Algebrai alapfogalmak a fizikában 1- (CSOPORTELMÉLET)
vizsgazh 2010. 01. 06.

1.évf. Bsc fizikusoknak és egyéb érdeklődőknek

Név	EHA kód	email cím	min. elfogadott jegy

1./ Egy véges csoport egyik ábrázolásában az **a** és **b** generátorelemeket a következő **A** és **B** mátrixok ábrázolják:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Keressük meg a csoport összes elemét és az őket ábrázoló mátrixokat! Írjuk fel a csoport szorzástáblázatát és karaktertábláját! Állapítsuk meg, hogy a megadott ábrázolásban melyik irreducibilis ábrázolás hányszor szerepel!

2./ Vegyük elő a füzetből a $\mathbf{D_3}$ csoport szorzástáblázatát! E táblázat segítségével a csoport egy nevezetes ábrázolásához juthatunk a következő módon: Válasszunk ki egy g csoportelemet! Keressük meg ezen elem előfordulásait a szorzástáblázatban! Írjunk fel egy NxN-es (N a csoport elemeinek száma) $\mathbf{M}(g)$ mátrixot, amely 1-est tartalmaz mindazon helyeken, ahol a szorzástáblázatban a g elemet találjuk, és 0-t az összes többi helyen. Végezzük el ezt a konstrukciót a csoport összes g elemére! Ezután keressük meg minden elem inverzét, és az előbb kapott táblázatokban cseréljük fel egy adott elemnek és inverzének megfelelő oszlopokat (az oszlopokat a szorzástáblázat fejléce indexeli)! Jelöljük az így kapott mátrixokat $\mathbf{R}(g)$-vel, vagy konkrét csoport esetén az adott elem nevének megfelelő nagybetűvel!

Végezzük el a fenti konstrukciót a $\mathbf{D_3}$ csoport szorzástáblázatából kiindulva! Közvetlen behelyettesítéssel mutassuk meg, hogy az így kapott hat db 6x6-os mátrix a csoport ábrázolását alkotja (ez az ún. **reguláris ábrázolás**)! Számítsuk ki az ábrázolás karakterét, és a csoport karaktertáblája, valamint a csoporton értelmezett függvényekre bevezett skalárszorzás és az ismert ortogonalitási összefüggések segítségével határozzuk meg, hogy a reguláris ábrázolás melyik irreducibilis ábrázolást hányszor tartalmazza!

(***) Csak ötösért! Mutassuk meg, hogy a fenti konstrukció tetszőleges véges csoport esetén elvezet egy (regulárisnak nevezett) ábrázoláshoz! (*Tanács*: írjuk fel a h csoportelemet ábrázoló $\mathbf{R}(h)$ mátrix g_1 és g_2 csoportelemhez tartozó mátrixelemét a Kronecker-delta segítségével!) Számítsuk ki az egyes irreducibilis ábrázolások előfordulási számát ($\boldsymbol{m_k}$ multiplicitását) a reguláris ábrázolásban! Igazoljuk a számolás alapján Burnside tételét!

3./ Egy **G** véges csoport két generátoreleme $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$. Fennállnak a következô definiáló relációk:

$$(1) \quad \boldsymbol{xyx = y} \qquad\qquad (2) \quad \boldsymbol{yxy = x}$$

a/ Vezessünk le további nemtriviális összefüggéseket a fentiekből! Tudunk-e valamilyen következtetést levonni az $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ elem rendjére vonatkozóan? Mutassuk meg, hogy minden elem felírható az $\boldsymbol{x^n y^m}$ standard alakban!

b/ Hány eleme van a csoportnak? Melyek ezek (standard alakban)?

c/ Írjuk fel a csoport teljes szorzástábláját! Melyik elem hányad rendű?

d/ Keressük meg az összes részcsoportot, valamint a megfelelő jobb- és baloldali mellékosztályokat! Vannak-e normális részcsoportok? Ha vannak, mi a hozzájuk tartozó faktorcsoport?

e/ Rajzoljuk fel a csoport gráfját! ($\boldsymbol{x}$: piros vonal, $\boldsymbol{y}$: fekete)

f/ Keressük meg a csoport centrumát (azon elemek halmaza, amelyek minden elemmel kommutálnak) !

g/ Keressük meg a konjugált elemosztályokat!

h/ A Burnside-tétel és a karaktertáblázatok szimmetriatulajdonságai alapján szerkesszük meg a csoport karaktertábláját! A karaktertáblázat alapján állítsuk elő közvetlenül az összes egydimenziós irreducibilis reprezentációt! (Extra segítség: jelen esetben a karaktertáblában csak valós egész számok szerepelnek :-)

i/ Közvetlen behelyettesítéssel lássuk be, hogy az alábbi (komplex!) **X** és **Y** mátrixok kielégítik az (1) és (2) összefüggéseket (vagy más, ezekkel ekvivalens relációkat), tehát a **G** csoport egy 3x3-as ábrázolását generálják! Irreducibilis-e ez a reprezentáció? Ha igen, a karaktertábla melyik sorának felel meg (a sorokat te nevezted el!)? Ha nem, melyik irreducibilis ábrázolás hányszor szerepel benne?

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jó munkát, véges idő alatt konvergáló számításokat!