

CSOPORTELMÉLET 1. vizsgazh 2013. 01. 10.

(Algebrai alapfogalmak a fizikában 1.)

Név	NEPTUN-kód	email-cím	min elf. jegy

Munkaidő 4 óra. Használható: saját, kézzel írott órai jegyzet, kiadott sokszorosított anyag.

1. Egy G csoport két generátora a és b , definiáló relációi:

$$a^4 = e \quad ab = b^2 a \quad a^2 b = b a^2$$

Vizsgáljuk meg részletesen a G csoportot!

2. • Hány eleme van a csoportnak, és melyek ezek?
• Írjuk fel a szorzótábláját!
• Határozzuk meg, melyik elem hányadrendű!
3. Rajzoljuk le a csoport gráfját! (Piros vonal: a generátor, kék vonal: b generátor)!
4. • Határozzuk meg a csoport összes részcsoportját!
• Határozzuk meg az összes normális részcsoportját és a megfelelő faktorcsoportokat!
• Keressük meg a csoport centrumát (az összes elemmel kommutáló elemek halmazát)!
• Ábrázoljuk fagrafon a részcsoportok tartalmazási relációját!
5. Keressük meg a konjugált elemosztályokat!
6. Keressük meg a fenti G csoport irreducibilis ábrázolásait!
 - A Burnside-tétel, valamint az ortogonalitási és teljességi relációk alapján konstruáljuk meg a karaktertáblát! (Vigyázat! A karaktertáblában komplex számok is előfordulhatnak!)
 - **(Ötösért)** Próbáljunk meg példát mutatni a nem egydimenziós irreducibilis ábrázolás(ok)ban az a és b generátorokat ábrázoló mátrixokra! Ellenőrizzük a definiáló relációk fennállását!
7. A csoport egy ötdimenziós ábrázolásában az a és b elemeknek a következő A és B mátrixok felelnek meg:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Explicit behelyettesítéssel igazoljuk, hogy e mátrixok kielégítik a G csoport definiáló relációit! Hogyan bomlik fel ez az ábrázolás irreducibilis ábrázolások direkt összegére? Melyik irreducibilis ábrázolás hányszor szerepel a felbontásban? Ellenőrizzük az eredményt a karaktertábla segítségével!

8. **(Ötösért)** A csoport egy hétdimenziós ábrázolásában a triviális ábrázolás pontosan egyszer szerepel, az a^2 , a b és az $a^2 b$ elemeknek megfelelő mátrixoknak pedig ugyanaz a pozitív egész szám a spurja. Mennyi lehet az az a elemnek megfelelő mátrix spurja?