D(g): V \to V$

$\langle x, y \rangle = \langle y | x \rangle^* \quad (x, y \in V)$

~~(újfajta)~~ skaláris szorzás def.-i

$V_{\mathbb{C}} \ni u, v$

$\langle u, v \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$

$(\langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle) \to$ ez valósban ~~skalárisra~~ igaz

$\langle u | (|v_1\rangle + |v_2\rangle) = \langle u | v_1 \rangle + \langle u | v_2 \rangle$

$\langle u | (\alpha | v \rangle) = \alpha \langle u | v \rangle$

$\left.\right\}$ műv. tul.-ok ~~[illegible]~~

$\forall \langle u | u \rangle \in \mathbb{R}$, $\langle u | u \rangle \geq 0$, és $\langle u | u \rangle = 0 \Rightarrow |u\rangle = 0$ } sk. szorzás def.-ja

Def.-juk egy újfajta sk. szorzást:

$D(g) : V \to V \quad |G| = N$

$\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle^*$

g befutja a csoportot → minden csoportelem mátrixával elvégezzük a skalárszorzást

$$\boxed{(x|y) = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \langle D(g)\, x \,|\, D(g)\, y \rangle}$$

adott ábrázoláshoz definiáljuk ezt a sk. szorzást

Áll.: ezzel a skaláris szorzással az ábr. unitér

kitérő: $\vec{v} \mapsto \vec{v}' = \hat{A}\vec{v}$

$\vec{u} \mapsto \vec{u}' = \hat{A}\vec{u}$

$\vec{u}'\vec{v}' \overset{?}{=} \vec{u}\vec{v}$ → mikor lesz a sk. szorzás invariáns?

$\underline{u}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{u} \qquad \underline{v}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$

$\underline{u}'\underline{v}' = \sum_k u_k' v_k' = \sum_k \left(\sum_l A_{kl} u_l\right)\left(\sum_m A_{km} v_m\right) =$

$= \sum_l \sum_m \sum_k A_{kl} A_{km} u_l v_m = \sum_l \sum_m \left(\sum_k \tilde{A}_{lk} A_{km}\right) u_l v_m =$

$= \sum_l \sum_m (\underline{\underline{\tilde{A}}}\underline{\underline{A}})_{lm} u_l v_m \overset{\text{I-e legyen}}{=} \underline{u}\,\underline{v} = \sum_l u_l v_l = \sum_l u_l \sum_m \delta_{lm} v_m$

$$= \sum_l \sum_m \delta_{lm} u_l v_m \quad = \sum_l \sum_m (\underline{\underline{\tilde{A}}}\,\underline{\underline{A}})_{lm} u_l v_m$$

$$\Downarrow$$

$$(\tilde{A} A)_{lm} = \delta_{lm} = I_{lm}$$

akkor lesz invariáns a sk. szorzás

$$\tilde{A} A = I \qquad \boxed{A^{-1} = \tilde{A}}$$

ha A ortogonális mátrix

(másképp sk. szorzás tartó)

(ez komplexben az unitér mátrixoknak felel meg)

Nimmatevé:

$\underline{u}, \underline{v} \in V_4$

$$\langle u' | v' \rangle = \sum_k u'^*_k v'_k = \sum_k \left(\sum_l A_{kl} u_l\right)^* \left(\sum_m A_{km} v_m\right) =$$

$$= \sum_k \sum_l \sum_m A^*_{kl} u^*_l A_{km} v_m = \underbrace{\sum_l \sum_m \left(\sum_k A^*_{kl} A_{km}\right) u^*_l v_m}_{} \stackrel{!}{=}$$

$$\stackrel{!}{=} \langle u | v \rangle = \sum_l u^*_l v_l = \sum_l u^*_l \sum_m \delta_{lm} v_m = \underbrace{\sum_l \sum_m \delta_{lm} u^*_l v_m}_{}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_k A^*_{kl} A_{km} = \delta_{lm}$$

$$\sum_k (\tilde{A})^*_{lk} A_{km} = \delta_{lm}$$

$$\sum_k (\underline{\underline{A}}^{+})_{lk} A_{km} = \delta_{lm}$$

$$(\underline{\underline{A}}^{+} \underline{\underline{A}})_{lm} = I_{lm}$$

$$\underline{\underline{A}}^{+}\underline{\underline{A}}=I \rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}=\underline{\underline{A}}^{+}$$

$\Downarrow$

<u>a komplex skalárszorzatot megtartó mátrixok unitérek</u>

$\Downarrow$

<u>Csoportelm.</u>

ha az új skalárszorzatot megtartja az ábr., akkor unitér a mátrixa

↓

erre a skalárszorzásra nézve! (egyenlőre még csak ezt tudjuk)

$h \in G$

$x' = \hat{D}(h)x$

$y' = \hat{D}(h)y$

ha $(x'|y') = (x,y) \Rightarrow \hat{D}$ unitér (def. szerint)

~~Megtartja~~ (biz.:) az ábr. a skalárszorzatot?

$$(x'|y') = (D(h)x|D(h)y) = \frac{1}{N}\sum_{g\in G}\langle D(g)D(h)x|D(g)D(h)y\rangle =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{g\in G}\langle D(gh)x|D(g\cdot h)\cdot y\rangle = \frac{1}{N}\sum\langle D(g')x|D(g')y\rangle =$$

$gh := g'$

$= \frac{1}{N}\sum\langle D(g)x|D(g)y\rangle$

mivel $g' \in G$, és g' is befutja a csoportot, ezért ez ugyanannyi $= (x|y)$

$\Downarrow$

$(x'|y') = (x|y)$

$\Downarrow$

D unitér (D az eredeti ábr.)

(∞ csoportoknál:

. $\frac{1}{N}$ -nek nincs értelme

. Σ helyett $\int dg < D(g) x | D(g) y >$

Haar Alfréd

$|G| = \int dg \cdot 1$ — $\neq \infty$: kompakt ∞ csoport; $= \infty$: nem kompakt ∞ csop.

$\uparrow$ így ért. a csoport elemeinek számát

pl. . ellipszis felszíne $\to \infty$ pont, de véges felület

. hiperbola felszíne $\to \infty$ pont és ∞ – " –

Áll: kompakt ∞ csoportokra a véges csoportok tul.-ai átvihetők)

Beláttuk, hogy:

D az új skaláris szorzásra unitér

DE: $\hookrightarrow$ nekünk az kell, hogy $\exists\, D'$ (D-hez), ami az eredeti sk. szorzásra unitér

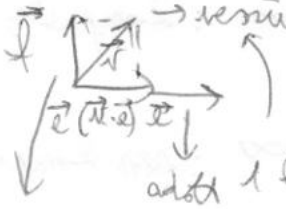
Vegyünk 2 ortonormált bázist:

$V \ni e^{(k)}$ $\quad \langle e^{(k)} | e^{(l)} \rangle = \delta_{kl}$ → ez a régi sk. szorzóra ortonormált

$\ni f^{(k)}$ $\quad (f^{(k)} | f^{(l)}) = \delta_{kl}$ → ez az új — || —

(Schmidt-féle ortogonalizáció

↳ $\vec f$ → vesszük a vektort a síkjában



vonjuk ki $\vec v$-ből az $\vec e$ irányú vetületét

↳ kapunk egy $\vec e$-re merőleges új bázisvektort ($\vec f$))

Vegyük a köv. lineáris trafót:

$C: e^{(k)} \to f^{(k)}$ (bázistrafó)

$$\underline{v} = \sum v_k e^{(k)}$$

$$\underline{\underline{C}}\,\underline{v} = \sum_k v_k \underline{\underline{C}}\,\underline{e}^{(k)} = \sum_k v_k f^{(k)}$$

$$\underline{x} = \sum_k x_k \underline{e}^{(k)} \qquad y = \sum_l y_l e^{(l)}$$

$$\langle x | y \rangle = \sum_{kl} x_k^* y_l \underbrace{\langle e^{(k)} | e^{(l)} \rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_k x_k^* y_k$$

Legyen:

$$x' = C x$$

$$y' = C \cdot y$$

$$x' = C\sum_k x_k e^{(k)} = \sum_k x_k C e^{(k)} = \sum_k x_k f^{(k)}$$

$$y' = Cy = \sum_l y_l f^{(l)}$$

$$(x'|y') = \sum_k x_k^* \sum_l y_l \underbrace{(f^{(k)}|f^{(l)})}_{\delta_{kl}} = \sum_k x_k^* y_k$$

$\downarrow$

$$(x'|y') = \langle x|y\rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned}(Cx|Cy) &= \langle x|y\rangle \\ (x|y) &= \langle C^{-1}x|C^{-1}y\rangle\end{aligned}}$$

Összegezve:

D ábr., ( ) sk. szorzás, → beláttuk, hogy D unitér ( )-re (invariáns)

$D'(g) = C^{-1}D(g)\cdot C$ → definiáljuk így

f-ek

$$\langle D'(g)x|D'(g)y\rangle = \langle C^{-1}D(g)Cx|C^{-1}D(g)Cy\rangle =$$

emiatt

$$= (DCx|DCy) = (Cx|Cy) =$$

mivel D unitér ( )-re

$$= \langle x|y\rangle$$

sikerült olyan f operátort ~~találni~~ (C^{-1}), amivel
~~$D' = $~~ megkonstruálható olyan, eredetivel (D)
ekvivalens ábr. (D'), ami unitér (a komplex
skaláris szorzásra $(\langle | \rangle)$ invariáns)

$\Downarrow$

az unitér ~~ma~~ ábrázolások már ~~a~~ teljesen ~~reducibilisek~~,
vagyis szétszedhetők irreducibilisre.

~~Áll~~:
véges csoport~~ok~~ véges sok ired. ábrázolásra
szedhető szét $\to$ (ezt akarjuk biz., és kitalálni,
hogyan szedhetjük szét őket)

Schur-I. lemmája

$G \ni g \mapsto \underline{\underline{D}}(g)$. Ha $\underline{\underline{D}}$ ired. ábrázolás (irrep),
akkor ha $\exists A \quad \forall g \in G \quad [A, D(g)] = 0$,

kommutátor $[A, D] = AD - DA$

$\Downarrow$

$\underline{\underline{A}} = \lambda \underline{\underline{I}}$

---

vegyük azt az A-t, ami felcserélhető D-vel (ami egy irrep).
Biz.: $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v} \to \underline{v}$ s.v.

adott s.é. hez egy saját altér tartozik

áll: $\underline{v} \in V_1 < V$
V_1 invariáns altér

Legyen:

$\underline{v}' = \underline{\underline{D}}(g)\underline{v}$ → ~~ha~~ ha $v' \in V_1$, akkor V_1 invariáns altér

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{v}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{D}}(g)\,\underline{v} = \left(\underline{\underline{D}}(g)\,\underline{\underline{A}}\right)\underline{v} = \underline{\underline{D}}(g)\,\lambda\,\underline{v} = \lambda\,\underline{\underline{D}}(g)\,\underline{v} = \lambda\underline{v}'$$

mely a 0 a s.v. → a teljes tér $\{0\}$

$\underline{\lambda}$-nak ∀ vektor s.v.-a

$\underline{v}' \in V_1 < V$

$$V_1 < \begin{cases} \{0\} \to V = \{0\} \\ V \quad \boxed{\forall v}\text{-re } \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v} \to \boxed{\underline{\underline{A}} = \lambda \underline{\underline{I}}} \end{cases}$$

✓ Biz vége

vagy

mivel ~~∀ v-re ...~~ $\forall v \in V_1$

~~ha~~ mivel D irep.,

ezért invariáns altere csak triviális lehet

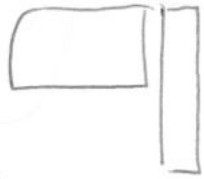
Schur - II

Legyen D_1 és D_2 2 ired. ábrázolás

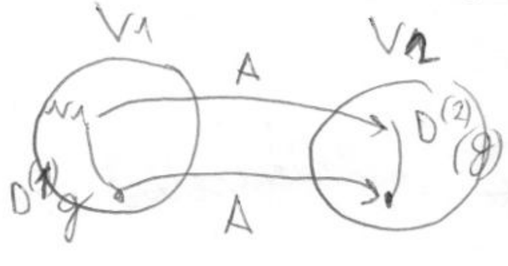
- $$G \ni g \begin{cases} \nearrow D^{(1)}(g): V_1 \to V_1 \text{ irep} \\ \searrow D^{(2)}(g): V_2 \to V_2 \text{ irep} \end{cases}$$

- Vegyük a köv. ~~mátrixot~~ op.-t:

($A: V_1 \to V_2$ → téglalap-mátrix (nem biztos, hogy azonos dim.-júak)



)



} Legyen A ilyen leképezés felcserélhető D-vel!

$\forall g \in G$-re $\forall \underline{v} \in V_1$-re $\boxed{A D_1(g) = D_2(g) A}$

- áll.: $\nearrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$

vagy

$\searrow \exists \underline{\underline{A}}^{-1}$, ~~vagy~~ ehhez ~~akkor~~ a két tér dim.-ja ~~kell~~ uaz. kell, hogy legyen (csak akkor lehet inverz)

$\cancel{D^{(2)}(g) = A D^{(1)}(g) A^{-1}}$ / ilyenkor

$$A D_1(g) = D_2(g) \cdot A \quad / \cdot A^{-1}$$

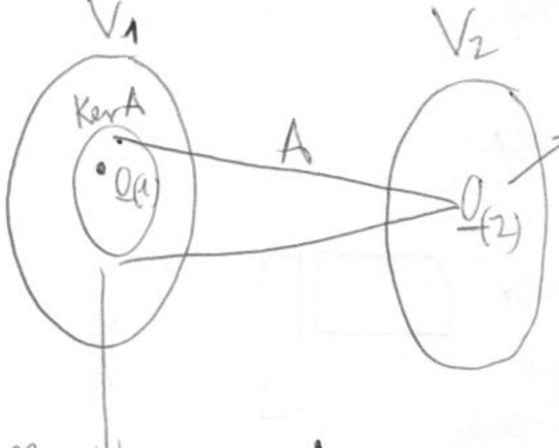
$$A D^{(1)}(g) A^{-1} = D^{(2)}(g) \qquad D^{(1)} \sim D^{(2)} \text{ (ekviv)}$$

másképpen fogalmazva:

A — $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$

vagy $D^{(1)}$ és $D^{(2)}$ öirep-ek ekvivalensek (→ ha van ilyen $\underline{\underline{A}}$)

Biz.:
Tek. a két vektorteret



→ legyen ez a normálosztó az összeadásra

áll: ez egy altér

biz: 2 elem összegének a leképezése ~~a leképezett~~ a leképezettek összege

. Ker. lekép. összege $\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$ → a 2 elem összege is eleme az altérnek.

(megj.: már láttuk korábban is, hogy homomorfizmus magja részcsoport, ezesetben altér)

Legyen

$\mathrm{Ker}\, A < V_1$ altér

$v \in \mathrm{Ker} A$

$g \in G$

$\underline{v}' = D^{(1)}(g)\underline{v}$

$\underline{v}' \in V_1 \rightarrow$ kérdés: $\underline{v}' \overset{?}{\in} \mathrm{Ker} A$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{v}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{D}}^{(1)}(g)\,\underline{v} \overset{\text{felt. miatt}}{=} \underline{\underline{D}}^{(2)}(g)\,\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{\underline{D}}^{(2)}(g)\,\underline{0}_2 = \underline{0}_2$$

$\underline{v}' \in \mathrm{Ker} A$

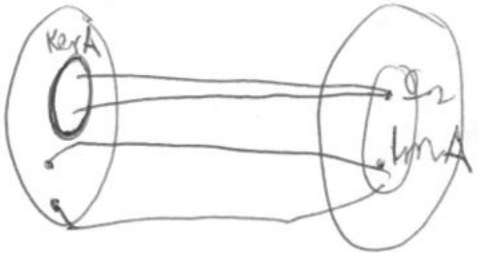
$\Downarrow$

Ker A invariáns altér D_1-re. De mivel D_1 irep.

$\mathrm{Ker} A \begin{cases} \{0_1\} \\ V_1 \end{cases} \leftarrow$ ~~(Schur I-ben)~~ ~~(már láttuk, hogy)~~ $\Downarrow$

D_1 invariáns alterei csak ezek lehetnek

~~$\mathrm{Im} A < V_2$~~



$\mathrm{Im} A \subset V_2$ (részhalmaz)

$u \in \mathrm{Im} A$ ha $\exists v \in V_1$, $u = Av$ } ImA def.-ja (a V_1-beli vektorok képe)

$\mathrm{Im} A < V_2$ (altér) — 99

áll: $\mathrm{Im}A$ invar. akkor D_2-re

$u \in \mathrm{Im}A$

$g \in G$

$\underline{u}' = D^{(2)}(g)\underline{u}$

feltétel miatt

$D^{(2)}(g) A \underline{v} = \underline{A}(\underbrace{D^{(1)}(g)\underline{v}}_{\underline{v}'}) =$

$u' \in \mathrm{Im}A$

$\Downarrow$

$\mathrm{Im}A$ invariáns D_2-re

DE D_2 irrep. $\rightarrow$ Schur I miatt:

$\mathrm{Im}A \begin{cases} \{0_2\} \\ V_2 \end{cases}$

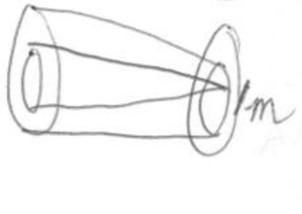
$= \quad \mathrm{Ker}A \begin{cases} \{0_1\} \\ V_1 \end{cases} \qquad \mathrm{Im}A \begin{cases} \{0_2\} \\ V_2 \end{cases}$

~~α) β)~~

4 eset van:

α) $\mathrm{Ker}A = \{0_1\}$

$\mathrm{Im}A = \{0_2\}$



$\Rightarrow$ ha $Av = 0$

$\Downarrow$ $v = 0$

akkor a) elemek képei ~~és különbözők~~ megegyeznek ($\mathrm{Im}A\} = \{\underline{0}_2\}$)

$0 = Aa = Ab \Rightarrow$ V-kül. ~~képek~~

$A(a-b) = 0$ ← a leképezettek összege az összeg leképezettje

$\Downarrow$

$a - b = 0$

$a = b \rightarrow V_1$ ∀ eleme azonos

– de ∀ elem képe a 0 ⟷ kül. elemek képei

⇓ ⇙

ez csak akkor ~~(...)~~ kül-ek

lehet, ha

$D_1(g)$

nem igazi $\leftarrow V_1 = \{0_1\}$

ált.,)

ha $\overset{\{0_1\}}{\overset{\shortparallel}{V_1}} \to V_1$-le képez ~~(...)~~)

β) $\mathrm{Ker}\, A = V_1$ ⎫ az ~~(V_1-beli)~~ ábrázolt vektorok

$\mathrm{Im}\, A = \{0_2\}$ ⎭ mind $\underline{0}$-k.

⇓

$\boxed{\underline{\underline{A = 0}}}$

$V_1 \xrightarrow{A} \{0_2\}$

γ) $\mathrm{Ker}\, A = \{0_1\}$ → csak a $\underline{0}_1$ képe lesz a $\underline{0}_2$

$\mathrm{Im}\, A = V_2$

$\Rightarrow \boxed{\exists A^{-1}}$

δ) $\mathrm{Ker}\, A = V_1$ → az egész V_1 0-ra képződik le,

$\mathrm{Im}\, A = V_2$ → DE V_2 az ~~(egész)~~ összes leképezett ~~vektorok~~ lesz

⇓

$V_2 = \{\underline{0}_2\}$

↳ $D_2(g)$ nem igazi ált. $\to \{0_2\} = V_2 \xrightarrow{D_2} V_2 = \{0_2\}$

9. óra

0) Sch - I.: ha D irrep (irred. ábr.)

és $\forall g \in G$, ha $D(g)\, A = A\, D(g)$

$$\Rightarrow A = \lambda I$$

Sch - II $\quad G \ni g \; \begin{matrix} \nearrow D^{(1)}(g) & V_1 \to V_1 \\ \searrow D^{(2)}(g) & V_2 \to V_2 \end{matrix}$

$$A : V_1 \to V_2$$

és ha $\forall g : \; A\, D^{(1)}(g) = D^{(2)}(g)\, A$

$$\Downarrow$$

$A = 0 \qquad$ $\exists A^{-1}$ vagyis $D^{(1)} \sim D^{(2)}$ ekvivalensek

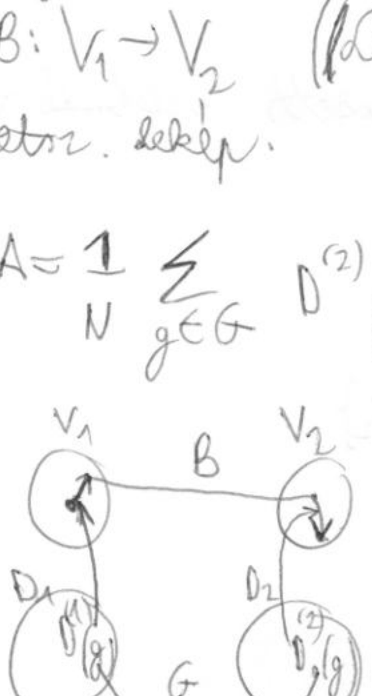
($\underline{\underline{A}}$ segítségével egymásba ~~alakíthatóak~~ transzformálhatóak)

Legyen:

1) $B : V_1 \to V_2$ (elnevezések (leképezés : $V_1 \to V_2$))

~~tetsz.~~ lekép... operátor : $V_1 \to V_1$

$$A = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} D^{(2)}(g^{-1}) \cdot B \cdot D^{(1)}(g) \qquad D^{(1)}, D^{(2)} \text{ irrep}$$



áll.: $\underline{\underline{A}}$ tudja Schur-II-t.

$D^{(2)}$-nek van inverse

($D^{(2)}(g^{-1}) \cdot A D^{(1)}(g) = A$ → Schur II ezt mondja)

most

$$\underbrace{D^{(2)}(h)^{-1} A D^{(1)}(h)} = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \underbrace{\underbrace{D^{(2)}(h)^{-1}}_{D^{(2)}(h^{-1})} \cdot D^{(2)}(g^{-1})}_{D^{(2)}(h^{-1}g^{-1})} B \cdot \underbrace{D^{(1)}(g) D^{(1)}(h)}_{D^{(1)}(gh)} =$$

mert:

$$h^{-1}g^{-1} = (gh)^{-1}$$

$$g' = gh$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{g \in G} D^{(2)}(g'^{-1}) \cdot B D^{(1)}(g') =$$ de ha g befutja a csoportot, akkor g' is befutja a csoportot

$$= \frac{1}{N} \sum_{g' \in G} D^{(2)}(g'^{-1}) B D^{(1)}(g') = A$$

tetszőleges B leképezést választva B-vel definiálhatók ~~[illegible]~~ egy A-t a lent leírt módon

ha ez az A = 0 → nem ekvivalensek

ha $A \neq 0$ → $A = \lambda I$ → ekvivalens D_1 és D_2

$$\underline{A \cdot D^{(1)}(h) = D^{(2)}(h) \cdot A}$$

teljesült a Schur II - inputja

⇓

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$, ha nem ekv.-ek ← ~~ilyenkor nincs inverz~~ (det A = 0)

$\exists A^{-1}$ → $D^{(1)} \sim D^{(2)}$ → $A = \lambda I$

Schur I → ha $D^{(1)}$ és $D^{(2)}$ ekvivalens, akkor 1 adott $\underline{\underline{D}}$-vé alakíthatók és a $\underline{\underline{D}}$ kommutál $\underline{\underline{A}}$-val

~~[illegible]~~ nincs inverz ← det A = 0 ? nem bizonyítottuk

$\Rightarrow$ Legyenek $G \to D^{(\mu)}, D^{(\nu)}$ irrepek

tetsz. B-re

$$A = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} D^{(\mu)}(g^{-1})\, B\, D^{(\nu)}(g)$$

$D^{\mu}(g) = V_{n_\mu} \to V_{n_\mu}$

$$\boxed{\text{ekkor } A \begin{cases} 0 & \text{ha nem ekviv.} \\ \lambda I & \text{ha ekviv.} \end{cases}}$$

n_μ a μ tér, n_ν a ν tér dimenziója

másképp $A = \ldots = \delta_{\mu\nu} \lambda I_{n_\mu}$

ha ekvivalensek $\to \mu = \nu \to$ a Spur $\lambda \cdot I_{n_\mu}$

~~Ha egyforma méretűek D-k~~

~~van Spur~~

Ha nem egyforma méretűek (ilyenkor $\to$ nincs Spur)

biztos nem ekvivalensek

Sp(ABC)=Sp(CAB)

mivel $A = \lambda \cdot I$

$$\mathrm{Sp}\, A = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \underbrace{\mathrm{Sp}\left(D^{(\mu)}(g^{-1})\, B\, D^{(\mu)}(g)\right)}_{\mathrm{Sp}\left(D^{(\mu)}(g) D^{(\mu)}(g^{-1}) B\right)} = \lambda\, \underbrace{\mathrm{Sp}\, I_{n_\mu}}_{n_\mu \text{ (ahány dim. a tér)}}$$

$$\underbrace{\mathrm{Sp}\left(\underbrace{D^{(\mu)}(g) D^{(\mu)}(g^{-1})}_{D^{(\mu)}(g g^{-1})}\, B\right)}_{\mathrm{Sp}\, B}$$

$$D^{(\mu)}(g g^{-1}) = \underbrace{D^{(\mu)}(e)}_{I_{n_\mu}}$$

$$\mathrm{Sp}\, A = \frac{1}{N} \overbrace{\sum_{g \in G} \mathrm{Sp}\, B}^{N \cdot \mathrm{Sp}\, B} = \mathrm{Sp}\, B = \lambda n_\mu$$

$$\lambda = \frac{\mathrm{Sp}\, B}{n_\mu}$$

$$\boxed{(A=)\frac{1}{N}\sum_{g\in G} D^{(\mu)}(g^{-1})\, B\, D^{(\nu)}(g) = \delta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{Sp}\,B}{n_\mu} I_{n_\mu}}$$

$\downarrow$

akármilyen B mátrixra ez teljesül

(ez ~~azonos~~ ábr. -ok közötti össef.)

$D^{(\mu)}, D^{(\nu)}$ uniter (ekvivalencia erejéig) ← már beláttuk $\quad U^{-1} = U^{+} = \tilde{U}^{*}$

$$\Downarrow$$

$$D(g^{-1}) = D(g)^{-1} = D(g)^{+} = \tilde{D}(g)^{*}$$

Indexesen:

$$A=\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\tilde{D}^{(\mu)}(g)^{*}\, B\, D^{(\nu)}(g) = \delta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{Sp}\,B}{n_\mu} I_{n_\mu}$$

$$A_{kl} = \frac{1}{N}\sum_{g\in G}\sum_{p}^{n_\mu}\sum_{q}^{n_\nu \to \text{dimenziószám}}\left[\tilde{D}^{(\mu)}(g)^{*}\right]_{kp} B_{pq}\left[D^{(\nu)}(g)\right]_{ql} =$$

$$= \delta_{\mu\nu}\delta_{kl}\frac{1}{n_\mu}\sum_{q}\sum_{m} B_{mq}\delta_{mq}$$

ha $n_\mu = n_\nu$, akkor

δ_{kl}-nek van értelme,

de ~~ez csak~~ $\delta_{\mu\nu}$ akkor

nem 0, ha $\mu=\nu \to n_\mu = n_\nu$

msz.: $\underbrace{\sum_m B_{mm}}_{\mathrm{Sp}\,B} = \sum_p B_{pp} = \sum_p\sum_q B_{pq}\delta_{pq}$

$$\sum_p\sum_q B_{pq}\left[\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\left[\tilde{D}^{(\mu)}(g)^{*}\right]_{kp}\left[D^{\nu}(g)\right]_{ql} - \frac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{kl}\delta_{pq}\right] = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\left[\tilde{D}^{(\mu)}(g)^{*}\right]_{kp}\left[D^{\nu}(g)\right]_{ql} = \frac{1}{n_\mu}\delta_{\mu\nu}\delta_{kl}\delta_{pq}} \Leftarrow \quad !!\ \underline{\forall B\text{-re}}$$

az ábrázolások közti matematikai összefüggés

~~Jelölés:~~)

$$\tilde{D}^{*}_{kp} = D^{*}_{pk}$$

ha $\mu \neq \nu$ ~~(ha ...)~~ nem ekvivalensek $\rightarrow$ ez 0

ha $\mu = \nu$ $\rightarrow$ ekvivalensek ~~(akkor)~~ ~~ha ez teljesül~~ ~~(ekvivalensek)~~

$\Downarrow$

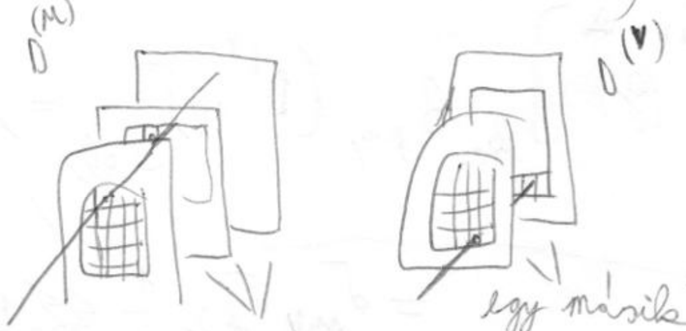
$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G} \left[D^{(\mu)}(g)\right]^{*}_{pk} \left[D^{(\nu)}(g)\right]_{ql} = \frac{1}{n_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta_{pq} \delta_{kl}$$

<u>ortogonalitási reláció</u> $\left(\sim \sum_k e^{(l)}_k e^{(m)}_k \quad \vec{e}^{(l)} \vec{e}^{(m)} = \delta_{lm}\right)$

(komplex sk. szorzás

$$\langle a | b \rangle = \sum a^{*}_k b_k \quad \langle a | a \rangle = \sum_k a^{*}_k a_k = \sum_k |a_k|^2 \geq 0$$

$$\langle a | b \rangle = \langle b | a \rangle^{*} \;)$$



egy másik ábr.

az egyes csoportelemek 1 ábrázolása

$\forall$ elemre $D(g)^{(\mu)}_{pk}$ és $D(g)^{(\nu)}_{ql}$ -ek

$$\begin{pmatrix} D^{\mu}(g_1)_{pk} \\ D^{\mu}(g_2)_{pk} \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D^{(\nu)}(g_1)_{ql} \\ D^{(\nu)}(g_2)_{ql} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

elemeket 1 vektorba teszem mindkét ábr.-~~ban~~ra

az így átírt ~~vektorok~~)

$\hookrightarrow$ a két vektort összeszorzom $\rightarrow$ ezeknek az ortogo~~n(látások)~~nalitásáról szól a fenti ~~tétel~~

(ha ~~ugyanaz~~ azonos dim-júak, és ugyanott szúrom át ~~őket~~, akkor nem 0 a szorzat)

DE:

n_μ^2, n_χ^2 vektort kaphatok így a két ábr.-ra
↓ → másikat átszúr.
egyiket átszúrogatva

DE $\sum_\mu n_\mu^2 \leq N$
↑ ↓
összes ábr.-ra N dim. térben (csoportelem. száma)
legfeljebb ennyi merőleges vektor lehet

Burnside-tétel: (nem biz.)

$$\boxed{\sum_\mu n_\mu^2 = N} \quad !!$$

~~Vegyük az~~

~~DE hány db ábr. van? (Ahány féle)~~
Karakterek
2) $G \ni g \mapsto \underline{\underline{D}}(g) \to \chi(g) = \mathrm{Sp}\, D(g)$
leképezés a csoportról a komplex számokra

↳ Ez egy csoporton ért. fv.: adott ábr.-ra adott csoportelemhez egy számot rendel

= csoporton ért. fv-ek N dim. bázist alkotnak
∄
~~(különb. ábr.-ra)~~ (egy ábr. esetén ∀ csoportelemhez rendel vmit)

dtb.-ban

$D^{(\mu)}(g)_{pk} \quad \Phi \ni f: G \to \mathbb{C}$

$g \to f(g)$

$$\boxed{\langle f | h \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} f^*(g)\, h(g)}$$

fv-ek skaláris szorzatát így dtb.

$$\boxed{\langle D^{(\mu)}_{pk} | D^{(\nu)}_{ql} \rangle_\Phi = \frac{1}{n_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta_{pq} \delta_{kl}}$$ előző tétel új jelöléssel

ha D° irrep ~~$\chi_L(g) = \chi(g)$~~

$$\boxed{\mathrm{Sp}\, D^{(\mu)}(g) = \chi^{(\mu)}(g)}$$ új jelölés

ebből $\sum_k \sum_l$ után spec.-an az átlóbeli elemekre

$$\langle \sum_k D^{(\mu)}_{kk} | \sum_l D^{(\nu)}_{ll} \rangle_\Phi = \frac{1}{n_\mu} \sum_k \sum_l \delta_{\mu\nu} \delta_{kl} \delta_{kl} = \frac{1}{\cancel{n_\mu}} \delta_{\mu\nu} \underbrace{\cancel{\sum_k \sum_l \delta_{kl} \delta_{kl}}}$$

$n_\mu = \sum_k \delta_{kk}$

a két ú.-elemezett skaláris szorzás

$$\boxed{\langle \chi^{(\mu)}(g) | \chi^{(\nu)}(g) \rangle_\Phi = \delta_{\mu\nu}} \qquad = \delta_{\mu\nu}$$

! az irred. ábrázolások karakterei:

ortonormáltak → ha 2 ábr. ekvivalens → $\mu = \nu$ → ilyenkor a karakterek "skaláris" szorzata 1.

↘ ha —"— nem ekvivalens → $\mu \neq \nu$ → —"— 0.

(akár azonos, akár kül. a dim. szám)

- $G \ni g \to D(g)$ $\qquad D' \sim D$

$$D'(g) = F \cdot D(g) F^{-1}$$

$$\chi'(g) = \mathrm{Sp}\, D'(g) = \mathrm{Sp}\left(F D(g) F^{-1}\right) = \mathrm{Sp}\left(\underbrace{F^{-1} F}_{I} D(g)\right) = \mathrm{Sp}\, D(g) = \chi(g)$$

$\downarrow$

a karakterek bázisfüggetlenek

- $g \qquad g' = h g h^{-1}$

$\downarrow$

$$D(g) \qquad D(g') = D(h g h^{-1}) = D(h)\, D(g)\, D(h^{-1})$$

$$\chi(g') = \mathrm{Sp}\, D(g') = \mathrm{Sp}\left(D(h) D(g) D(h^{-1})\right) = \mathrm{Sp}\, \underbrace{D(h^{-1})\, D(h)}_{D(h^{-1}h) = D(e) = I} D(g) =$$

$$= \mathrm{Sp}\left(D(g)\right)$$

$\downarrow$

1 adott ábrázolásra

1 konjugált elemosztályon

belül a karakter ugyanannyi

(megint „összefon, ami összetartozik")

$\Downarrow$

$$g' = h g h^{-1}$$

$$g' \sim g$$

$\downarrow$

$$\chi(g') = \chi(g)$$

$\chi(C_\alpha) \to$ a kar. az elemo.-hoz tart.

jelölés: C: konjugált elemosztály $\to G = \bigcup_\alpha C_\alpha$

$(\mathfrak{G})$

Beláthatő, hogy:

konjugált elemosztályok száma = ired. karakterek száma
= ired. ábrázolások száma

Burnside-tétel:

Egy véges csop.-nak annyi irekv. ábrázolása van, ahány konj. elemosztálya; és az ábr.-ok dimenzióinak négyzet összege megegyezik az elemek számával $\left(\sum_\mu n_\mu^2 = N\right)$!

Pl.

Nem komm. csoport.

D_3 $N=6$ r (elemoszt. száma) $= 3$

$D_3 = \{e\} \cup \{r, r^2\} \cup \{t, tr, tr^2\}$

$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2 \Rightarrow$ 3 féle ábr. van 2db 1 és 1db 2 dimenziós

D_5 $\{e\}$ $\{r, r^4\}$ $\{r^2, r^3\}$ $\{tr, t, tr^2, tr^3, tr^4\}$

$10 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2$

$\downarrow$

2db ~~1db~~ 1D-s és 2db 2D-s ábr. van,

(de ezek nem ekvivalensek)

↳ 1 ábr. mindig van (ami 1D-s) → mindenhez az egységet (1) rendeli (trivi. ábr.)

Karaktertáblázat

G	
	…

az egyes konj. osztályok

pl.

D_3	1E	2R	3T
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	−1
$\chi^{(3)}$	2	−1	0

→ ez a trivi ábr.

↓ különböző ired. ábrázolások

$\chi^{(3)}$ a 2D-s (az egység spurja csak itt lehet 2)

$|C_\alpha| = s_\alpha$

D_5 1E 2R $2R^2$ 5T

$\chi(g)$

$\chi(C)$

} a sorok ortogonálisak a már def. $\langle \chi^{(\mu)}, \chi^{(\nu)} \rangle$-re

χ^μ

χ^ν

de itt adott konj. elemosztályon belül ugyanaz lesz a kar.

$$\langle \chi^\mu | \chi^\nu \rangle = \frac{1}{N} \sum_g \chi^{(\mu)}(g)^* \chi^{(\nu)}(g) =$$

a konjugált elemosztályokra összegzünk

az elemoszt.-ban levő elemek száma

$$= \frac{1}{N} \sum_\alpha s_\alpha \chi^{(\mu)}(C_\alpha)^* \chi^{(\nu)}(C_\alpha) = \delta_{\mu\nu}$$

Az oszlopok is ortogonálisak

$$\langle \chi^{(\mu)} | \chi^{(\nu)} \rangle = \frac{1}{N} \sum_\alpha s_\alpha \chi^{(\mu)}(C_\alpha)^* \chi^{(\nu)}(C_\alpha) = \delta_{\mu\nu}$$

$$\sum_{\mu} \chi^{(\mu)}(C_\alpha)^* \chi^{(\mu)}(C_\beta) = \frac{N}{\nu_\alpha}\delta_{\alpha\beta}$$

1	1	1
1	1	−1
2	−1	0

oszlopok $1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) = 0$ ✓

1	2	3
1	1	1
1	1	−1
2	−1	0

sor

$1 \cdot 1\cdot 1 + 2 \cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 3 = 0$ ✓

az elemosztálybeli elemekre összegzünk

önmagával

pl. $\left(1 \cdot 1\cdot 1 + 2 \cdot 1\cdot 1 + 3\cdot(-1)(-1)\right)\cdot\frac{1}{6} = 1$ ✓

pl. ábrázolások

$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$r \to R \quad \begin{pmatrix} -1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

~~[illegible]~~

↳ 2 ábrázolás akkor és csak akkor ekvivalens, ha az összes karakterük megegyezik.

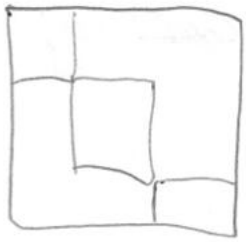
önmagával vett ekvivalens

– Egy ábrázolás irreducibilis, ha az önmagával szorzott karakter 1, és nem 1, ha reducibilis.

a karakterek összegzésének adott g-re

↳ ilyenkor több irred.-ből épül fel

Bizi: $D = \sum_{\mu \oplus} m_\mu D^{(\mu)}$ lineárkomb.

$D =$ 

$\chi(g) = \sum_{\mu} m_\mu \chi^{(\mu)}(g)$

az ábr.-ra összegzünk ↓ ilyenkor a kar. az egyes kar. lineárkomb.

$\vec{v} = \sum v_k \vec{e}^{k}$

$$\boxed{\langle \chi^\nu | \chi \rangle} = \sum_\mu m_\mu \underbrace{\langle \chi^\nu | \chi^\mu \rangle}_{\delta_{\mu\nu}} = m_\nu$$

↓

az adott ~~irredtip~~ irrep ehója a fenti D mátrixban

$$\langle \chi | \chi \rangle = \left\langle \sum m_\mu \chi^\mu \middle| \sum m_\nu \chi^\nu \right\rangle = \sum_\mu \sum_\nu m_\mu m_\nu \underbrace{\langle \chi^\mu | \chi^\nu \rangle}_{\delta_{\mu\nu}}$$

$$\Leftarrow \quad = \sum_\mu m_\mu^2$$

ez csak akkor lehet

1, ha $\mu = 1 \to m = 1$

↓

csak irrep.-nél 1 a karakter önmagával vett szorzata

! Kommutatív csoport irred. ábrázolásai 1D-ak

(mert N db elemosztály van → N db szám négyzetösszege csak úgy lehet N, ha mindegyik 1)

↓
mindegyik csak egy szám

<u>Ábr. alaptétele:</u>

Fizikai rendsz. szimm. ábrázolásainak

- eltolás → kommutatív → 1 szám (repr.)
- forgatás (2D) → -||- → 1 szám ($e^{i\varphi}$)
- forgatás (3D) → nem komm. csoport !!

de kvaterniókkal leírhatók → kv. = szám

↳ kvaternió ≠ komplex ?

az eddigi tételek komplexekre vonatkoznak