

CSOPORTELMÉLET 1. vizsgazh 2012. 01. 04.

(Algebrai alapfogalmak a fizikában 1.)

Név	EHA-kód	email-cím	min elf. jegy

Munkaidő 4 óra. Használható: saját, kézzel írott órai jegyzet, kiadott fénymásolt anyag.

1. Egy G csoport két generátora \mathbf{a} és \mathbf{b} , definiáló relációi:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{a b a b}$$

Vizsgáljuk meg, hányadrendű lehet az \mathbf{a} és a \mathbf{b} elem!

2. Vizsgáljuk meg részletesen a most kapott G csoportot!

- Hány eleme van, és melyek ezek?
- Írjuk fel a szorzótábláját!
- Határozzuk meg, melyik elem hányadrendű!

3. Rajzoljuk le a csoport gráfját! (Piros vonal: \mathbf{a} generátor, kék vonal: \mathbf{b} generátor)!

4. • Határozzuk meg a csoport összes részcsoportját!
 • Határozzuk meg az összes normális részcsoportját és a megfelelő faktorcsoportokat!
 • Keressük meg a csoport centrumát (az összes elemmel kommutáló elemek halmazát)!
 • Ábrázoljuk fagráfon a részcsoportok tartalmazási relációját!

5. Keressük meg a konjugált elemosztályokat!

6. Vizsgáljuk meg a fenti G csoport ábrázolásait!

- A Burnside-tétel, valamint az ortogonalitási és teljességi relációk alapján konstruáljuk meg a karaktertáblát!
- Próbáljunk meg példát mutatni a nem egydimenziós irreducibilis ábrázolás(ok)ban az \mathbf{a} és \mathbf{b} generátorokat ábrázoló mátrixokra! Ellenőrizzük a definiáló relációk fennállását!

7. A csoport egy hatdimenziós ábrázolásában az \mathbf{a} és \mathbf{b} elemeknek a következő \mathbf{A} és \mathbf{B} mátrixok felelnek meg:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Explicit behelyettesítéssel igazoljuk, hogy e mátrixok kielégítik a G csoport definiáló relációit! Hogyan bomlik fel ez az ábrázolás irreducibilis ábrázolások direkt összegére? Melyik irreducibilis ábrázolás hányszor szerepel a felbontásban? Ellenőrizzük az eredményt a karaktertábla segítségével!