Algebrai alapfogalmak a fizikában 1. – (CSOPORTELMÉLET)
vizsgazh 2014. 01. 08.

1.évf. Bsc fizikusoknak és egyéb érdeklődőknek

Név	NEPTUN kód	email cím	min. elfogadott jegy

1./ Egy véges csoport egyik ábrázolásában az **x** és **y** generátorelemeket a következő **X** és **Y** mátrixok ábrázolják:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Keressük meg a csoport összes elemét és az őket ábrázoló mátrixokat! Írjuk fel a csoport szorzástáblázatát és karaktertábláját! Állapítsuk meg, hogy a megadott ábrázolásban melyik irreducibilis ábrázolás hányszor szerepel!

2./ Egy **G** véges csoport két generátoreleme ***a*** és ***b*** . Fennállnak a következô definiáló relációk:

(1) ***aba = b*** (2) ***bab = a***

a/ Vezessünk le további nemtriviális összefüggéseket a fentiekből! Tudunk-e valamilyen következtetést levonni az ***a*** és ***b*** elem rendjére vonatkozóan? Mutassuk meg, hogy minden elem felírható az $a^n b^m$ standard alakban!

b/ Hány eleme van a csoportnak? Melyek ezek (standard alakban)?

c/ Írjuk fel a csoport teljes szorzástábláját! Melyik elem hányad rendű?

d/ Keressük meg az összes részcsoportot, valamint a megfelelő jobb- és baloldali mellékosztályokat! Vannak-e normális részcsoportok? Ha vannak, mi a hozzájuk tartozó faktorcsoport?

e/ Rajzoljuk fel a csoport gráfját! (***a*** : piros vonal, ***b*** : fekete)

f/ Keressük meg a csoport centrumát (azon elemek halmaza, amelyek minden elemmel kommutálnak) !

g/ Keressük meg a konjugált elemosztályokat!

h/ A Burnside-tétel és a karaktertáblázatok szimmetriatulajdonságai alapján szerkesszük meg a csoport karaktertábláját! A karaktertáblázat alapján állítsuk elő közvetlenül az összes egydimenziós irreducibilis reprezentációt! (Extra segítség: jelen esetben a karaktertáblában csak valós egész számok szerepelnek :-)

i/ Közvetlen behelyettesítéssel lássuk be, hogy az alábbi (komplex!) **A** és **B** mátrixok kielégítik az (1) és (2) összefüggéseket (vagy más, ezekkel ekvivalens relációkat), tehát a **G** csoport egy 3x3-as ábrázolását generálják! Irreducibilis-e ez a reprezentáció? Ha igen, a karaktertábla melyik sorának felel meg (a sorokat te nevezted el!)? Ha nem, melyik irreducibilis ábrázolás hányszor szerepel benne?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3./ **(***) Csak ötösért!** Vegyük elő a füzetből a $\mathbf{D_3}$ csoport szorzástáblázatát! Egy csoport szorzótáblája segítségével a csoport egy nevezetes ábrázolásához juthatunk a következő módon: Válasszunk ki egy *g* csoportelemet! Keressük meg ezen elem előfordulásait a szorzástáblázatban! Írjunk fel egy *N* x *N*-es (*N* a csoport elemeinek száma) **M**(*g*) mátrixot, amely 1-est tartalmaz mindazon helyeken, ahol a szorzástáblázatban a *g* elemet találjuk, és 0-t az összes többi helyen. Végezzük el ezt a konstrukciót a csoport összes *g* elemére! Ezután keressük meg minden elem inverzét, és az előbb kapott táblázatokban cseréljük fel egy adott elemnek és inverzének megfelelő oszlopokat (az oszlopokat a szorzástáblázat fejléce indexeli)! Jelöljük az így kapott mátrixokat **R**(*g*)-vel, vagy konkrét csoport esetén az adott elem nevének megfelelő nagybetűvel!

Végezzük el a fenti konstrukciót a $\mathbf{D_3}$ csoport szorzástáblázatából kiindulva! Közvetlen behelyettesítéssel mutassuk meg, hogy az így kapott hat db 6x6-os mátrix a csoport ábrázolását alkotja (ez az ún. **reguláris ábrázolás**)! Számítsuk ki az ábrázolás karakterét, és a csoport karaktertáblája, valamint a csoporton értelmezett függvényekre bevezett skalárszorzás és az ismert ortogonalitási összefüggések segítségével határozzuk meg, hogy a reguláris ábrázolás melyik irreducibilis ábrázolást hányszor tartalmazza!

Mutassuk meg, hogy a fenti konstrukció tetszőleges véges csoport esetén elvezet egy (regulárisnak nevezett) ábrázoláshoz! (*Tanács*: írjuk fel a *h* csoportelemet ábrázoló **R**(*h*) mátrix g_1 és g_2 csoportelemhez tartozó mátrixelemét a Kronecker-delta segítségével!) Számítsuk ki az egyes irreducibilis ábrázolások előfordulási számát (m_k multiplicitását) a reguláris ábrázolásban! Igazoljuk a számolás alapján Burnside tételét!

Jó munkát, véges idő alatt konvergáló számításokat!