

Folytonos közegek mechanikája

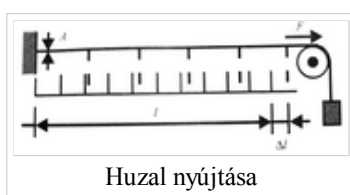
A TételWiki wikiből

Tartalomjegyzék

- 1 Rugalmas és képlékeny alakváltozások
 - 1.1 Nyújtás
 - 1.2 Térfogati összenyomás
 - 1.3 Nyírás
 - 1.4 Csavarás
 - 1.5 Hajlítás
- 2 Feszültség- és deformációs tenzor
 - 2.1 Feszültség tenzor felírása
 - 2.2 Deformációs tenzor felírása
 - 2.3 Általános Hooke-féle törvény
 - 2.4 A kompresszibilitás és a hangsebesség
- 3 Hullámterjedés deformálható testekben, Doppler-effektus. [2]
 - 3.1 Transzverzális hullámok terjedési sebessége:
 - 3.2 Hullámfüggvény
 - 3.3 Hullám-tulajdonságok
 - 3.4 Doppler-effektus
- 4 Folyadékok tulajdonságai
 - 4.1 Hidrosztatika
 - 4.2 Felhajtóerő
 - 4.3 A testek úszása és annak stabilitása
 - 4.4 Felületi feszültség
 - 4.5 Torricelli-kísérlet
- 5 Áramlások
 - 5.1 Lagrange-féle leírás
 - 5.2 Euler-féle leírás
 - 5.3 Tökéletes folyadék áramlása
 - 5.4 A Bernoulli-egyenlet
 - 5.5 Viskózus folyadék áramlása
 - 5.6 Turbulencia
 - 5.7 Áramlások hasonlósága
 - 5.8 Örvények
 - 5.9 A Navier-Stokes-egyenlet(*)

Rugalmas és képlékeny alakváltozások

Nyújtás



Ha egy homogén, A keresztmetszetű, l hosszúságú huzalt terhelünk megfelelően (nem túl) kicsi F erővel, akkor a megnyúlásra a következő arányosság (illetve egyenlőség) fog teljesülni:

$$\Delta l \sim \frac{Fl}{A} \implies \Delta l = \frac{1}{E} \frac{Fl}{A},$$

ahol E a Young-modulus [nyomás dimenziójú]. Ez utóbbi nem más, mint a nyúlásra vonatkozó *Hooke-törvény*.

Bevezetve a relatív hosszváltozást $\left(\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}\right)$ és a (mechanikai) feszültséget $\left(\sigma = \frac{F}{A}\right)$, a Hooke-törvény a következőképp alakul:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Ez az összefüggés már lokális törvény (tetszőleges keresztmetszetre igaz). Mivel ε teljes hosszon egyenletes, ezért homogén deformációról beszélünk. Ellenkező esetben inhomogén deformációról van szó (pl.: saját súlyával terhelt rúd megnyúlása).

Munka és energiasűrűség nyújtás közben:

Ha Δl -lel megnyújtunk egy l hosszúságú rudat, akkor nyújtás közben x megnyújtásnál $F(x) = \frac{EA}{l}x$ erő ébred a rúdban. Így a lineárisan növekvő erő összes munkája (összevetve a rugóerővel):

$$E_r = W = \int_0^{\Delta l} F(x)dx = \frac{EA}{l} \int_0^{\Delta l} xdx = D \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\Delta l} = \frac{1}{2} D (\Delta l)^2,$$

ahol D a húzal direkciós állandója. Mivel homogén deformációról van szó, ezért alkalmazhatjuk a következő felírást az **energia sűrűsége**:

$$u = \frac{E_r}{V} = \frac{\frac{1}{2} \frac{EA}{l} (\Delta l)^2}{Al} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

Nyújtást kísérő harántösszehúzódás:

Kísérletek alapján nyújtás során a harántmérték relatív változása $\left(\frac{\Delta d}{d}\right)$ egyenesen arányos a hossz méret relatív változásával $\left(\frac{\Delta l}{l}\right)$:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l} \text{ és } \mu \geq 0,$$

ahol μ a **Poisson-szám**. Tehát nyújtáskor harántösszehúzódás, összenyomáskor haránt irányú méretnövekedés lesz. Ennek következtében a rúd térfogata megváltozhat. Tapasztalat szerint az anyagok térfogata nyújtáskor általában nem csökken, tehát

$$0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$$

Speciális anyagú testek térfogata nőhet is, ekkor a Poisson-szám negatív.

Térfogati összenyomás

A test felületén egységesen eloszló térfogati összenyomást úgy valósíthatunk meg, ha például folyadékba tesszük, és úgy fejtünk ki a rendszerre nyomást:

Tapasztalat szerint a térfogat csökkenés arányos a test térfogatával és a testre gyakorolt nyomással/nyomás változással:

$$\Delta V = -\kappa V p = -\kappa V \Delta p$$

ahonnan:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\Delta V}{\Delta p} \right)$$

az anyag kompresszibilitása. Ez utóbbi megadja, mekkora a relatív térfogat csökkenés egységyi nyomásnövekedés hatására. Ez összefüggésben van a fentebb bevezetett Young és Poisson számokkal:

$$\kappa = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

Nyírás

Ha egy rugalmas hasábra lapjával párhuzamosan erőt fejtünk ki, akkor a hasáb egy bizonyos γ szöggel fog deformálódni. Ez a nyírás, és a szög (tapasztalatok szerint) megfelelően kis erő esetén arányos az erővel és fordítottan arányos a lap területével. Továbbá függ az anyagi minőségtől:

$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{A}$, ahol G az anyagi minőségtől függő nyírási modulus. Ha ez nagy érték, akkor az anyag erősen ellenálló a nyíró erőknek.

Mindent úgy értelmezhetjük, hogy külső F erő hatására az erővel párhuzamos rétegek elcsúsznak egymáson, így ennek megfelelően visszahúzó τ nyírófeszültség ébred. Az ebből származó erő kiegyenlíti a külső erőt:

$$\tau A = F, \text{ azaz } \tau = G\gamma.$$

γ -t kifejezve a Hooke-törvénnyel analóg kifejezést kapunk. Mindkét egyenletnek a lényege, hogy a deformáció arányos a feszültséggel. A nyújtáshoz hasonlóan itt is bevezethető (és hasonlóan számolható is) a munka (W) valamint az energiasűrűség (u).

Csavarás

Az ábrákon látható módon deformáljuk a hengert, és a megértés érdekében felbontjuk koncentrikus hengerekre/csövekre (2. ábra).

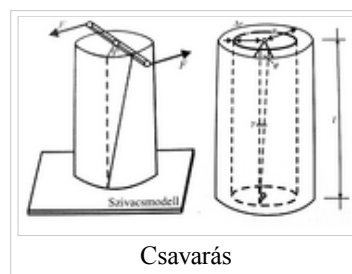
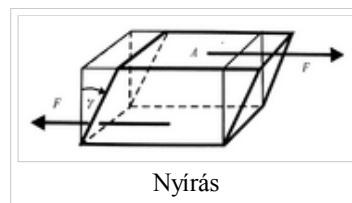
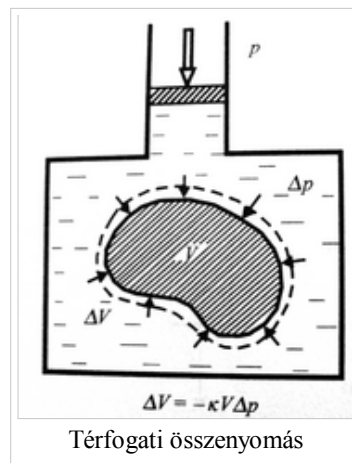
Az r és $r + \Delta r$ falvastagságú hengerek a csavarás során nyíródnak egymáson. (Tehát az eredetileg hasáb formájú palást paralelepipedonná torzul.) Így a deformációt leíró két szög között az összefüggés:

$$r\varphi = l\gamma$$

Tehát γ és így vele a deformáció mértéke is r -rel arányos. A fentiekből:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{1}{G} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{1}{G} \frac{\Delta F}{2\pi r \Delta r} \frac{r}{r} = \frac{1}{G} \frac{\Delta M}{2\pi r^2 \Delta r}, \text{ ahol } \Delta M \text{ az erőnyomaték.}$$

A nyomatékok kiszámítva (integrálva) a teljes hengerre, megadható az elcsavarodás szöge (φ), amiből azt kapjuk, hogy az elfordulás szöge egyenesen arányos a szabad végen ható forgatónyomatékkal és fordítottan arányos a sugár negyedik hatványával. Ez utóbbi tulajdonság miatt széleskörben alkalmaznak torziós mérlegeket.

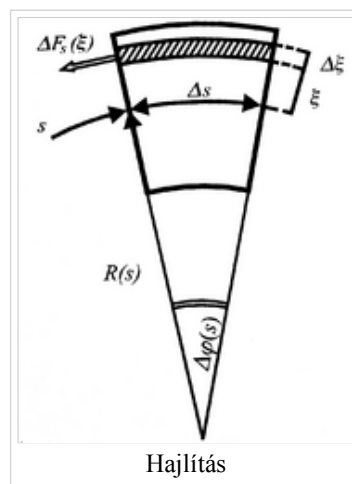
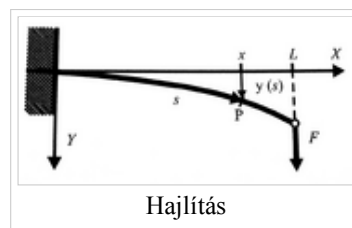
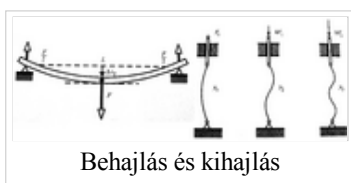


Hajlítás

Rugalmas rúd hajlítása esetén a keresztmetszeti lapok mozdulnak el egymáshoz képest. Az egyes rúddarabok úgy deformálódnak, hogy egy réteg felett nyúlik, alatta pedig összenyomódik az anyag (ezek mértéke függ a köztes résztől való távolságtól). A köztes részt, melynek hossza nem változik, neutrális zónának nevezzük. Egyik jól használható példa, ha egy oldalan rögzített rúdnak a másik végére F erőt fejtünk ki, lásd az ábrát.

Továbbá eltekintünk a rúd hossz tengelyére merőleges síkkeresztmetszetének torzulásától. Így feltételezhetjük, hogy mindig érvényes a Hooke-törvény (Ekkor a neutrális réteg egy neutrális görbe lesz csupán).

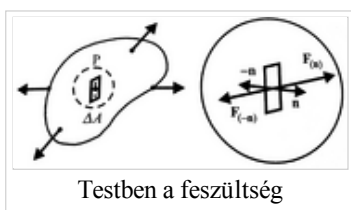
Mindezek alapján megadható mekkora erő ébred az egyes tartományokban, mekkora a Young-modulus, mekkora a belső feszültségek eredő forgatónyomatéka stb. További tipikus hajlítási módszerek:



Feszültség- és deformációs tenzor

Feszültség tenzor felírása

A pontos vizsgálat céljából vegyünk egy ΔA nagyságú felületelemet a testben, ami tartalmazza a P pontot. \mathbf{n} a felületre merőleges normálvektorunk.



Ha szétvágjuk a testet ΔA mentén, akkor ahhoz hogy újra összeillesszük, egy ugyanakkora, ellentétes irányú erőre lesz szükségünk. Tehát

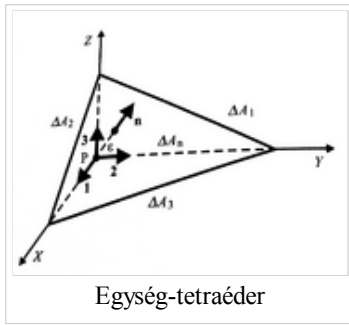
$$\mathbf{F}_{(\mathbf{n})} + \mathbf{F}_{(-\mathbf{n})} = 0$$

Bevezetve a feszültségvektort: $\sigma_{(\mathbf{n})} = \frac{\mathbf{F}_{(\mathbf{n})}}{\Delta A} \implies \sigma_{(-\mathbf{n})} = -\sigma_{(\mathbf{n})}$

A feszültségek felületi erők, tehát egy adott felületen keresztül fejtik ki hatásukat. Továbbá belső erőkből származnak és rövid a hatótávolságuk. Valamint léteznek még térfogati erők, melyek tetszőleges ΔV térfogatelemre hatnak:

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \Delta V, \text{ ahol } \mathbf{f} \text{ a térfogati erősűrűség (amely helyfüggő).}$$

Ha a P pontban felvesszünk egy X, Y, Z (1,2,3) irányú egyégvektorok által kifeszített tetraédert, akkor a következő ábrát kapjuk (ΔA_i -k rendre az oldalak területei):



A térfogati erőkkel a 4 lapon működő feszültségekből származó erők tartanak egyensúlyt:

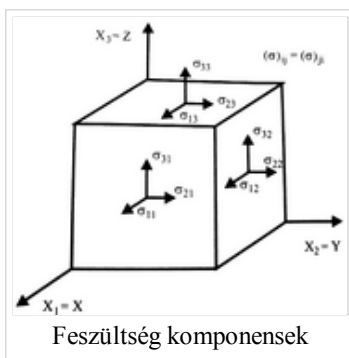
$$\sigma_{(-1)} \Delta A_1 + \sigma_{(-2)} \Delta A_2 + \sigma_{(-3)} \Delta A_3 + \sigma_{(-n)} \Delta A_n + \mathbf{f} \Delta V = 0$$

ε (ábra fent) nem más, mint ΔA_n távolsága P ponttól, mellyel a térfogati erők nagyságrendje köbösen, a felületi erők pedig négyzetesen változik. Ezért $\varepsilon \rightarrow 0$ határesetben:

$$\sigma_{(-1)} \Delta A_1 + \sigma_{(-2)} \Delta A_2 + \sigma_{(-3)} \Delta A_3 + \sigma_{(-n)} \Delta A_n = 0$$

Mivel az egyes felületek kifejezhetők ΔA_n segítségével ($\Delta A_i = \Delta A_n \cos \angle(i, n) = \Delta A_n n_i$), ezért az egyenlet a következőképp egyszerűsödik:

$$\sigma_{(\mathbf{n})} = \sigma_{(1)} n_1 + \sigma_{(2)} n_2 + \sigma_{(3)} n_3$$



Tehát ha ismerjük a koordinátasíkokon fellépő feszültséget, akkor bármilyen \mathbf{n} irányban meg tudjuk határozni a feszültséget:

$$\sigma_{(\mathbf{n}),i} = \sigma_{(1),i} n_1 + \sigma_{(2),i} n_2 + \sigma_{(3),i} n_3 \quad (i=1,2,3)$$

Így bevezethetjük a $\sigma_{i,j} = \sigma_{(j),i}$ **feszültség tenzort**, amellyel a fenti egyenlet:

$$\sigma_{(\mathbf{n}),i} = \sigma_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j$$

(Tenzorról akkor beszélünk, ha a mátrix homogén, lineáris vektortranszformációban szerepel.) A feszültség tenzor j-edik oszlopában a feszültség komponensek állnak. A főátló komponensei a nyújtási/összenyomási feszültségek, a többi elem pedig nyírási feszültség. Továbbá bizonyítható, hogy a feszültségtenzor szimmetrikus^[1].

Deformációs tenzor felírása

Síkbeli deformációt vizsgálva (amit később kiterjesztünk 3D-ra):

A P pont és környezete elmozdulása leírható egy egyszerű $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvénnyel.

Q_X elmozdulásából Q'_X helykoordinátái:

$$((x + \Delta x) + u_x(x + \Delta x, y), y + u_y(x + \Delta x, y))$$

A $\overrightarrow{P'Q'_X}$ vektor x komponense:

$$(x + \Delta x) + u_x(x + \Delta x, y) - [x + u_x(x, y)] \simeq \Delta x \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)$$

A $\overrightarrow{P'Q'_X}$ vektor y komponense:

$$y + u_y(x + \Delta x, y) - [y + u_y(x, y)] = \Delta x \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)$$

(Itt alkalmaztuk a skalár-vektor függvények megváltozására vonatkozó összefüggést:

$$\Delta\phi = \phi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = \partial_x\phi\Delta x + \partial_y\phi\Delta y + \partial_z\phi\Delta z)$$

Az X-tengely irányában fekvő szakasz relatív megnyúlása tehát:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta x \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) - \Delta x}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \rightarrow (\text{A kettős index mutatja a szakasz irányát és a változás irányát is})$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel: $\epsilon_{yy} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)$

A $\overrightarrow{P'R'_Y}$ vektor Y tengellyel bezárt szöge: $\gamma_2 \simeq \frac{\partial u_x}{\partial y}$, ami alapján a nyírás szöge:

$$\gamma \simeq \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Tehát a az alakváltozást leíró elmozdulásfüggvény parciális deriváltjai közvetlen fizikai jelentéssel bírnak.

$$\epsilon_{xx} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right); \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \epsilon_{yy} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \implies \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

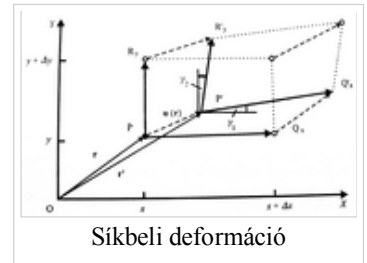
ahol ϵ a **deformációs tenzor**.

Általánosan 3D-ban: $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3$

Ennek főátlóbeli komponensei a koordinátatengelyek irányában történő hosszváltozásokat, a vegyes indexű tagok a hozzájuk tartozó egyenesek közötti szögváltozások felével egyenlőek. A tenzor spurja a relatív térfogatváltozást adja meg. Fontos tétel még, hogy tetszőleges deformáció felírható egyenletes összenyomás és egy nyírás összegeként.

Általános Hooke-féle törvény

Éremes a Hooke-törvényt olyan deformációkra általánosítani, amelyek során a feszültség-tenzor elemei a deformációs-tenzor elemeinek lineáris függvényei. Mivel ezek a tenzorok szimmetrikusak, így hat független elemük



van, és helyettesíthetők a következő kifejezésekkel:

$$\tilde{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}), \quad \tilde{\epsilon} = (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz})$$

És az általános Hooke-törvény szerint ezek közt lineáris kapcsolat van: $\tilde{\sigma} = \hat{C}\tilde{\epsilon}$, ahol \hat{C} egy 6x6-os mátrix és a rugalmas állandók tenzora (ez is mindig szimmetrikus). Komponensekkel felírva:

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^6 C_{ij}\epsilon_j \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

Tehát az általános Hooke-törvény egy 6 egyenletből álló egyenletrendszer, melyhez 36 rugalmas állandó szükséges. Ha figyelembe vesszük, hogy C is szimmetrikus, a deformáció homogén és izotrop és a koordináta rendszert is úgy választjuk, hogy a tengelyek egybeessenek a főfeszültségi irányokkal, akkor a Hooke-törvény 3 egyenletre egyszerűsödik:

$$\sigma_I = C_1\epsilon_I + C_2\epsilon_{II} + C_3\epsilon_{III}$$

$$\sigma_{II} = C_1\epsilon_{II} + C_2\epsilon_{III} + C_3\epsilon_I$$

$$\sigma_{III} = C_1\epsilon_{III} + C_2\epsilon_I + C_3\epsilon_{II}$$

ahol $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ a főfeszültségek, $\epsilon_I, \epsilon_{II}, \epsilon_{III}$ a fődilataciók, C_1, C_2, C_3 pedig a rugalmas állandók. Mivel a σ_I irányra merőleges másik két irány közül egyik sem kitüntetett, ezért $C_2 = C_3$. Így bevezethetőek a következő jelölések:

$$C_1 - C_2 = 2\mu' \text{ és } C_2 = C_3 = \lambda'$$

Ezekkel a fenti egyenletek átírhatók:

$$\sigma_I = 2\mu'\epsilon_I + \lambda'(\epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III})$$

$$\sigma_{II} = 2\mu'\epsilon_{II} + \lambda'(\epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III})$$

$$\sigma_{III} = 2\mu'\epsilon_{III} + \lambda'(\epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III})$$

Tehát izotrop test esetén a deformáció és a feszültség állapot között két rugalmas állandó teremt kapcsolatot, melyek itt μ' és λ' . Ezeket hívjuk **Lamé-féle állandóknak**. Ezek segítségével a korábban definiált deformációk állandói felírhatóak, néhány példa: Young modulus:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}$$

A Poisson-szám (itt most ν):

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

Kis deformációkra a kompresszibilitás:

$$\kappa = \frac{3}{2\mu + 3\lambda}$$

Nyírási modulus:

$$G = \mu$$

A kompresszibilitás és a hangsebesség

Érdeemes még tudni két differenciális összefüggést a deformálható anyagokkal kapcsolatban, az egyik a kompresszibilitás:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$$

A másik a hangsebesség:

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

Hullámterjedés deformálható testekben, Doppler-effektus. [2]

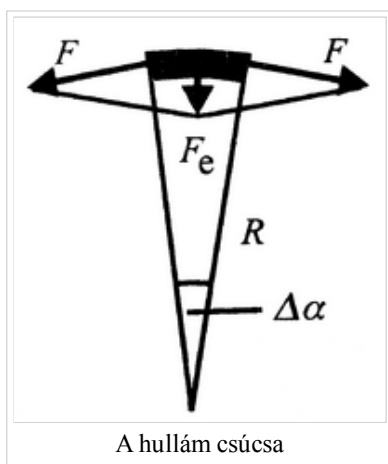
Rugalmas hullám: rugalmas közegben keltett deformáció térbeli terjedése.

Attól függően, hogy gömb vagy sík mentén terjed a hullám, beszélhetünk gömb- vagy síkhullámról.

- Transzverzális hullám: a részecskék elmozdulása merőleges a terjedés irányára
- Longitudinális hullám: a részecskék elmozdulása megegyezik a terjedés irányával

Transzverzális hullámok terjedési sebessége:

Egy kötélen levő hullám-hegy terjedését vizsgáljuk. Felfoghatjuk úgy, hogy a hullám csúcsa (egy, a csúcs mozgásához rögzített koordinátarendszerben) körmozgást végez. Ehhez a centripetális erőt a kötélen két végén levő feszítőerők eredője adja.



Felhasználva, hogy $\Delta\alpha \ll 1 \implies \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \approx \frac{\Delta\alpha}{2}$

$$F_e = 2F \sin \frac{\Delta\alpha}{2} = F\Delta\alpha$$

Az ív tömege: $R\Delta\alpha q\rho$, ahol q a kötélen keresztmetszete, ρ a sűrűsége.

A körmozgás dinamikai egyenlete alapján:

$$F\Delta\alpha = R\Delta\alpha q\rho \frac{c_t^2}{R}, \text{ ahonnan a terjedési sebesség: } c_t = \sqrt{\frac{F}{\rho q}}$$

Bevezetve a kötélen levő húzófeszültséget: $\sigma = \frac{F}{q} \implies c_t = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$

Hullámfüggvény

Egy kötélen egyik felén T periódusidővel hullámokat keltünk. Egy periódusidő alatt a deformáció cT távolságra jut, ez a hullámhossz: λ .

Egy általános pont rezgésére az összefüggés:

$$y(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right), \text{ ahol}$$

y a kötélen kitérése, A a rezgés amplitúdója, ω a körfrekvencia, $\frac{x}{c}$ az adott ponthoz tartozó időkéésés.

Ez a hullámfüggvény az eddigiek alapján átírható a következő alakba:

$$y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \text{ ahol ha bevezetjük a hullámszámot: } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

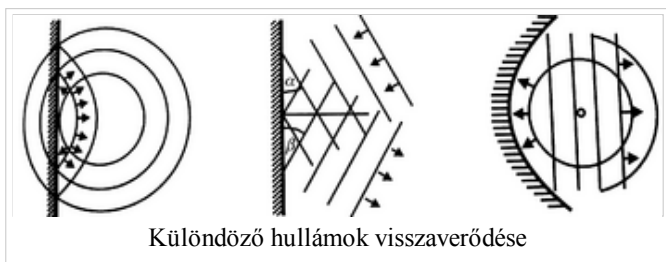
$y(x, t) = A \sin (\omega t - kx)$ egyenletet kapjuk, mint végső formát.

Hullám-tulajdonságok

A tulajdonságok demonstrálására jól alkalmas pl. a hullámkád...

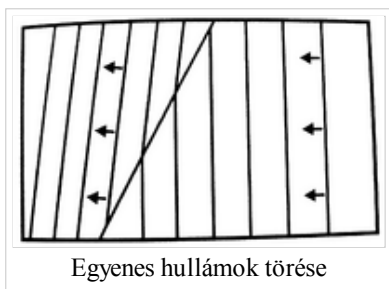
Visszaverődés (reflexió):

Az akadályhoz érkező és visszavert egyenes síkhullám ugyanakkora szöget zárnak be a fallal.



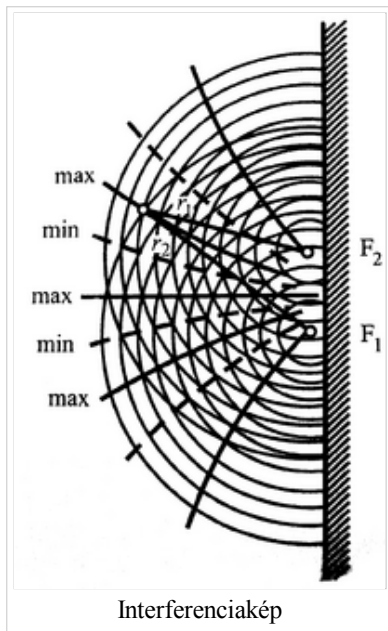
Törés (refrakció):

Pl. ha megváltozik a medence mélysége, akkor az más közegnek számít. A mélyebb vízben gerjesztett, adott hullámhosszúságú, egyenes hullámok a határfelületen irányváltozást és hullámhossz-rövidülést szenvednek.



Interferencia:

Két pont pontszerű hullámforrás a víz felszínén állandó interferenciaképet mutat.



A létrehozott körhullámok hol erősítik, hol kioltják egymást. A két hullámegyenlet:

$$y_1(x, r_1) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right), \quad y_2(x, r_2) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right)$$

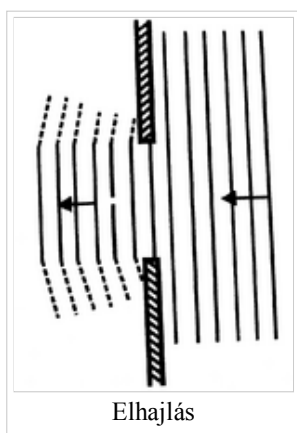
A két hullám fáziskülönbsége egy adott P pontban: $\delta = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$, útkülönbsége: $\Delta s = r_2 - r_1$

Erősítés maximális helye ott van, ahol $\delta = 2n\pi$, ($n \in \mathbb{Z}$) illetve $\Delta s = n\lambda$

Kioltás pedig, ahol $\delta = 2(n + 1)\pi$, és $\Delta s = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$

Elhajlás (diffrakció):

Ha hullámvonulat útjába akadályt teszünk, melyen rést hagyunk, akkor azt tapasztaljuk hogy a fal mögötti "árnyéktérben" is keletkeznek hullámok. Sőt, ha a rés a hullámhosszal egy nagyságrendű, illetve kisebb, akkor a rés mögött körhullámok keletkeznek (mint egy pontforrás esetén).

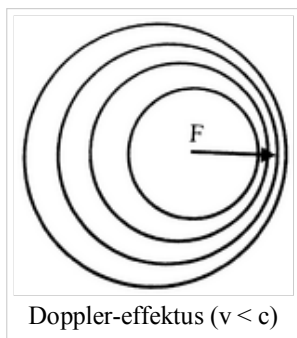


Ez magyarázható a **Huygens-elvvel**, mely szerint:

- A hullámfelületek minden pontjából elemi hullámok indulnak ki
- Az új hullámfelületet egy későbbi időpontban az elemi hullámok burkoló felülete adja.

Doppler-effektus

Ha egy hullámforrás mozog a közeghez viszonyítva, akkor a forrás előtt a hullámoknál hullámhossz rövidülés, mögötte hullámhossz növekedés figyelhető meg. Ennek megfelelően a mozgás irányában nagyobb a rezgés frekvenciája, mint a mögötte levő térrészben. Ez a **Doppler-effektus**.



Nézzük a hangtani esetet, mert ez "látványos". Ha feltesszük, hogy a megfigyelő nem mozdul, a forrás közeledik, illetve hogy a terjedési sebesség kisebb, mint a hangsebesség ($v < c$), akkor a frekvenciaváltozás a következőképp adható meg:

A forrás egységnyi idő alatt f darab hullámot bocsájt ki, melyekből az első c távolságra jut. Ez alatt v távolságra jut a forrás, tehát az f darab hullámnak $c-v$ hosszra kell elhelyezkednie, ami csak úgy lehet, ha megváltozik a hullámhosszuk:

$$c - v = f \lambda', \text{ ahol } \lambda' \text{ az észlelt hullámhossz.}$$

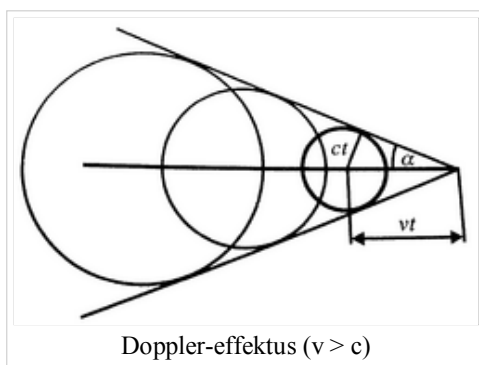
Az észlelt frekvencia pedig:

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = f \frac{c}{c - v}$$

Ugyanezen gondolatmenet alapján, ha távolodik a forrás: $f' = f \frac{c}{c + v}$

Hasonló gondolatmenet alapján, ha nyugvó forrásnál közeledik/távolodik az észlelő: $f' = f \frac{c \pm v}{c}$

Ha a hullámforrás **gyorsabban mozog a hangsebességnél**, akkor a hanghullámok már nem tudják megelőzni a forrást:



A hang ekkor olyan kúp felület mentén terjed, melynek csúcsában a hangforrás van. Az ábra alapján a kúp nyílásszöge:

$$\sin \alpha = \frac{c}{v} \text{ (Ennek reciprokát nevezzük Mach-számnak [M])}$$

Folyadékok tulajdonságai

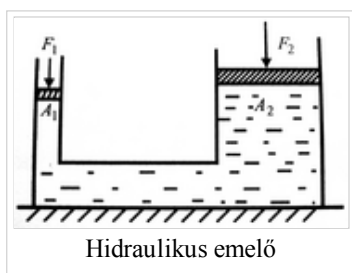
Hidrosztatika

Pascal-törvény: A nyomás a folyadékokban egyenletesen terjed, vagyis a külső nyomásból származó nyomás a folyadék belsejében és a határfelületén minden irányban ugyanakkora.

Demonstrációs példák:

- Vízibuzogány: minden irányban egyenlő mértékben áramlik ki a víz.
- Vékonyfalú üveg pohárban (bolognai) üvegcsépp: ha megroppantjuk a csépp végét, akkor az üveg porrá esik szét és a gyors folyamat széttöri a poharat is.

- Hidraulikus emelő: $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$



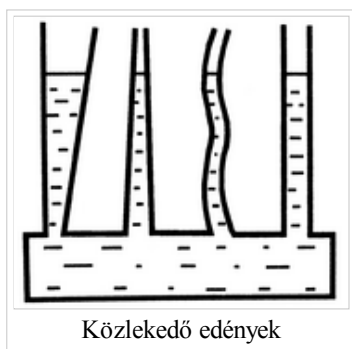
A **hidrosztatikai nyomás** egyenesen arányos a felszíntől mért mélységgel és a folyadék sűrűségével:

$$G = Ah\rho g \quad (A - \text{a folyadék oszlop alapterülete, } h - \text{a magassága, } \rho - \text{a sűrűsége})$$

A **hidrosztatikai paradoxon**: Különböző formájú, de azonos alapterületű edények esetén a mérleg egyensúly mutat, ha ugyanakkora magasságú folyadék van bennük. (Ilyenkor is a folyadék oszlop nyomása fontos... "Az edény fala vagy tartja, vagy nyomja a folyadékot")

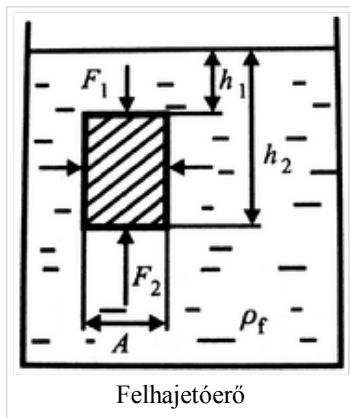


Közlekedő edények: Szintén a Pascal-törvény értelmében (és a fentiek alapján is látható), a folyadékszint az ábrán látható rendszerben ugyanolyan magas lesz mindenhol. (A hidrosztatikai nyomások egyenlőek!)



Felhajtóerő

Egyszerű alakú testre (h magasságú, A keresztmetszetű henger sűrűségű folyadékba) a felhajtóerő:



A hidrosztatikai nyomásnál az oldallapra ható erők eredője 0, az alsó és felső lapra hatók összege pedig megadja a felhajtóerőt:

$$F_f = F_2 - F_1 = h_2 \rho_f g A - h_1 \rho_f g A = (h_2 - h_1) \rho_f g A = h A \rho_f g = V_f \rho_f g$$

Ez a törvény általánosan is igaz: bármely folyadékba merülő testre a test által kiszorított folyadék súlyával megegyező nagyságú felhajtóerő hat. Ez **Archimédész törvénye**.

A testek úszása és annak stabilitása

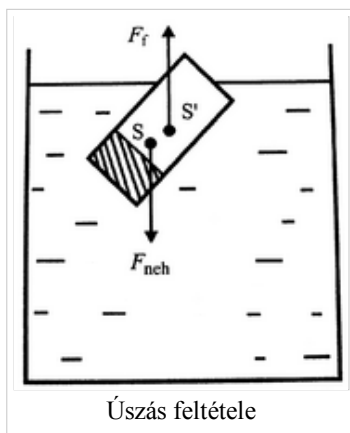
Attól függően, hogy a test súlya vagy a testre ható felhajtó erő nagyobb, a test úszhat, elmerülhet vagy lebeghet.

$$F_e = F_{nehezsegi} - F_{felhajto} = V_t(\rho_t - \rho_f)g$$

- Ha $\rho_t > \rho_f \Rightarrow F_e > 0$: a test elmerül
- Ha $\rho_t = \rho_f \Rightarrow F_e = 0$: a test lebeg
- Ha $\rho_t < \rho_f \Rightarrow F_e < 0$: a test úszni fog.

Úszás esetén a test részben belemerül a folyadékba úgy, hogy $V_t \rho_t = V_f \rho_f$ feltétel teljesüljön (ahol V_f a test folyadékban levő része).

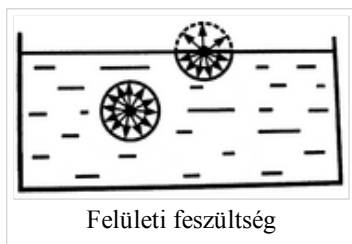
Ahhoz, hogy **stabil úszás**ról beszéljünk, további feltétel szükséges: a felhajtó- és a nehézségi erő ne fejtsen ki forgatónyomatékokat. Hiszen a test súlypontja (S) és a kiszorított folyadék súlypontja (S') nem mindig esik egybe.



Ha a kibillentett úszó test vissza áll eredeti helyzetébe, akkor **stabilis az úszás**. Ha ha kibillentve mindig ugyanúgy marad, akkor az egyensúlyi helyzet **indifferens** (pl. homogén gömb esetén). Ha pedig másik helyzetbe megy át, akkor **labilis** volt.

Felületi feszültség

Ha megnézzük egy folyadék molekula hatásgömbjét a folyadékon beljebb, akkor azt láthatjuk, hogy a kölcsönhatások eloszlása jóformán egyenletes. Viszont a felületen levő molekulákra ez nem igaz.



Felületi feszültség

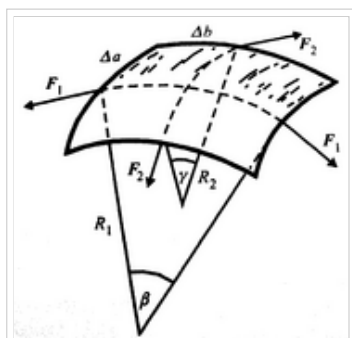
Tehát kísérletek és elméleti számítások alapján a felszíni réteg lazább, nagyobb az átlagos molekulatávolság, mint a folyadék belsejében. Ezért a felületi réteg feszítetté válik. És ennek a felszínnek a növeléséhez/átszakításához munkát kell végeznünk.

Ha egy keretre - aminek egyik oldala mozgatható - szappanhártyát feszítünk ki, akkor azt tapasztaljuk, hogy az erő (ami húzza az l hosszúságú oldalt) nem függ a hártya területétől:

$$F = \alpha \cdot 2l$$

Ebből arra következtethetünk, hogy összehúzódáskor a hártya szerkezete/struktúrája nem változik. Továbbá a potenciális energiaminimum-elve következtében létrejönnek a minimálfelületek. Az energiaminimumot pedig a felületi energia minimuma adja. (pl.: szappanos vízbe mártott kocka...)

Gömbült felület görbületi nyomása:



Gömbült felület görbületi nyomása

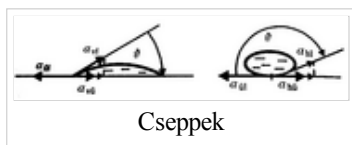
Az adott hártyadarabka nyomását a következő összefüggéssel kaphatjuk meg, mely **Laplace I. törvénye**:

$$p_g = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

(Ennek segítségével lehet magyarázni a kapilláris emelkedést is ^[3])

Nedvesítő és nem nedvesítő folyadékok:

Az üvegre cseppentett folyadékok alakját a nehézségi erő és a felületi feszültség együttesen alakítják ki.



Cseppek

Az ábrán láthatóak a 3 anyag érintkezési vonalában ható felületi feszültségek. (Jelmagyarázat: v-víz, h-higany, ü-üveg, l-levegő) Az egyensúlyt a következő összefüggés írja le:

$$\alpha_{ul} = \alpha_{vu} + \alpha_{vl} \cos \vartheta, \quad \vartheta \text{ az illeszkedési szög. (Higanyra hasonló az egyenlet.)}$$

Ezt az összefüggést nevezzük **Laplace II. törvényének**.

Torricelli-kísérlet

A levegő súlyából adódó légnyomás meghatározásához Torricelli egy 1 m hosszú kémcsövet megtöltött higannyal és higgannyal telt edénybe helyezte a cső nyitott végét. A csőben a higany szintje az edényben levő higanyhoz képest 76 cm-re esett (függetlenül az üvegcső dőlésszögétől). Ezzel a magasságú higannyal tud a levegő nyomása egyensúlyt tartani (közlekedő edények elve).

További példák: befőttes üveg behorpadt celofánnal, magdeburgi féltekék....

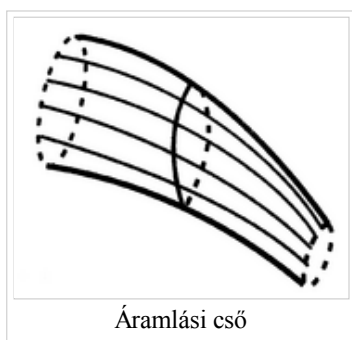
Áramlások

Lagrange-féle leírás

Folyadékot a szilárd testekhez hasonlóan kezeljük, és részekre bontjuk. Majd minden részelemnek külön megadjuk a helykoordinátáját és a pályavonalát. De ez a felírás nagyobb időre túl kusza pályákat eredményez.

Euler-féle leírás

Nem a közeg egyes pontjait, hanem az áramlási teret nézzük a következőképp: minden pontban megadjuk a sebességet (v), a nyomást (p) és a sűrűséget (ρ) időtől függően. Ekkor nem számít, hogy egy adott részecske éppen hol tartózkodik. A szemléltetéshez használjuk az *áramvonalakat*, melynek deriváltja megadja az adott pontban a sebességvektor egyenesét.



Áramlási cső: az áramlási térben egy elméleti zárt görbe pontjain ármelő áramvonalak összessége.

Áramlások osztályozása:

- Súrlódásos/súrlódás mentes: súrlódásos, ha a folyadékrészek relatív mozgásából származó nyíróerők nem elhanyagolhatók.
- Örvényes/örvény mentes: örvényes, ha a folyadékrészek forgómozgást is végeznek.
- Stacionárius/nem stacionárius: stacionárius, ha v , p és ρ nem függnek az időtől.

Tökéletes folyadék áramlása

Vegyünk egy ΔV térfogatú folyadék részecskét egy $r(x,y,z)$ helyen. A rá ható erők x komponense az X -tengelyre merőleges lapjaira ható nyomásból származik. Így:

$$F_x = [p(x, y, z, t) - p(x + \Delta x, y, z, t)] \Delta y \Delta z = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Felhasználva, hogy $\Delta m = \rho \Delta V = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$, a részecske mozgásegyenletének x komponense:

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \text{ ugyanez felírható az } y \text{ komponensre is.}$$

A z komponensnél viszont figyelembe kell venni a nehézségi erőt: $\rho \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$

Vektoriálisan megkapjuk az **ideális folyadékokra vonatkozó dinamikai alapegyenletet (Euler-egyenlet)**:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \rho \mathbf{g}$$

Ahol a teljes időderivált kifejtésénél figyelembe kell venni azt, hogy mire kis idő múlva odanézek, a részecske már nem ott lesz, ahol eddig volt, így a deriváltat a láncszabály szerint írhatjuk le:

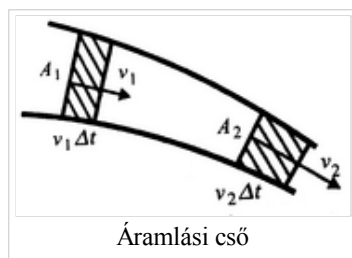
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad}) \vec{v}$$

Ez az egyenlet még nem elég az áramlás problémájának megoldásához, hiszen ez csak 3 egyenlet míg az ismeretlenjeink száma: 3(sebességek)+1(nyomás)+1(sűrűség) Kell még a kontinuitási egyenlet és egy állapotegyenlet.

A peremfeltételek nem sűrűlő folyadék esetén azt mondják, hogy a sebesség a falakra merőleges komponense 0.

Kontinuitási egyenlet:

Az összenyomhatatlanság miatt az áramlási cső két tetszőleges keresztmetszetén egyenlő térfogatú folyadék halad keresztül.



Áramlási cső

$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t, \text{ ahonnan: } \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} \text{ adódik, ami a stacionárius áramlásra vonatkozó kontinuitási egyenlet.}$$

Szűkülésben tehát nagyobb sebességgel áramlik a folyadék.

Általános esetben a kontinuitási egyenlet a következőképpen írható fel:

- Egy térfogatot kiválasztva a folyadékon belül, a térfogaton belüli tömeg megváltozása:

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\vec{r}) dV$$

- Ennek egyenlőnek kell lennie a térfogat szélein(felületén) kiáramlott tömeggel:

$$- \int \rho(\vec{r}) \vec{v} dF$$

A felületi integrálra Gauss-Oszrogradszkij tételt alkalmazva, majd kihasználva, hogy ez minden térfogatra igaz, kapjuk a szokásos alakú kontinuitási egyenletet:

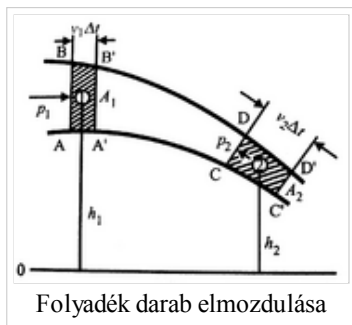
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

A leggyrabban választott állapotegyenlet $\rho = \text{konst.}$ vagyis az összenyomhatatlan folyadék esete. Ekkor az előző

egyenlet így egyszerűsödik:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

A Bernoulli-egyenlet



Vizsgáljuk meg az ABCD folyadék rész elmozdulását (A'B'C'D'-be megy át Δt idő múlva). Mivel az ábrán fehérén hagyott rész nem változik az áramlás szempontjából, ezért úgy tekintjük, mintha ABA'B' folyadék CDC'D'-be jutott volna át. A munkatétel szerint a folyadék mozgásenergiája megegyezik a ráható erők munkájának összegével. Súrlódásmentes esetben csak a nehézségi erő és a p_1 , p_2 nyomásokból származó erőt kell figyelembe venni. A nehézségi erő munkája:

$$W_1 = A_1 v_1 \Delta t \rho g (h_1 - h_2)$$

A nyomóerőé pedig:

$$W_2 = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t$$

Felhasználva a kontinuitási egyenletet: $V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$, és a munkatételt:

$$\frac{1}{2} V \rho v_2^2 - \frac{1}{2} V \rho v_1^2 = V \rho g (h_1 - h_2) + V (p_1 - p_2), \text{ melyet átrendezve a következő összefüggést kapjuk:}$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Ezt az összefüggést hívjuk **Bernoulli-egyenletnek**. Ez alapján ez az összeg bármely áramfonal esetén állandó - összenyomhatatlan folyadék súrlódásmentes, stacionárius áramlása esetén:

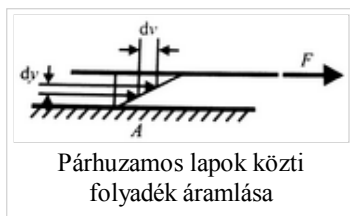
$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = C$$

Viszkózus folyadék áramlása

Amikor a folyadékrészek relatív sebességük nem 0, akkor a részek közötti belső súrlódási erő már nem hanyagolható el általában.

Tapasztalat: egymásra rétegzett színes és színtelen glicerinből kihúzzunk egy üveglapot. Az üveglapon lévő folyadékok sebessége a legnagyobb, a távolabbiaké kisebb. A relatív sebesség és belső súrlódás miatt a lassabb rétegek lassítják a gyorsabbakat és fordítva.

Mégjobban vizsgálható, ha két párhuzamos lap közötti folyadék áramlását vizsgáljuk, úgy hogy csak a felső lapot mozdítjuk el.



Ekkor legfelül a leggyorsabb a folyadék, míg legalul 0 a sebessége. Ekkor a folyadék sebességének az áramlásra merőlegesen gradiense van. Eredményül azt kapjuk, hogy a belső súrlódási erő egyenesen arányos az egymáson csúszó folyadékrétegek felületének nagyságával és a keresztmetszetben vett egységnyi távolságra eső sebességváltozással:

$$F = \eta A \frac{dv}{dy}$$

Ezt az összefüggést **Newton belső súrlódási törvényének** nevezzük. (Ahol η a dinamikai viszkozitás.)

Stokes törvénye:

Áramlási térbe helyezett közelében réteges áramlás alakulhat ki. A belső súrlódással a közeg erőt fejt ki a golyóra, ami arányos a golyó relatív sebességével, a golyó sugarával, és a közeg dinamikai viszkozitásával:

$$F = 6\pi\eta r v$$

Ezt a törvényt használta fel Millikan is a kísérlete során, amikor is megmérte az elemi elektromos töltést....

További pl.: Brown-mozgáskor felhasznált mozgásegyenlet: $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -6\pi\eta a \frac{dx}{dt} + F_{veletlen}$

Turbulencia

Azt tapasztaljuk, hogy ha egy áramlási csőben lamináris (stacionárius) áramlás sebességét növeljük, akkor egy adott sebességnél az áramlás kavargó, turbulens áramlásba csap át. Ugyanezt tapasztaljuk, ha a sebességet nem változtatjuk, de az áramlási cső méretét növeljük. Egyes vizsgálatok alapján a turbulenssé válás függ az áramlási sebességtől (v), az áramlási cső harántmértétől (r), a közeg sűrűségétől (ρ) és a dinamikai viszkozitástól (η). Az átmenet akkor történik meg, ha

$$R = \frac{\rho r v}{\eta}, \text{ ahol } R \text{ a Reynolds-szám.}$$

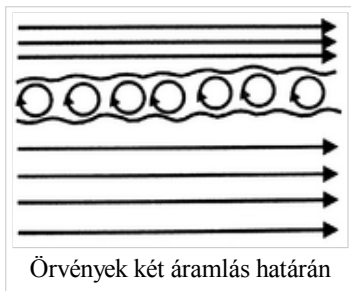
Ez a számérték hozzárendelhető az adott testekhez is, melyeket az áramlási csatornába helyezünk. Két test körüli áramlások pedig akkor lesznek hasonlóak, ha $R_1 = R_2$. (Tehát pl egy 10x kisebb repülőgép modellhez 10x nagyobb szél kell...)

Áramlások hasonlósága

Az előző pontban említett Reynolds-szám csak egy a hidrodinamika rengeteg dimenziótlan száma közül. Általánosan elmondható, hogy két áramlás akkor hasonló, ha az adott probléma szempontjából jelentős dimenziótlan számai egyenlők. Két áramlás hasonlósága alatt itt azt értjük, ha dimenziótlanított formában megegyező függvények írják le a sebesség és nyomáseloszlásukat (ha más lényeges változóink is vannak, pl.: hőmérséklet, akkor azokat is). Ennek óriási jelentősége van, mivel a hidrodinamika egyenletei nemlineárisak, és sokszor megfelelő közelítő megoldás sem található rájuk, így a mérnökök/kutatók kénytelenek modellkísérleteket alkalmazni, pl. a vizsgálandó hajótest kicsinyített másán.

Örvények

Két, nem azonos sebességű lamináris áramlás határfelületén a nyíróerők vékony sávban forgásba hozzák a folyadékot, örvények jönnek létre.



Örvények két áramlás határán

Ha egy testet (pl. hengert) helyezünk lamináris áramlásba, akkor a testtől távolabb az áramlás nem változik, de a test közelében a folyadéknak nagy lesz az áramlásra merőleges sebesség-gradiense. (Ez a Prandtl-féle határréteg.) Ez amiatt van, mert a test felületén a folyadékreszek sebessége nulla, a határréteg másik szélén pedig maximális. A belső súrlódás miatt nem tudnak elhaladni a test mellett, hogy mögé jussanak (a magas nyomású részhez), hanem már hamarabb lefékeződnek és visszakanyarodnak a kisebb nyomású rész felé. Viszont itt a nagysebességű áramlás elkapja a visszaáramló folyadékot és így forgásba jön. Ez a kialakuló örvény egyre nagyobb lesz, majd leválik a testről. Ez a jelenség periódikusan ismétlődik, és ellentétesen forgó örvénypárok szakadnak le egymás után. Ezt nevezzük **Kármán-féle örvénysornak**.



Kármán-féle örvénysor

A Navier-Stokes-egyenlet(*)

Összenyomhatatlan folyadékok esetén:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}.$$

Az Euler-egyenlethez képesti egyetlen új tag a viszkozitás hatását írja le. μ a kinenatikai viszkozitás

$$\mu = \frac{\eta}{\rho}$$

[4] A peremfeltételek viszkózus folyadékokra azt mondják, hogy a falak mentén a víz áramlási sebessége nulla.

Hivatkozások: Forrás: Tasnádi-Skrapits-Bérces - Általános fizika I.2.

1. ↑ könyv: 151 § 1. (50-51. oldal)
2. ↑ Tasnádi-Skapits-Bérces: Általános fizika I.2. IV. C) Hullámstan
3. ↑ 171. § 1. (110. o)
4. ↑ <http://en.wikipedia.org/wiki/Navier-Stokes>

Záróvizsga tematika

A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktnál megoldható fizika problémák | **Folytonos közegek mechanikája** | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszervezet | A magfizika alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok | Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

Tételek

A lap eredeti címe: „http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php/Folytonos_k%C3%B6zegek_mechanik%C3%A1ja”

- A lap utolsó módosítása: 2009. augusztus 19., 17:05