

# Kvantumstatistikák

A TételWiki wikiből

## Tartalomjegyzék

- 1 Bevezetés, ideális gázok, Fermi- és Bose-eloszlás
  - 1.1 A Bose-Einstein-eloszlás
  - 1.2 A Fermi-Dirac-eloszlás
  - 1.3 Ideális gázok
  - 1.4 A klasszikus határeset
- 2 Bose-Einstein kondenzáció
- 3 Hőmérsékleti sugárzás, Stefan-Boltzmann törvény
- 4 Fononok, szilárdtestfizikai alkalmazások (diszperziós reláció)
- 5 Degenerált Fermi-gáz
- 6 Elektronfajhó, kvantumkorrekciók. {Bethe-Sommerfeld sorfejtés, Landau-paramágnesség}

## Bevezetés, ideális gázok, Fermi- és Bose-eloszlás

Egy sokrészecskés kvantummechanikai rendszert a hullámfüggvénye ír le, ami összes részecske összes koordinátájától, és egyéb, belső szabadsági fokot leíró változójától (pl.: spin) is függ. Egy fizikai mennyiség várható értéke az operátorával vett szendiccsel számítható ki:  $\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$ . Bármilyen hullámfüggvény kifejezhető például az időfüggetlen Schrödinger-egyenlet megoldásaival, amik a rendszer energiasajátállapotai. Véges méretű rendszernél ezekből általában megszámlálhatóan sok van, így a hullámfüggvény egy (véges vagy végtelen) összeggel adható meg:

$$\Psi = \sum_n c_n \Psi_n$$

Itt  $p_n \equiv |c_n|^2$  a valószínűsége annak, hogy a rendszeren mérést végezve azt az  $n$ -edik sajátállapotban találjuk. Így ha megadjuk a rendszer hullámfüggvényét egy pillanatban, akkor azzal megadtuk a rendszert leíró valószínűségeloszlást is. A rendszer entrópiája a klasszikus rendszerekhez hasonlóan

$$S = -k \sum_n p_n \ln p_n$$

A klasszikus rendszerekkel szemben, ahol a rendszer energiája egy tartományon belül folytonosan változhatott, itt az energia (és így a rendszert leíró többi mennyiség is) megszámlálhatóan sok diszkrét értéket vehet fel. Sokrészecskés rendszernél általában az energiasajátértékek degeneráltak, és nagyon sok van belőlük, így az összegzést gyakran integrállal lehet helyettesíteni.

A továbbiakban kölcsönhatás nélküli kvantumgázokkal foglalkozunk. Ekkor a részecskék közül mindegyikre ugyanaz az egyrészecskés Schrödinger-egyenlet vonatkozik, az ennek megoldásaként adódó egyrészecskés energiasajátállapotok minden részecskére ugyanazok, így (mivel a részecskék megkülönböztethetetlenek) a rendszer leírásához elég azt leírni, hogy melyik egyrészecské sajátállapotban hány részecske van. Fermionoknál ehhez hozzá kell tenni még azt a feltételt, hogy egy energiasajátállapotban legfeljebb egy részecske lehet, bozonoknál akármennyi. A kvantumgázoknál általában nagykanonikus sokaságban érdemes dolgozni, mert így az állapotösszeg és a belőle számítható mennyiségek kiszámításakor nem kell a részecskék számára vonatkozó mellékfeltételt figyelembe venni, ami egyszerűsíti a számításokat. Ekkor a részecskeszámot és a többi mennyiséget is a kémiai potenciál függvényében kell kiszámítani, az így kapott eredményekből a kémiai potenciál kiküszöbölésével lehet a gáz állapotegyenletét meghatározni, ez azonban analitikusan nem végezhető el.

## A Bose-Einstein-eloszlás

$n_l = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_l - \mu)} - 1}$  megadja az  $\varepsilon_l$  energiájú állapotban levő részecskék várható értékét. Ahhoz, hogy ez sehol se divergáljon és a részecskék száma pozitív legyen, az szükséges, hogy a kémiai potenciál kisebb legyen a legalacsonyabb energiaszintnél (így a nevezőben mindig egy pozitív szám lesz).

## A Fermi-Dirac-eloszlás

$n_l = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_l - \mu)} + 1}$  megadja az  $\varepsilon_l$  energiájú állapotban levő részecskék várható értékét. A Fermi-eloszlás értéke mindig egy 0 és 1 közötti szám.

## Ideális gázok

Egy  $L$  oldalú kockába zárt ideális gáznál az energisajátállapotok:  $\varepsilon(r_1, r_2, r_3) = \frac{\hbar^2}{4L^2 2m} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$  Itt a három  $r$  egész értékeket vehet fel. Az eloszlásfüggvények segítségével kiszámíthatjuk a részecskeszámot és az energiát.

$$N = \sum_l n_l$$

$$E = \sum_l \varepsilon_l n_l$$

A nyomás a nagykanonikus potenciálból származtatható:

$$pV = \pm kT \sum_l \ln(1 \pm e^{\beta(\mu - \varepsilon_l)})$$

A felső előjel vonatkozik a fermionokra, az alsó a bozonokra.

A fenti összegzések (azt feltételezve, hogy nagyon sok energiaszint van és ezek egymáshoz közel helyezkednek el) integrállal közelíthetőek, az eredmények:

$$N = (2s + 1) \frac{2V\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} \pm 1} d\varepsilon$$

$$E = (2s + 1) \frac{2V\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} \pm 1} d^3p$$

$$pV = \pm (2s + 1) \frac{2V\pi}{h^3} (2m)^{3/2} kT \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} \ln(1 \pm e^{\beta(\mu - \varepsilon)}) d\varepsilon$$

Itt  $s$  a részecskék spinje,  $V$  a gáz térfogata, és  $\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$  egy részecske energiája. A nyomás kifejezését parciálisan integrálva kapjuk, hogy:

$$pV = \frac{2}{3} E$$

## A klasszikus határeset

Mindkét eloszlásnak a klasszikus határeset a Boltzmann eloszlás. Ha a számlálóban levő exponenciális tag nagy, akkor mellette az 1 elhanyagolható, és pont a Boltzmann eloszlást kapjuk. (Természetesen ekkor mindegyik állapotban a részecskék számának várható értéke nagyon kicsi, majdnem 0.) Legyen az alapállapot energiája  $\varepsilon_0 = 0$  (az alapállapot energiát tetszőlegesen eltolhatjuk, mert nem mérhető), a részecskék energiája:  $\varepsilon \geq 0$ . Ekkor annak a feltétele, hogy az eloszlásban szereplő exponenciális értéke minden energiaszintre nagy legyen annak felel meg, hogy

$$e^{-\beta\mu} \gg 1 \text{ teljesüljön. Klasszikus ideális gázra: } e^{\beta\mu} = \frac{N}{V} \left( \frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2}$$

$$\text{Ezzel az előző feltétellel: } 1 \gg \frac{N}{V} \left( \frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2}$$

Azaz az előző feltétel annak felel meg, hogy elég magas legyen a hőmérséklet és elég kicsi legyen a gáz sűrűsége. Ugyanezt az eredményt kapjuk a határozatlansági reláció felhasználásával is. Klasszikus esetben  $\Delta x \Delta p \gg h$ , a koordináta és impulzusbizonytalanságokról pedig feltételezzük, hogy kisebbek, mint azok átlagos értékei:

$$\Delta x \ll R = \left( \frac{V}{N} \right)^{1/3} \quad \Delta p \ll p_T = \sqrt{2mkT}$$

Ezeket behelyettesítve a határozatlansági relációba és mindkét oldal harmadik hatványát véve pont az előbbi feltételt kapjuk.

## Bose-Einstein kondenzáció

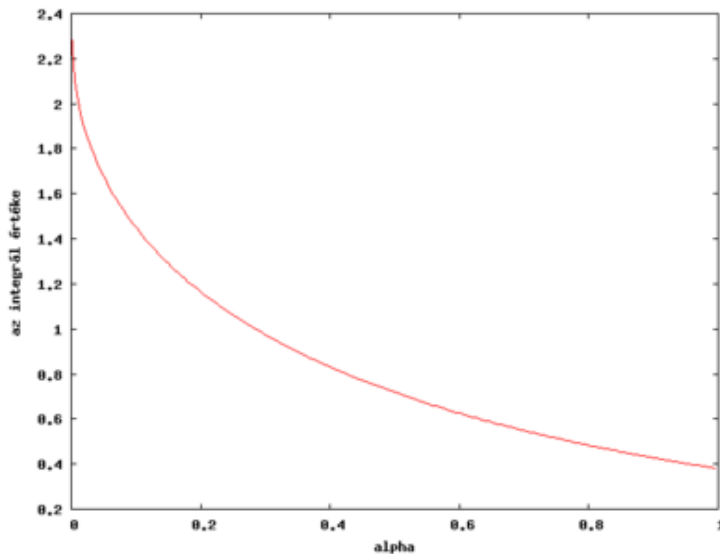
A Bose-kondenzáció lényege, hogy a hőmérsékletet csökkentve egy megmaradó számú részecskéből álló Bose-gázban makroszkópicusan sok részecske lesz a legalsó energiaszinten (mivel az egy energiaszinten levő részecskék számát semmi sem korlátozza), a  $T = 0$  hőmérsékletű határesetet véve az összes részecske a legalsó szinten lenne.

Legyen egy dobozba zárt ideális Bose-gázunk (ahol a részecskék száma megmarad), és kezdjük el hűteni. Mivel a részecskék száma megmarad, a sűrűségnek is állandónak kell lennie. A sűrűség:

$$\frac{N}{V} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)} - 1} = 2\pi \left( \frac{2mkT}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{e^{x+\alpha} - 1}$$

Itt felhasználtuk a  $x \equiv \frac{\beta p^2}{2m}$  és a  $\alpha \equiv -\beta\mu$  helyettesítéseket. Mivel itt a legalsó energiaszintet 0-nak vettük, így

$\alpha \geq 0$ . Az integrál szorzója egy véges szám, ami a hőmérsékletet csökkentve egyre csökken, így ahhoz, hogy a sűrűség állandó maradjon, az integrál értékének nőnie kell. Az integrál az  $\alpha = -\beta\mu$  paraméter függvénye, így az integrál növekedése a kémiai potenciál változtatásával érhető el. Megvizsgálva az integrál eredményéből adódó függvényt azt kapjuk, hogy az  $\alpha$ -nak a monoton csökkenő függvénye, és  $\alpha = 0$ -nál is véges értéket vesz fel.



Mivel az integrál előtti szorzó tetszőlegesen kis értéket felvehet a hőmérséklet csökkentve, ezért az integrál értékének növekedése ezt csak egy ideig tudja kompenzálni, egy kritikus hőmérséklet alatt (ahol  $\alpha$  eléri a 0-t) a részecskeszám elkezd csökkenni, és a hőmérséklettel 0-hoz tartva az integrállal számolt részecskeszám is 0-hoz tart, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy a rendszerben a részecskék száma megmarad.

Az ellentmondás abból fakad, hogy a részecskeszám integrállal kiszámítása csak egy közelítés, a valóságban diszkrét állapotok vannak, és ezekre összegzést kell végezni. A legalacsonyabb energiaszinten levő részecskék száma:

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1}$$

A fenti esetben  $\varepsilon_0 = 0$  és így az exponenciális függvény kitevőjében pont  $\alpha$  áll. Abban az esetben, ha  $\alpha$  0-hoz tart (azaz a kémiai potenciál tart a legalacsonyabb energiájú állapothoz),  $N_0$  értéke divergál, a legalacsonyabb állapotban levő részecskék száma akármilyen nagy lehet. Az első gerjesztett állapotban levő részecskék száma már véges, nagyságrendekkel kisebb lesz, így az a többi állapottal együtt integrállal kezelhető. Így a részecskeszám kiszámításához a kritikus hőmérséklet alatt a legalsó energiaszinten levő részecskék számát külön kell venni, a többi részecskét lehet integrállal számolni ( $\alpha = 0$ -val számolva). A részecskék száma a kritikus hőmérsékleten:

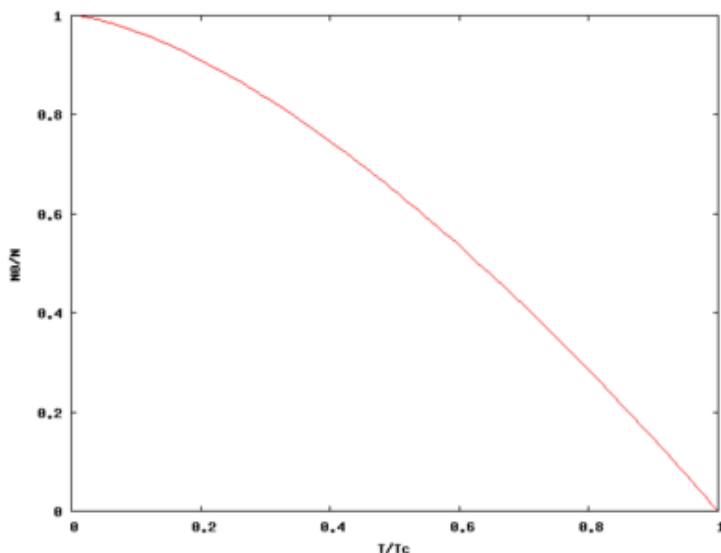
$$N = 2\pi V \left( \frac{2mkT_C}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1}$$

A kritikus hőmérséklet alatt:

$$N = N_0 + 2\pi V \left( \frac{2mkT}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1}$$

Itt  $N_0$  adja a legalsó szinten levő részecskék számát, az integrálos tag pedig a magasabb energiaszinten levő részecskéket. Ha a gáz hűtése közben a részecskék száma megmarad, akkor a két részecskeszám megegyezik és ebből  $N_0$  kifejezhető:

$$N_0 = N \left( 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \right)$$



A természetben ritka alkáli gőzökben ( $^{23}\text{Na}$  és  $^{87}\text{Rb}$ ) figyeltek meg Bose-kondenzációt, pár  $\mu\text{K}$  hőmérsékleten, mágneses csapdáknál lehűtve. Az elsőre szóba jövő jelölt  $^4\text{He}$ -nél azon a hőmérsékleten és sűrűsége, ahol Bose-kondenzációra lehetne számítani, már folyadék halmazállapotba kerül, ahol már nem elhanyagolható a részecskék közötti kölcsönhatás, a Bose-kondenzáció helyett a szuperfolyékonyság jelenik meg, ami szintén egy makroszkópikus kvantumeffektus.

## Hőmérsékleti sugárzás, Stefan-Boltzmann törvény

Vizsgáljuk meg egy (az egyszerűség kedvéért kocka alakú) kályhában kialakuló sugárzást! A kályha falait tökéletesen tükrözőnek (tökéletes vezető fémnek) feltételezve a Maxwell-egyenletek megoldásaként adódó állóhullámok felelnek meg a rendszer energiasajátállapotainak. A kályhában véges sok állóhullám módus alakulhat ki, egy módus frekvenciája:

$$\omega = \frac{\pi c}{L} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

Itt  $L$  a kocka élhossza,  $c$  a fénysebesség (a hullámok terjedési sebessége),  $n_1$ ,  $n_2$  és  $n_3$  egész számok. Klasszikusan egy módus energiája bármennyi lehetne. A kvantumos tárgyalásban viszont az  $\omega$  frekvenciájú módus energiája  $n\hbar\omega$ , ahol  $n$  egész szám. Így a rendszer 0 tömegű,  $\varepsilon = cp$  egyrészecske energiájú bozonokként kezelhető, melyekből egy módusban akárhány lehet. Ezeket a részecskéket nevezzük fotonoknak. A fotonokra nincsen részecskeszám megmaradást megkövetelő törvény, így a kémiai potenciáljuk 0, számukat csak a hőmérséklet határozza meg. A rendszer energiája:

$$E = V \int_0^\infty \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega d\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

Az integrálban az első tag az  $\omega$  és  $\omega + d\omega$  közötti módusok száma, a második tag az Bose-eloszlás az oszcillátor energiájával súlyozva. Az  $x \equiv \beta\hbar\omega$  helyettesítéssel az integrálból a hőmérséklet kiemelhető, és az integrál a hőmérséklettől függetlenül elvégezhető, az eredményül adódó energiasűrűség:

$$\frac{E}{V} = \frac{8\pi}{(hc)^3} (kT)^4 \frac{\pi^4}{15} = 7,56 \cdot 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{K}^4 \text{m}^3} \cdot T^4$$

Ez a Stefan-Boltzmann törvény. A fotongáz nyomása:

$$p = \frac{1}{3} \frac{E}{V}$$

Ez az  $\varepsilon = cp$  diszperziós reláció következménye, fermionokra is fennállna, a szabadenergia felírásával és parciális integrálással történő átalakításával könnyen belátható.

## Fononok, szilárdtestfizikai alkalmazások (diszperziós reláció)

Első közelítésben a szilárd testek rezgései is szabad Bose-gázként kezelhetők. Az atomok kis rezgéseinek sajátértékproblémáját (például az atomokat rugókkal összekötött golyóknak képzelve, és lineáris közelítéssel számolva) megoldva a foton problémához hasonlóan állóhullám módusokat kapunk, fontos különbség az, hogy itt a hullámhossz nem lehet a rácsállandónál kisebb, így véges sok módust kapunk (szemben azzal, hogy a hőmérsékleti sugárzás hullámhossza tetszőlegesen kicsi lehet). Feltételezve, hogy egy módus energiája  $n\hbar\omega$  lehet, ahol  $n$  egész szám, az atomok rezgéseit kvázirészecskékkel lehet helettesíteni, amiket fononoknak nevezünk. A számítás a fotonokéhoz hasonló, fontos különbség, hogy az állapotsűrűség kifejezése más (bonyolultabb) és az, hogy csak véges sok módust kell összeadni. 
$$E = \int_{\mathbf{k} \in \text{BZ}} \frac{g(\mathbf{k})\varepsilon(\mathbf{k})d^3\mathbf{k}}{e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k})} - 1}$$

A fenti integrálban a  $g(\mathbf{k})$  függvény az állapotsűrűség és  $\varepsilon(\mathbf{k})$  a módus energiája. Ezek általános esetben függhetnek a  $\mathbf{k}$  hullámszámvektor irányától is.

Egy szilárd testre az  $\varepsilon(\mathbf{k})$  diszperziós reláció általában valamilyen bonyolult függvény, de kis frekvenciákon általában lineáris közelítéssel lehet élni. Alacsony hőmérsékleten csak a kis energiájú módusok gerjesztődnek, így az egész spektrumot vehetjük jó közelítéssel lineárisnak, mert ahol ez már nem teljesülne, azok a módusok már nem (vagy elhanyagolhatóan keveset gerjesztődnek). A diszperziós relációnak általában több ága van, az origóból induló 3 akusztikus ág mellett létezik egy optikai ág is, amiben a 0 hullámszámhoz is véges frekvencia tartozik. A Bruillen-zóna szélénél az optikai és akusztikus ágak találkoznak. Az ehhez tartozó frekvenciára tehetünk egy becslést lineáris közelítésben,  $\omega = ck$  diszperziós relációt feltételezve. A kristályrác rácsállandója  $a \approx 10^{-10} \text{ m}$  nagyságrendű, a hangsebesség  $c \approx 10^3 \text{ m/s}$ , így a maximális frekvencia  $\omega_{\max} \approx c/a \approx 10^{13} \text{ s}^{-1}$ . Az ennek megfelelő hőmérséklet (a Debye-hőmérséklet):  $\hbar\omega_{\max} \equiv kT_D \rightarrow T_D \approx 100 \text{ K}$

A Debye-hőmérsékletnél jóval alacsonyabb hőmérsékleten úgy tehetünk, mintha az egész spektrum lineáris lenne, és a módusokat a véges  $\omega_{\max}$  helyett végtelenig számoljuk, mert az  $\omega_{\max}$  körüli módusok már nem tudnak gerjesztődni, így a számolás teljesen ugyanaz lesz, mint a hőmérsékleti sugárzásnál. Vegyük még figyelembe, hogy a hanghullámoknak két transzverzális és egy longitudinális módusa is lehetséges, amiknek a terjedési sebessége

általában különbözik, ennek a kezelésére vezessük be az effektív hangsebességet:  $\frac{3}{c^3} \equiv \frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_{tr}^3}$  Ezzel a képletek

a hőmérsékleti sugárzáshoz hasonlóak lesznek. Az energia és a fajhő: 
$$E = \frac{V\pi^2(kT)^4}{10(\hbar c)^3}$$

$$c_V = \frac{2\pi^2k^4V}{5(\hbar c)^3}T^3$$

A lineáris spektrumra jellemző, hogy a fajhő a hőmérséklet harmadik hatványától függ, szilárd testeknél alacsony hőmérsékleten a fajhő ezt a viselkedést mutatja. A fenti képletek csak alacsony ( $T \ll T_D$ ) hőmérsékleten érvényesek, amíg csak azok a módusok gerjesztődnek, ahol még érvényes az itt alkalmazott közelítés.

A Debye-hőmérsékletnél jóval magasabb hőmérsékleten már az összes módus gerjesztődik, viszont az összes módusra teljesül, hogy  $\varepsilon(\mathbf{k}) \ll kT$ , így a  $e^{\beta\varepsilon(\mathbf{k})} - 1 \approx \beta\varepsilon(\mathbf{k})$  közelítést alkalmazhatjuk, amivel az energia:

$$E = \int kTg(\mathbf{k})d^3\mathbf{k} = 3NkT$$

Felhasználtuk, hogy az állapotsűrűség integrálja az összes módus számát adja, így az adódott eredményül, hogy elég magas (sok anyagra már szobahőmérsékletnél) hőmérsékleten teljesül az ekvipartíció, minden módusra  $kT$  energia jut, a fajhő nem függ a hőmérséklettől.

A Debye hőmérséklet közelében is elvégezhetünk egy közelítést. Tegyük fel, hogy a spektrum a maximális hullámszámig lineáris, de nem a valódi maximális hullámszámot használjuk, hanem egy olyan effektív értéket, ami biztosítja, hogy a módusok száma megfeleljen a valóságnak:

$$\int_0^{k_{\max}} \frac{3Vk^2dk}{2\pi^2} \equiv 3N$$

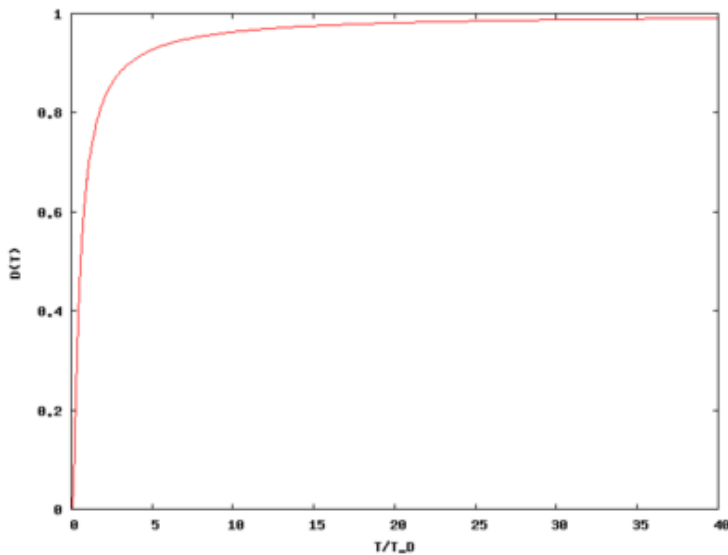
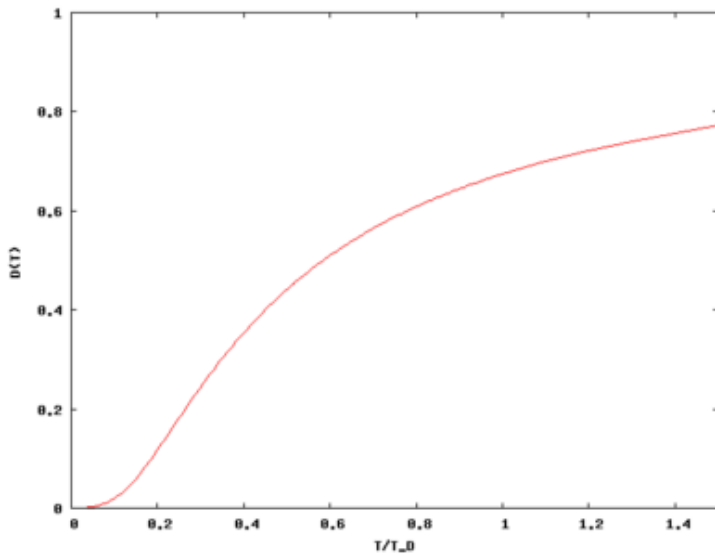
Ezzel felírva az energia:

$$E = 3NkTD \left( \frac{T_D}{T} \right)$$

Ebben a magas hőmérsékleten számolt eredmény a Debye-függvénnyel van megszorozva:

$$D(x) \equiv \frac{3}{x} \int_0^x \frac{z^3 dz}{e^z - 1}$$

A Debye-függvény alacsony hőmérsékleten a hőmérséklet köbével arányosan indul, magas hőmérsékleten viszont 1-hez tart, ez megfelel a korábban számolt két határesetnek.



## Degenerált Fermi-gáz

A  $T \rightarrow 0$  határesetet véve a Fermi-eloszlásfüggvény lépcsőfüggvénybe megy át: a kémiai potenciál alatti állapotok be vannak töltve, a felette levőkben nincs részecske. Így 0 hőmérsékleten az integrálok könnyen elvégezhetőek, ez az alacsony hőmérsékletű Fermi-gázokra jó közelítés lehet. A kémiai potenciált 0 hőmérsékleten Fermi-energiának is nevezik:  $\varepsilon_F \equiv \mu$ . A részecskeszám számítása:

$$N = (2s + 1) \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^{\varepsilon_F} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = (2s + 1) \frac{4\pi V (2m)^{3/2}}{3h^3} \varepsilon_F^{3/2}$$

Az energia hasonlóan számolható, az eredmény:

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{5} \varepsilon_F$$

Annak a feltétele, hogy ez a közelítés jó legyen felírható úgy is, hogy a hőmérséklet jóval kisebb legyen a Fermi-energiának megfelelő Fermi-hőmérsékletnél:  $kT \ll \varepsilon_F$ . Fémek vezetési elektronjaira a Fermi-hőmérséklet  $T_F \approx 10^5 \text{K}$ , így ott ez egy elég jó közelítés.

## Elektronfajhő, kvantumkorrekciók. {Bethe-Sommerfeld sorfejtés, Landau-paramágnesség}

Alacsony hőmérsékletű rendszereknél alkalmazható módszer a Bethe-Sommerfeld sorfejtés, aminek a lényege az, hogy a Fermi-eloszlást tartalmazó integrált  $T = 0$  körül sorbafejtjük. Legyen a kiszámítandó integrál:

$$I = \int_0^\infty g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon$$

A fenti képletben  $f(\varepsilon)$  a Fermi-eloszlás és legyen  $g = G'$  (azaz a  $g$  függvény integrálja ismert, ami a 0 hőmérsékletű határesetnek felel meg. Ekkor parciálisan integrálva, majd a  $G$  függvény a kémiai potenciál körül sorbafejtve a következőt kapjuk:

$$I = - \int_0^\infty G(\varepsilon) f'(\varepsilon) d\varepsilon = G(\mu) - \sum_{k=1}^{\infty} G^{(k)}(\mu) \int_0^\infty (\varepsilon - \mu)^k f'(\varepsilon) d\varepsilon$$

Az első tag a 0 hőmérsékletű határeset, az összegzésben a páratlan tagok 0-t adnak a páros tagokban az integrál elvégezhető, az eredmény:

$$I = G(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} G^{(2k)}(\mu) (kT)^{2k} (2 - 2^{-2k}) \zeta(2k) \approx G(\mu) + (kT)^2 \frac{\pi^2}{6} G''(\mu)$$

Sokszor elég csak a legelső tagot megtartani, az eredeti jelölésekkel:

$$\int_0^\infty \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \approx \int_0^\mu g(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 g'(\mu)$$

Ezzel például meghatározhatjuk a fémek fajhőjéhez az elektronok által adott járulékát (az elektronokat szabad Fermi-gáznak tekintve). A fémeknél a szobahőmérséklet nagyon kicsi a Fermi-hőmérséklethez képest, így elég csak az első tagot megtartani. Az a hőmérséklet négyzetétől függ, így a belőle számolt fajhőjárulék lineáris lesz. A pontos eredmény:

$$c_V = \frac{\pi^2 kT}{2 \varepsilon_F} Nk$$

Ez (mivel  $kT/\varepsilon_F \approx 3 \cdot 10^{-3}$ ) szobahőmérsékleten a fononok fajhőjéhez képest elhanyagolhatóan kicsi, viszont a hőmérséklet függvényében változik (a fononokból származó fajhő itt már konstans), ezért ki lehet mérni. Alacsony hőmérsékleten viszont a köbösen induló fononfajhőhöz képest ez adja a nagyobb járulékot.

### Záróvizsga tematika

A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai  
| Egzaktul megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenológikus termodinamika | Elektro- és magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és

#### Tételek



hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszervezet | A magfizika alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | **Kvantumstatistikák** | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok | Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

A lap eredeti címe: „<http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php/Kvantumstatistik%C3%A1k>”

---

- A lap utolsó módosítása: 2009. augusztus 19., 20:57