CSOPORTELMÉLET vizsgazh 2008. 01. 03.

1.évf. Bsc fizikusoknak és egyéb érdeklődőknek

Név	EHA kód	email cím	min. elfogadott jegy

Egy **G** véges csoport két generátoreleme ***a*** és ***b*** . Fennállnak a következô definiáló relációk:

(1) $a^4 = e$
(2) $a^3 b = b^2 a^3$

1./ Számítsuk ki az ***a*** elem maximális rendját, azaz azt az ***n*** számot, amelyre feltétlenül fennáll: $a^n = e$! Legfeljebb hány különböző eleme van a csoportnak? Mutassuk meg, hogy minden elem felírható az $a^n b^m$ standard alakban!

Útmutatás: a (2) reláció alapján sejtsük meg, majd indukcióval bizonyítsuk be, hogy $a^N b^K = ...$ (ahol ***N*** és ***K*** pozitív egész számok) !

2./ Vegyük hozzá az (1) és (2) relációkhoz a következőt is:

(3) $a^{137} = a^{-1}$

Hány eleme van a csoportnak? Melyek ezek (standard alakban)?

3./ Írjuk fel a csoport teljes szorzástábláját! Melyik elem hányad rendű?

4./ Keressük meg az összes részcsoportot, valamint a megfelelő jobb- és baloldali mellékosztályokat! Vannak-e normális részcsoportok? Ha vannak, mi a hozzájuk tartozó faktorcsoport?

5./ Rajzoljuk fel a csoport gráfját! (***a*** : piros vonal, ***b*** : fekete)

6./ Keressük meg a csoport centrumát (azon elemek halmaza, amelyek minden elemmel kommutálnak) !

7./ Keressük meg a konjugált elemosztályokat!

8./ A Burnside-tétel és a karaktertáblázatok szimmetriatulajdonságai alapján szerkesszük meg a csoport karaktertábláját! A karaktertáblázat alapján állítsuk elő közvetlenül az összes egydimenziós irreducibilis reprezentációt! (**Vigyázat!** Egy karaktertábla nem feltétlenül egész számokat tartalmaz, sôt komplex elemei is lehetnek! A szimmetriatulajdonságokban a komplex euklideszi térben értelmezett skalárszorzat szerepel. Extra segítség: jelen esetben a karaktertáblában csak [valós és komplex] egész számok szerepelnek :-)

9./ Közvetlen behelyettesítéssel lássuk be, hogy az alábbi (komplex!) ***A*** és ***B*** mátrixok kielégítik az (1), (2) és (3) összefüggéseket (vagy más, ezekkel ekvivalens relációkat), tehát a **G** csoport egy 5*5-ös ábrázolását generálják! Irreducibilis-e ez a reprezentáció? Ha igen, a karaktertábla melyik sorának felel meg (a sorokat te nevezted el!)? Ha nem, melyik irreducibilis ábrázolás hányszor szerepel benne?

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & \sqrt{6} \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 0 & 0 & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}$$

10./ A csoport egy 8 dimenziós reducibilis ábrázolásában az a, a^2, a^3 elemeket ábrázoló mátrixok spurja 0, a $b^2 a^2$ elemet ábrázoló mátrix spurja 3. Mennyi a b elemet ábrázoló mátrix spurja?

Jó munkát, véges idő alatt konvergáló sorozatokat!