

Algebrai alapfogalmak a fizikában (csoporthelmélet) I.

VIZSGAZH 2004. 01. 07.

Egy G véges csoport két generátora a és b , definiáló relációi:

$$a^4 = e \quad b^3 = e \quad \text{és} \quad b a b = a$$

Vizsgáljuk meg részletesen a G csoportot!

1. Hány eleme van, és melyek ezek?
2. Melyik elem hányad rendű?
3. Írjuk fel a csoport szorzástábláját!
4. Rajzoljuk fel a csoport gráfját!
5. Határozzuk meg a csoport összes részcsoportját!
6. Határozzuk meg az összes normális részcsoportot és a megfelelő faktorcsoportokat!
7. Határozzuk meg a konjugált elemosztályokat!
8. Az ortogonalitási és teljességi relációk, valamint a Burnside-tétel alapján konstruáljuk meg a karaktertáblát! (Segítség: csupán egész számokat tartalmaz.)
9. A csoport egy 9 dimenziós, a triviális irreducibilis ábrázolást nem tartalmazó reducibilis ábrázolásában a b^2 és az a^2b elemet ábrázoló mátrixok spurja 0 , az a^2 és az a^3 elemet ábrázoló mátrixoké -3 . Hogyan bomlik fel a vizsgált ábrázolás irreducibilis ábrázolások direkt összegére? Mennyi a ba elemet ábrázoló mátrix spurja?
10. (nehéz és nem kötelező) Konstruáljuk meg a fenti reducibilis ábrázolásban az a és b generátorokat ábrázoló mátrixokat! Ellenőrizzük a definiáló relációk fennállását!
11. A csoport egy 20 dimenziós ábrázolásában az a elemet, hatványait és szorzatait ábrázoló mátrixok spurja mind 0 . Mennyi a b elemet ábrázoló mátrix spurja ?

12. Egy **másik** csoport összes definiáló relációja:

$$u^2 = v^2 = w^2 = (uvw)^2 = e$$

Rajzoljuk le a gráfját! Hány eleme van a csoportnak?