

CSOPORTELMÉLET VIZSGAZH

2005. 01. 10.

1. Egy G_0 csoport két generátora a és b , definiáló relációi:

$$b^4 = e \quad \text{és} \quad b a = a^2 b$$

Határozzuk meg, hányadrendű lehet az a elem!

2. Vegyük hozzá a relációkhoz a következőt: $a^4 = e!$
Mit tudunk mondani a most kapott G_1 csoportról? Hány eleme van?
3. Vegyük hozzá az eredeti két relációhoz a következőt: $a^{16} = e!$
Mit tudunk mondani a most kapott G_2 csoportról? Hány eleme lehet?
4. Vegyük hozzá az eredeti két relációhoz a következőt: $a^6 = e!$
Vizsgáljuk meg részletesen a most kapott G csoportot!
- Hány eleme van, és melyek ezek?
 - Írjuk fel a szorzótábláját!
 - Határozzuk meg, melyik elem hányadrendű!
 - Határozzuk meg az összes részcsoportját!
 - Határozzuk meg az összes normális részcsoportját és a megfelelő faktorcsoportokat!
5. • Vizsgáljuk meg a fenti G csoport ábrázolásait! Először is keressük meg a konjugált elemosztályokat!
- Az ortogonalitási és teljességi relációk alapján konstruáljuk meg a karaktertáblát! Figyelem! Komplex számok is előfordulhatnak!
 - Próbáljunk meg példát mutatni a nem egydimenziós irreducibilis ábrázolás(ok)ban az a és b generátorokat ábrázoló mátrixokra! Ellenőrizzük a definiáló relációk fennállását!
 - Keressük meg a G csoportnak azt a legalacsonyabb dimenziós valós ábrázolását, amelyben az a elemet és tiszta hatványait, valamint a b elemet és tiszta hatványait ábrázoló mátrixok mind spurtalanok! Mennyi a $b^2 a$ elemet ábrázoló mátrix spurja?
 - A csoport egy ötdimenziós ábrázolásában az a és a b elemeknek a következő A és B mátrixok felelnek meg:

$$A = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & \sqrt{27} & 0 & 0 & \sqrt{12} \\ \sqrt{27} & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ -\sqrt{12} & -6 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 & \sqrt{12} \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & \sqrt{12} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Explicit behelyettesítéssel igazoljuk, hogy e mátrixok kielégítik a G csoport definiáló relációit! Hogy bomlik fel ez az ábrázolás irreducibilis ábrázolások direkt összegére?

6. Egy csoport összes definiáló relációja: $a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^2 = e$. Rajzoljuk le a gráfját! Hány eleme van a csoportnak?