Elektro- és magnetosztatika, áramkörök

A TételWiki wikiből

Tartalomjegyzék

Coulomb- és Gauss-törvény, szuperpozíció elve, stacionárius áram.[1]

Sztatika esetén nincsen időbeli változás, tehát a Maxwell-egyenletekben [2] szereplő, időderiváltakat tartalmazó targok 0-t adnak járulákul. Így a Mexwell-egyenletek: (ahol E az elektromos térerősség, B a mágneses indukció, j az áramsűrűség, ρ az elektromos töltéssűrűség, ε_0 a vákuum dielektromos állandója)

$$\mathrm{div}E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\mathrm{rot}E = 0$$

$$\mathrm{rot}B = \frac{j}{\varepsilon_0 c^2}$$

$$\mathrm{div}B = 0$$

Látható, h E és B nincsenek csatolva, tehát stacionárius esetben ezek függetlenek egymástól. Továbbá az elektrosztatikus tér olyan vektortér, melyben nincs rotáció, a magnetosztatikus pedig olyan, amiben nincs divergencia. Elektrosztatikában fontos, hogy **E** rotációja nulla, mert ekkor felírható úgy, mint egy skalármező gradiense:

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\Phi$$

Mindkét oldal divergenciáját véve, és kihasználva a másik **E** térre vonatkozó egyenletet, Laplace-egyenletet kapunk:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Az ilyen alakú egyenletek megoldására ki van dolgozva a matematikai apparátus (Green-függvények stb.), az általános megoldás:

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(r')}{|r-r'|}d^3r'$$

A potenciál szokásos fizikai jelentése: munkavégző képesség, ahol a munka itt most az egységtöltésen értendő. Ponttöltés potenciálja a következő alakú:

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

Ha két ellentétes ponttöltést helyezünk egymás közelébe, azt dipólusnak nevezzük, és a dipólerősségel jellemezzük:

$$\mathbf{p} = e\mathbf{d}$$

itt **d** vektor az egyik tölétésből a másikba mutat. A dipólus potenciálja a következő alakú:

$$\Phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{pr}}{r^3}$$

Az egyre több ponttöltés egymás közelébe rakásához hasonlóan meghatározható a potenciál. Ez azért jó, mert ha van egy lokalizált töltéseloszlásunk, akkor azt távolról szemlélve annak eredő potenciálja előállítható egy sorfejtésként, amely tagjai sorra egy monopólus + egy dipólus + egy kvadrupólus + ..., ami lényegesen könnyebben kezelhető, mint soksok töltés tere. Ez az eljárás a multipól-sorfejtés.

Coulomb-törvény:

Két nyugvó töltés között fellépő erő: $\mathbf{F_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F_2}$, ahol

$\mathbf{F_1}$ a q_1 töltésre ható erő, $\mathbf{e}_{12}$ a q_2-ből a q_1-be mutató egységvektor, r_{12} a két töltés távolsága, és $\mathbf{F_2}$ a q_2-re ható erő.

Ha több töltésünk is van, akkor bármely töltésre ható erő egyelő az összes többi töltésekből származó Coulomb-erők vektorösszegével. Ez a **szuperpozíció elve**.

A fenti Coulomb-törvényből megadható az elektromos térerősség: $E_1 = \frac{F_1}{q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{12}^2}\mathbf{e}_{12}$

Egy tetszőleges A felülere a fluxus: $\int E_n dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (ha a töltés a felületen belül van)

A **Gauss-törvény** szerint pedig, ha több töltésünk van és egy adott zárt felületet nézünk, akkor az összes bent lévő töltés összegét kell figyelembe vennünk: $\int E_n dA = \frac{Q_{belso}}{\varepsilon_0} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$

Ha a töltéseket a ρ töltéssűrűséggel írjuk le, akkor minden kis dV térfogategység ρdV töltést tartalmaz. Ezekből is megadható Q: $Q_{belso} = \int \rho dV$

Egy ilyen kis térfogatelemen a fluxus: $\mathrm{div}E \cdot dV = \frac{\rho dV}{\varepsilon_0}$, azaz $\mathrm{div}E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, tehát a Gauss-tétel nem más, mint az elektrosztatika első alaptétele (az egyik Maxwell-egyenlet).

Vezetők, szigetelők, dielektrikumok, elektormos polarizáció, magnetosztatika.

Vezetők[3]

Az elektromos vezetők - általában fémek - belsejében a delokalizált elektronok áramlása hozza létre a vezetés jelenségét. Ezt okozhatja például külső elektromos erőtér. Az így létrehozott áramot vagy mozgásban kell tartani egy külső energiaforrással, különben amint az elektronok kisütik a kezdeti teret létrehozó forrásokat, megállnak. Tehát az elektronok addig mozognak, amíg úgy nem rendeződnek, hogy a belső elektromos tér nulla legyen. Mivel a tér belül zérus, így annak divergenciája is nulla, és a Gauss-törvény értelmében akkor a töltéssűrűségnek is 0-nak kell lennie. Tehát a töltéseknek a vezető felületén kell lenniük.

Továbbá a vezető felülete ekvipotenciális felület, a térerősségnek itt merőlegesnek kell lennie mindenhol. Ha lenne érintőleges tag, akkor az elektronok elmozdulnának a felület mentén.

Végül bebizonyítható, hogy a vezető belsejében levő (üres) üregben a térerősség szintén zérus.

Dielektrikumok[4]

A dielektrikumok (vagy szigetelők) nem vezetik az áramot, visznont van elektromos tulajdonságuk (pl kondenzátor kapacitása megnő, ha szigetelőt teszünk a fegyverzetek közé). Ezen anyagok tulajdonságát jellemzi - relatív dielektromos állandó (permittivitás). A vákuumnak egységnyi ez az értéke.

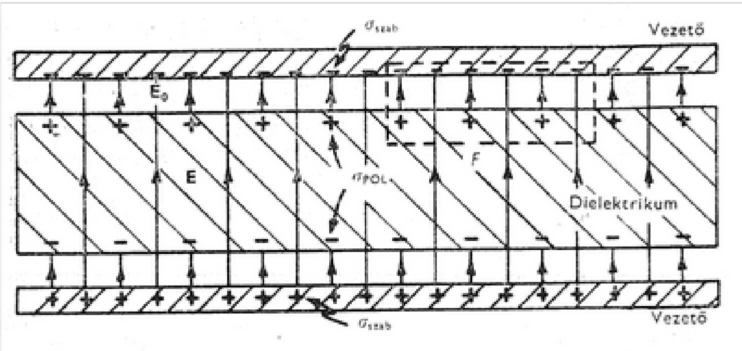
Dielektrikumok kondenzátorban:

A kondenzátor kapacitása: $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{Q}{U}$(ahol A a lemezek területe, d azok távolsága)

Kísérleti tapasztalat alapján, ha dielektrikumot teszünk a kondenzátorba, akkor megnő a kapacitás.

$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}$, ahol ε_r a dielektrikum relatív permittivitása.

Mivel a töltések nem változnak, ezért a feszültségnek kell csökkennie. Viszont ez a potenciálkülönbség nem más, mint a fegyverzetek közötti térerősség vonalintegrálja. Ebből az következik, hogy a kondenzátoron belül csökkennie kellett a térerősségnek.



Dielektrikum kondenzátorban

Ha alkalmazzuk a Gauss-tételt, és az ábrán látható (bekeretezett “dielektrikum”) felületre integrálunk, akkor a leutóbbi következtetésünk alapján arra jutunk, hogy kisebb lesz a töltéssűrűség. (Olyan, mintha két kis kondenzátort kötnénk sorba.) Ez csak akkor lehet, ha a szigetelő egyik felén pozitív, másik felén negatív töltés indukálódik. (Vezető esetén tényleg ezt is várnánk...)

A szigetelő semleges részecskékből áll, melyek külső tér hatására indukált dipólmomentumok lesznek. (Egy elég jól használható magyarázat: az elektronokra és a protonokra más irányú erők hatnak, így tozul a részecske, és az elektronok súlypotja nem esik egybe a protonéval egy részecskkén belül. Így kialakul egy dipólus.) Ha egy dipólban a két töltés távolsága δ (ami a **polarizációs vektor**), akkor egy atom dipólusnyomatéka: qδ. Így bevezethető az egységnyi térfogatra eső *dipólmomentum sűrűség*: $\mathbf{P} = Nq\delta$ (ha a térrészban N részecske van)

Ez az érték egyenesen arányos a térerősséggel: $\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\mathbf{E}$ ahol χ az anyagra jellemző elektromos szuszceptibilitás.

Az elektromos indukció felírása:

$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E} = \varepsilon_0(1+\chi)\mathbf{E} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \chi\varepsilon_0\mathbf{E} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ [1] (http://en.wikipedia.org

/wiki/Electric_displacement_field)

Fontos tudni, hogy a polarizáció **NEM** azonos a megosztás jelenvégével. Ez utóbbiban valódi töltések keletkeznek, és vándorolnak el a vezetőben, ezzel szemben a polarizációban csak atomi méretű töltésszétválás történik!

Számos anyag van amelyre a fenti lineáris összefügés nem igaz, a legérdekesebbek talán az elektrétek, amelyek állandó elektromos teret tartanak fennt, hasonlóan az állandó mágnesek mágneses teréhez.

Magnetosztatika [2] (http://en.wikipedia.org/wiki/Magnetization)

A Magnetosztatikát leíró Maxwell-egyenletek:

$$\mathrm{rot}B = \frac{j}{\varepsilon_0 c^2}; \qquad \mathrm{div}B = 0$$

B a mágneses indukció vektora. Ezt a térerősséggel (**H**) a permeabilitás μ kapcsolja össze:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H}$$

Az utolsó lépésben definiáltuk a mágneses szuszceptibilitást (χ_m) is, ez az adott anyag hatására megjelenő térnövekedést jellemzi. Bevezetjük továbbá **M**-et, ez a mágnesezettség, a térfogategység mágneses momentuma. Összefüggése H-val:

$$\mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H}$$

További összefüggések:

$$\mathbf{H} \equiv \varepsilon_0 c^2\mathbf{B} - \mathbf{M}$$

Jól látható az analógia $\mathbf{D}$ és $\mathbf{B}$ között.

- Mágneses térben mozgó töltésre erő hat: Lorentz-erő - $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

- Nyugalmi indukció (Fluxus-szabály) [3] (http://csega.homeip.net/wiki/index.php/Elektrodinamika#Nyugalmiindukci.C3.B3) :

$$U_i = \oint Eds = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{f} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}d\mathbf{f} = -\frac{\partial \phi}{\partial t},$$ ahol φ a mágneses tér fluxusa.

Mozgási indukciónál a Lorentz-erő alapján kell integrálnunk, de szintén visszakapjuk a Fluxus-szabályt.

Stacionárius áram, áramköri törvények: Kirchhoff-törvények, Ohm-törvény

A stacionárius áram kifejezés arra utal, hogy nincsen időbeli változása az áramnak. Ez állandó mágneses teret hoz létre maga körül. Gyakran használjuk a lineáris vezető kifejezést. Ez hasonló absztrakció, mint a ponttöltés bevezetése sztatikában. Itt arra kell gondolni, hogy adott egy görbe a térben, és ennek a görbének minden pontjában egy j áramsűrűség van, amely párhuzamos a görbe irányvektorával. Az áramot valamilyen potenciálkülönbség hajtja körben az áramkörben. Ezt valamilyen hatással (kémiai, mechanikai, stb.) létre kell hozni, és fenn kell tartani. Erre bevezetjük az elektromotoros erőt: ez azzal a térerősséggel egyenlő, amely a töltésszétválasztás során létrejött teret kompenzálja, ha nem folyik áram.

Kirchhoff törvények

Kirchhoff I.-II. törvénye eldinből:itt (http://csega.homeip.net/wiki/index.php/Elektrodinamika#RLC_elemek.2C_.C3.A1ramk.C3.B6r.C3.B6k)

- Huroktörvény: Egy zárt áramköri hurokban a feszültségek előjeles összege zérus (feltéve, hogy nincs külső mágneses tér).
- Csomópont-törvény: Az egy áramköri csomópontban összefutó áramok előjeles összege zérus.

Ohm-törvény

Általában: $R = \frac{U}{I}$

A lokális Ohm-törvény:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

ahol $\mathbf{j}$ az áramsűrűség, $\mathbf{E}$ az elektromos térerősség, $\frac{1}{\rho} = \sigma$ a fajlagos vezetőképesség és ρ a fajlagos ellenállás.

Fontos megjegyezni, hogy ezt sem tartalmazzák a Maxwell-egyenletek, tulajdonképpen ez is anyagi egyenlet. Lásd a kereszteffektusoknál található levezetést.

Érdemes megyjegyezni, hogy a kontinuitási egyenlet miatt az áramsűrűség normális komponense a határfelületeken egyenlő, azonban ha két olyan anyag van a két oldalon, amelyek vezetőképessége (ellenállása) más, akkor a térerősség is különböző kell, hogy legyen, és az eredmény az, hogy a felületen töltésfelhalmozódás alakul ki.

Mágneses hatások

Az egyenárammal átjárt lineáris vezető egy infinitezinális darabja által létrehozott mágneses teret a Biot-Savart-törvény adja meg. Ez egyszerűen levezethető a stacionáruis állapotot leíró Maxwell-egyenletekből. Az eredmény:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3} d^3 r'$$

Ennek egy speciális alkalmazása, amit igen sokszor használ a fizika, az egyetlen kis áramhurok által létrehozott mágneses tér. Ha a hurokban I áram folyik, akkor bevezetjük a mágneses momentumot (hasonló az elektromos dipólhoz):

$$\mathbf{m} = I \int df$$

ahol az áramot a hurok által behatárolt felület nagyságával szoroztuk meg, az irányt a jobbkéz szabály adja. Ennek sehítségével a kis hurok mágneses tere:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{mr})\mathbf{r}}{r^5} \right) - \frac{\mathbf{m}}{r^3}$$

Az így létrehozott térben a töltésekre természetesen hat a Lorentz-erő. Ennek következménye az is, hogy két párhuzamos lineáris vezető között erőhatás ébred, ha bennük áram folyik. Ennek mértéke:

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

Ha egy irányba folyik az áram a két vezetőben, akkor vonzzák egymást, ha ellentétesen, akkor taszítják egymást.

Tekercsek

Ha feltekerünk spirálba egy vezetőt, és áramot folyatunk át rajta, akkor az egyes hurkok mágneses tere összeadódik, továbbá jó közelítéssel a tekercsen belül homogén terünk lesz, ami a szélek felé egyre jobban leromlik. A létrehozott **B** tér egyenesen arányos az áramerősséggel, és a menetszámmal (n).

Hivatkozások:

1. ↑ Feynman - Mai Fizika 5: 56. Elektrosztatika
2. ↑ Teljes Maxwell-egyenletek: itt
3. ↑ Feynman - Mai Fizika 5: 57.9 Elektrosztatika
4. ↑ Feynman - Mai Fizika 5: 62. Dielektrikumok