

# CSOPORTELMÉLET vizsgah 2008. 12. 17.

1.évf. Bsc fizikusoknak és egyéb érdeklődőknek

Név	EHA kód	email cím	min. elfogadott jegy

Egy  $G$  véges csoport két generátoreleme  $a$  és  $b$ . Fennállnak a következő definiáló relációk:

$$(1) \quad \mathbf{aba = b}$$

$$(2) \quad \mathbf{bab = a}$$

1./ Vezessünk le további nemtriviális összefüggéseket a fentiekből! Tudunk-e valamilyen következtetést levonni az  $a$  és  $b$  elem rendjére vonatkozóan? Mutassuk meg, hogy minden elem felírható az  $a^n b^m$  standard alakban!

2./ Vegyük hozzá az (1) és (2) relációkhoz a következőt is:

$$(3) \quad \mathbf{baba^2bab = e}$$

Hány eleme van a csoportnak? Melyek ezek (standard alakban)?

3./ Írjuk fel a csoport teljes szorzástábláját! Melyik elem hányad rendű?

4./ Keressük meg az összes részcsoportot, valamint a megfelelő jobb- és baloldali mellékosztályokat! Vannak-e normális részcsoportok? Ha vannak, mi a hozzájuk tartozó faktorcsoport?

5./ Rajzoljuk fel a csoport gráfját! ( $a$  : piros vonal,  $b$  : fekete)

6./ Keressük meg a csoport centrumát (azon elemek halmaza, amelyek minden elemmel kommutálnak)!

7./ Keressük meg a konjugált elemosztályokat!

8./ A Burnside-tétel és a karaktertáblázatok szimmetriatulajdonságai alapján szerkesszük meg a csoport karaktertábláját! A karaktertáblázat alapján állítsuk elő közvetlenül az összes egydimenziós irreducibilis reprezentációt! (Extra segítség: jelen esetben a karaktertáblában csak valós egész számok szerepelnek :-)

9./ Közvetlen behelyettesítéssel lássuk be, hogy az alábbi (komplex!)  $A$  és  $B$  mátrixok kielégítik az (1), (2) és (3) összefüggéseket (vagy más, ezekkel ekvivalens relációkat), tehát a  $G$  csoport egy  $5 \times 5$ -ös ábrázolását generálják! Irreducibilis-e ez a reprezentáció? Ha igen, a karaktertábla melyik sorának felel meg (a sorokat te nevezted el!)? Ha nem, melyik irreducibilis ábrázolás hányszor szerepel benne?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

10./ A csoport egy 8 dimenziós reducibilis ábrázolása nem tartalmazza a triviális ábrázolást. A  $b$  és  $ab$  elemeket ábrázoló mátrixok spurja  $-2$ , az  $a$  elemet ábrázoló mátrix spurja  $0$ . Mennyi a  $b^2$  elemet ábrázoló mátrix spurja?

Jó munkát, véges idő alatt konvergáló sorozatokat!