

CSOPORTELMÉLET VIZSGAZH 2003. 01. 08.

1. Egy G_0 csoport két generátora a és b , definiáló relációi: $a^4 = e$ és $a b a^3 = b^2$
Határozzuk meg, hányadrendű lehet a b elem!
2. Vegyük hozzá a relációkhoz a következőt: $b^4 = e$!
Mit tudunk mondani a most kapott G_1 csoportról? Hány eleme van?
3. Vegyük hozzá az eredeti két relációhoz a következőt: $b^{10} = e$!
Mit tudunk mondani a most kapott G_2 csoportról? Hány eleme lehet?
4. Vegyük hozzá az eredeti két relációhoz a következőt: $b^6 = e$!
Vizsgáljuk meg részletesen a most kapott G csoportot!
 - Hány eleme van, és melyek ezek?
 - Írjuk fel a szorzótábláját!
 - Határozzuk meg, melyik elem hányadrendű!
 - Határozzuk meg az összes részcsoportját!
 - Határozzuk meg az összes normális részcsoportját és a megfelelő faktorcsoportokat!
5. Vizsgáljuk meg a fenti G csoport ábrázolásait! Először is keressük meg a konjugált elemosztályokat!
 - Az ortogonalitási és teljességi relációk alapján konstruáljuk meg a karaktertáblát! Figyelem! Komplex számok is előfordulhatnak!
 - Próbáljunk meg példát mutatni a nem egydimenziós irreducibilis ábrázolás(ok)ban az a és b generátorokat ábrázoló mátrixokra! Ellenőrizzük a definiáló relációk fennállását!
 - A csoport egy négydimenziós ábrázolásában az a és a b elemeknek a következő A és B mátrixok felelnek meg:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 & \sqrt{12} \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & \sqrt{12} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & \sqrt{27} & 0 & \sqrt{12} \\ \sqrt{27} & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ \sqrt{12} & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
 - Explicit behelyettesítéssel igazoljuk, hogy e mátrixok kielégítik a G csoport definiáló relációit! Hogy bomlik fel ez az ábrázolás irreducibilis ábrázolások direkt összegére?
 - Keressük meg a G csoportnak azt a legalacsonyabb dimenziós valós ábrázolását, amelyben az a elemet és hatványait, valamint a b elemet és hatványait ábrázoló mátrixok mind spurtalanok! Mennyi az $a^2 b$ elemet ábrázoló mátrix spurja?
6. Egy csoport összes definiáló relációja:

$$a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^2 = e$$
 Rajzoljuk le a gráfját! Hány eleme van a csoportnak?