CSOPORTELMÉLET vizsgazh 2007. 01. 05.

1. fizikusoknak

1. Egy **G** véges csoport két generátoreleme ***a*** és ***b*** . Fennállnak a következô definiáló relációk:

$$(1) \qquad b^4 = e$$
$$(2) \qquad ab = ba^2$$

a/ Bizonyítsuk be, hogy $a^{15} = e$! Legfeljebb hány különbözô eleme van a csoportnak? Mutassuk meg, hogy minden elem felírható az $a^n b^m$ standard alakban!

Útmutatás: a (2) reláció alapján sejtsük meg, majd indukcióval bizonyítsuk be, hogy $a^N b = ...$ (ahol N pozitív egész szám) !

b/ Vegyük hozzá az (1) és (2) relációkhoz a következôt is:

$$(3) \qquad a^3 = e$$

Hány eleme van a csoportnak? Melyek ezek (standard alakban)?

c/ Írjuk fel a csoport teljes szorzástábláját! Melyik elem hányad rendű?

d/ Keressük meg az összes részcsoportot, valamint a megfelelô jobb- és baloldali mellékosztályokat! Vannak-e normális részcsoportok? Mi a hozzájuk tartozó faktorcsoport?

e/ Rajzoljuk fel a csoport gráfját! (***a*** : piros vonal, ***b*** : fekete)

f/ Keressük meg a csoport centrumát (azon elemek halmaza, amelyek minden elemmel kommutálnak) !

g/ Keressük meg a konjugált elemosztályokat!

h/ A Burnside-tétel és a karaktertáblázatok szimmetriatulajdonságai alapján szerkesszük meg a csoport karaktertábláját! A karaktertáblázat alapján állítsuk elô közvetlenül az összes egydimenziós irreducibilis reprezentációt! (**Vigyázat!** Egy karaktertábla nem feltétlenül egész számokat tartalmaz, sôt komplex elemei is lehetnek! A szimmetriatulajdonságokban a komplex euklideszi térben értelmezett skalárszorzat szerepel.)

i/ Közvetlen behelyettesítéssel lássuk be, hogy az alábbi ***A*** és ***B*** mátrixok kielégítik az (1), (2) és (3) összefüggéseket, tehát a csoport egy 4*4-es ábrázolását generálják! Irreducibilis-e ez a reprezentáció? Ha igen, a karaktertábla melyik sorának felel meg? Ha nem, melyik irreducibilis ábrázolás hányszor szerepel benne?

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9-8\varepsilon & 0 & 0 & -12+12\varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6-6\varepsilon & 0 & 0 & -8+9\varepsilon \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 9i & 4i & 0 & -12i \\ -2i & 0 & 0 & 3i \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6i & 3i & 0 & -8i \end{pmatrix}$$

A képletben ε a komplex harmadik egységgyököt jelenti: $\varepsilon = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

2. Egy **másik** csoport generátorai ***u***, ***v*** és ***w***, **összes** definiáló relációja:

$$uvw = e$$

Rajzoljuk le a gráfját! Hány eleme van a csoportnak?

Jó munkát, konvergens sorozatokat!