

# CSOPORTELMÉLET 1. VIZSGAZH

## (Algebrai alapfogalmak a fizikában 1.)

### 2011. 01. 07.

Név	EHA-kód	email-cím	min elf. jegy

**Munkaidő 4 óra. Használható: saját, kézzel írott órai jegyzet, kiadott fénymásolt anyag, zsebszámológép.**

1. Egy  $G_0$  csoport két generátora  $a$  és  $b$ , definiáló relációi:
 
$$a^4 = e \quad ab^2 = b^2a \quad ba^2 = a^2b \quad ab = b^3a^3$$
 Vizsgáljuk meg, hányadrendű lehet a  $b$  elem!
2. Vegyük hozzá a relációkhoz a következőt:  $b^4 = e$  !  
 Vizsgáljuk meg részletesen a most kapott  $G$  csoportot!
  - Hány eleme van, és melyek ezek?
  - Írjuk fel a szorzótábláját!
  - Határozzuk meg, melyik elem hányadrendű!
3. Rajzoljuk le a csoport gráfját! (Piros vonal:  $a$  generátor, kék vonal:  $b$  generátor)!
4.
  - Határozzuk meg a csoport összes részcsoportját!
  - Határozzuk meg az összes normális részcsoportját és a megfelelő faktorcsoportokat!
  - Keressük meg a csoport centrumát (az összes elemmel kommutáló elemek halmazát)!
  - Ábrázoljuk fagrafon a részcsoportok tartalmazási relációját!
5. Keressük meg a konjugált elemosztályokat!
6. Vizsgáljuk meg a fenti  $G$  csoport ábrázolásait!
  - A Burnside-tétel, valamint az ortogonalitási és teljességi relációk alapján konstruáljuk meg a karaktertáblát! Figyelem! Komplex számok is előfordulhatnak! (Segítség: ne feledjük, hogy az egydimenziós ábrázolások olyan közönséges – általában komplex – számokat jelentenek, amelyek egymással való szorzása mintegy "imitálja" a csoport – ismert – szorzástábláját. Speciálisan az egyes elemek rendje meghatározza, melyek lehetnek az őket ábrázoló számok.)
  - Próbáljunk meg példát mutatni a nem egydimenziós irreducibilis ábrázolás(ok)ban az  $a$  és  $b$  generátorokat ábrázoló mátrixokra! Ellenőrizzük a definiáló relációk fennállását!
7. A csoport egy hatdimenziós ábrázolásában az  $a$  és  $b$  elemeknek a következő  $A$  és  $B$  mátrixok felelnek meg (lásd a táblán – nem fért ki ide ☺):
 

Explicit behelyettesítéssel igazoljuk, hogy e mátrixok kielégítik a  $G$  csoport definiáló relációit! Hogyan bomlik fel ez az ábrázolás irreducibilis ábrázolások direkt összegére? Melyik irreducibilis ábrázolás hányszor szerepel a felbontásban? Ellenőrizzük az eredményt a karaktertábla segítségével!