

# A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása

A TételWiki wikiből

## Tartalomjegyzék

- 1 A mechanika elvei
- 2 A virtuális munka elve
- 3 d'Alembert elv és a Lagrange-féle elsőfajú egyenletek
- 4 A Gauss-féle legkisebb kényszer
- 5 Általános koordináták és a Lagrange-féle másodfajú mozgástörvény
- 6 Hamilton-féle variációs elv és az Euler-Lagrange egyenletek
- 7 Kanonikus egyenletek, Hamilton-függvény
- 8 Ciklikus koordináták, kanonikus transzformáció
- 9 Maupertuis-elv (\*)
- 10 A Hamilton-Jacobi egyenlet
- 11 A Liouville-tétel(\*)
- 12 Megmaradási tételek, mint szimmetriák következményei
  - 12.1 Impulzusmegmaradás
  - 12.2 Impulzusmomentum megmaradása
  - 12.3 Energiamegmaradás
  - 12.4 Noether-tétel(\*)

## A mechanika elvei

A klasszikus mechanika alapvető törvényeinek megfogalmazását Newton megtette. Azonban ugyanezek az elvek megfogalmazhatóak számos, a Newton-i axiómákkal ekvivalens, azonban matematikailag más alakban, ami sokszor szemléletesebb, illetve egyszerűbb tud lenni. Ezek a mechanika elvei, amelyek nem bizonyítható axiómák, ezek helyességét a tapasztalatok adják.

## A virtuális munka elve

Vegyünk egy  $N$  anyagi pontból álló mechanikai rendszert, amelynek koordinátái  $x_i, y_i, z_i$ , a ható erőt pedig  $F_i$  jelöli. Legyen  $\delta r_i$  az  $i$ -edik anyagi pontnak a kényszerek által megengedett infinitesimalis és **virtuális** elmozdulása. Itt a virtuális alatt azt értjük, hogy nem tartozik ezen elmozdulásokhoz időtartam. A tárgyalat rendszer akkor lesz egyensúlyban, ha a ható erők virtuális munkája zérus:

$$\sum_{i=1}^N F_i \delta r_i = 0$$

Szabad mozgás esetén minden  $\delta r_i$  tetszőleges, tehát az erővektoroknak kell zérusnak lenniük. Ha van  $N$  pontunk, akkor azokhoz  $3N$  darab koordináta tartozik, és ennél kevesebb kényszerfeltétel lehet adott, különben nincs mozgás. Itt most feltesszük, hogy a kényszereink egy felületre korlátozzák a rendszert, és ezért alakjuk így írható:

$$\phi(r_1, r_2, \dots, r_N) = 0$$

A kényszerfeltételek a virtuális elmozdulások alatt is kell, hogy teljesüljenek, ebből valamint egy infinitezimális elmozduláshoz tartozó Taylor-sorfejtésből belátható, hogy a kényszerfeltételek a következő általános alakba írhatóak:

$$\sum_{i=1}^N \text{grad}_i \phi_k \delta r_i = 0 \quad k = 1, \dots, s < 3N$$

Ezeket a Lagrange-multiplikátorok módszerével vehetjük figyelembe: egy ismeretlen  $\lambda_k$  szorzóval hozzáadjuk őket a virtuális munka egyenlethez:

$$\sum_{i=1}^N \left( F_i + \sum_{k=1}^s \lambda_k \text{grad}_i \phi_k \right) \delta r_i = 0$$

Most a szabad esettel szemben csak  $(3N-s)$  darab együttható lesz zérus, de a többinél a Lagrange-multiplikátorokat választjuk úgy, hogy a maradék együtthatók is eltűnjenek. Ekkor úgy tekinthetjük, mintha a virtuális elmozdulások függetlenek lennének, ezért az egyenlőség teljesüléséhez az erők összegének kell zérusnak lennie, ezért:

$$\mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^s \lambda_k \text{grad}_i \phi_k = 0$$

A második tagot elnevezhetjük kényszererőknek, és ekkor a az egyensúly feltétele, hogy a szabad és kényszererők összege zérus legyen. A  $\lambda \text{grad} \phi$ -s definícióból az is látható, hogy felületen mozgásnál a kényszererő merőleges a felületre (mivel  $\text{grad} \phi$  a felületi normális irányába mutat).

## d'Alembert elv és a Lagrange-féle elsőfajú egyenletek

Jean le Rond d'Alembert a virtuális munka elvéhez hasonló kifejezést vezetett be, de az nem csak az egyensúlyt írja le, hanem egyben mozgástörvény is:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0$$

A mechanikai rendszer az elv értelmében úgy mozog, hogy a fenti kifejezés minden időpillanatban teljesül. Szabad rendszerre ez a Newton mozgásegyenletet adja, hiszen tetszőleges  $\delta \mathbf{r}_i$ -re el kell tűnnie a zárójelnek, azaz  $\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$ . Ha kényszerek is jelen vannak, akkor ismételten a Lagrange-multiplikátoros átalakítást végezzük el:

$$\sum_{i=1}^N \left( \mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^s \lambda_k \text{grad}_i \phi_k - \dot{\mathbf{p}}_i \right) \delta \mathbf{r}_i = 0$$

A virtuális munka elvéhez hasonlóan itt is formálisan függetlenként kezelhetők a megváltozások, így

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^s \lambda_k \text{grad}_i \phi_k$$

Ha feltesszük, hogy a tömeg állandó, akkor  $\dot{\mathbf{p}}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ , tehát:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^s \lambda_k \text{grad}_i \phi_k$$

Ezt az egyenletet nevezzük a Lagrange-féle elsőfajú egyenleteknek (N darab van belőlük). Mivel ezek vektor egyenletek, így tulajdonképpen  $3N$  darab egyenletünk van, és ezenkívül az  $s$  darab kényszeregyenlet. Ez éppen annyi, mint az ismeretlenek száma:  $3N$  darab térkoordináta az idő függvényében, és az  $s$  darab multiplikátor.

## A Gauss-féle legkisebb kényszer

Gauss bevezette a kényszer mértékét:

$$Z = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{m_i} (m_i \ddot{x}_i - X_i)^2$$

Itt  $X_i$  szabaderő. A zárójelben tehát a szabad mozgástól való eltérés áll a kényszerek hatására. Gauss elve a következőt mondja: a kényszerek által megengedett gyorsulásváltozások közül a legkisebb valósul meg. Variációs módszerrel alakítható ez tovább, amikor csak a gyorsulást variáljuk. Holonom-szkleronom kényszerekre  $\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \delta x_i = 0$ . Ez időderiválás után:  $\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \delta \ddot{x}_i = 0$ . Ugyanakkor a kényszert is megvariáljuk:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - X_i) \delta \ddot{x}_i = 0$$

Ehhez hozzáadva a szokásos módon Lagrange multiplikátorral a kényszereket:

$$\sum_{i=1}^{3N} \left( m_i \ddot{x}_i - X_i - \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \right) \delta \ddot{x}_i = 0$$

Ismét a megszokott módon a megválasztás független, illetve ahol nem, ott a Lagrange együtthatókat választjuk meg, tehát:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i - \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}$$

## Általános koordináták és a Lagrange-féle másodfajú mozgástörvény

Az eddigi tárgyalásokban a kényszerek, mint független egyenletek voltak figyelembe véve. Ha azonban olyan koordinátákra térünk át, amelyek illeszkednek a kényszerekhez, akkor ezekben ezek a feltételek eltűnnek, így egyszerűbb alakot kapunk a mozgásegyenletekre. Az állítás az, hogy ilyen transzformációk léteznek, az ilyen áttéréssel kapott új koordinátákat általános koordinátáknak nevezzük, és  $q_k$ -val jelöljük, az általános sebességeket pedig  $\dot{q}_k$ -val. Itt kell megjegyezni, hogy ezek nem feltétlen hosszúság illetve sebesség dimenziójú változók.

A koordináta transzformációs függvények deriváltjaival és kis megváltozásaival átírható a d'Alembert-elv variációs módszerrel. Ha

bevezetjük a  $Q_k = \sum_{i=1}^{3N} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$  általánosított erőt, amely nem feltétlen erő dimenziójú, de a

$$\sum_i Q_i \delta q_i$$

munka dimenziójú. Továbbá bevezetjük a mozgásienergiát:  $K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2$ . Ezekkel átírva a d'Alembert-elv a következő alakú lesz:

$$\sum_{k=1}^f \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0$$

Itt  $f$  a szabadsági fokok száma (a  $3N$  szabadság az  $s$  darab kényszerrel csökkentve). A tetszőleges variáció miatt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k, k = 1, \dots, f$$

Ezek a Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek. Ha az erők konzervatívak, akkor felírhatók potenciál deriváltjaként, és ekkor minden  $K$  helyére  $K-V$  írandó, amelyet elnevezhetünk Lagrange-függvénynek, így a képlet a jól ismert alakot ölti:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, k = 1, \dots, f$$

Ezek felhasználásával általános módszert adhatunk a mechanikai problémák megoldására: Ismerjük fel a rendszert jellemző általános koordinátákat, és írjuk fel a transzformációs függvényeket. Az így definiált általános koordinátákkal fejezzük ki a potenciált ( $V$ ), az általános sebességekkel pedig a kinetikus energiát ( $K$ ). Végül írjuk fel a Lagrange-függvényt ( $L = K - V$ ), és belőle a Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenleteket. Az így kapott mozgásegyenlet pedig elvileg megoldható.

## Hamilton-féle variációs elv és az Euler-Lagrange egyenletek

A Hamilton által kimondott variációs elv, az eddigieken azért mutat túl, mert nem csupán a mechanikai problémák általános megfogalmazásában használható, hanem az optika és a kvantummechanika törvényeit is egyszerűen meg lehet általa fogalmazni. Konzervatív rendszerre az állítás a következő:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \text{extrémum}$$

Itt  $S$  a hatás,  $L$  a Lagrange-függvény. Az állítás az, hogy ebből  $q_k(t)$  meghatározható. A problémát variációs számítási módszerekkel lehet megoldani, amely egy funkcionált szélsőértékbe vevő függvényeket határozza meg. Ez pont az itteni probléma, hiszen a Lagrange az általánosított koordinátáktól, sebességektől és esetleg az időtől függ, és mi az általánosított koordinátákat keressük. A variációs módszerből adódó egyenlet a következők:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, k = 1, \dots, f$$

Ezek az Euler-Lagrange egyenletek.

## Kanonikus egyenletek, Hamilton-függvény

Az eddig használt Lagrange leírásban másodrendű differenciálegyenletet kaptunk. Az úgynevezett kanonikus egyenletek azzal szemben elsőrendű differenciálegyenleteket szolgáltatnak, amelyek a másodrendűekkel egyenértékűek, azonban kétszer annyi van belőlük. Bevezetjük a kanonikusan konjugált impulzust:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

És bevezetjük a Hamilton-függvényt:

$$H = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L$$

Az Euler-Lagrange egyenletek figyelembevételével, és a Hamilton-függvény teljes differenciájának felhasználásával kapjuk a kanonikus egyenleteket:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

Továbbá:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Ha a rendszer konzervatív, és az általánosított koordinátákra való áttérés időfüggetlen, akkor a Hamilton-függvény a mechanikai energiát adja. Ennek a formalizmusnak kiemelkedő szerepe van a kvantummechanika és a kvantumtérelméletek tárgyalásánál.

## Ciklikus koordináták, kanonikus transzformáció

Ha a Hamilton-függvény nem függ valamely koordinátától, akkor az ahhoz a koordináta-hoz tartozó konjugált impulzus állandó a kanonikus egyenletek miatt, és azonnal megoldást szolgáltat a mozgásegyenletre ( $q_k(t) = \dot{q}_k \cdot t + c = \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot t + c$ ). Az ilyen tulajdonságú

koordinátát ciklikus koordinátának nevezzük. Értelemszerűen minél több ciklikus koordinátánk van, annál egyszerűbb megoldani az adott problémát. Ezért érdemes foglalkozni azokkal a transzformációkkal, amelyek változatlanul hagyják a kanonikus egyenleteket, de ciklikus koordinátákra térhetünk át segítségükkel. Ezek a transzformációk tehát olyan koordináták között visznek át, amelyek teljesítik a kanonikus egyenletet továbbá a variációs elvnek is eleget tesznek (a kanonikus egyenletek is abból származtathatóak). Ezek alapján belátható, hogy a variált funkcionálban van egy szabadságunk egy tetszőleges függvény időszerinti deriváltjának erejéig. Ezt a függvényt nevezzük alkotó függvénynek, mert segítségével kifejezhetőek a transzformációs szabályok. Az alapján, hogy az alkotó függvényt melyik két változóval fejezzük ki a régi és új koordináta, régi és új impulzus) közül, különböző összefüggéseket kapunk a koordináták és az alkotó függvény között, valamint megkapjuk a Hamilton-függvény transzformációját is.

## Maupertuis-elv (\*)

A Maupertuis-elv energiamegmaradó rendszerekre vonatkozik, vagyis a Lagrange-függvény nem függ explicit az időtől. Az elv kimondja, hogy a rendszer által megtett út olyan, hogy a rövidített hatás

$$S_0 = \int p dq = \min.$$

ahol az integrált a pályára vett vonalintegrálként kell érteni.

## A Hamilton-Jacobi egyenlet

A mozgásegyenletek megoldhatóak egy szélsőséges transzformációval is, amennyiben a Hamilton-függvényt zérusra transzformáljuk. Ekkor mind a koordináták, mind az impulzusok deriváltjai nullával egyenlőek a kanonikus egyenletek értelmében. A Hamilton-függvényre vonatkozó transzformációs egyenlet az alkotófüggvénnyel kifejezve a következő:

$$\bar{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}$$

Mivel a végső Hamiltonnak zérust szeretnénk, ezzel a feltétellel egy speciális alkotófüggvényt definiálhatunk, amely a következő egyenletet elégíti ki:

$$0 = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

A Hamilton-függvény a koordináták, az impulzus és az idő függvénye lehet. Ezek közül az alkotó függvénnyel az impulzus is kifejezhető, ezért:

$$0 = H \left( q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Ez a Hamilton-Jacobi egyenlet, és S a hatásfüggvény, amelyet már korábban bevezettünk a Hamilton-féle variációs elvnel. A Hamilton-Jacobi egyenlet abban különbözik az eddigiektől, hogy parciális differenciálegyenlet, ezért határfeltételek is kellenek hozzá, és nehezebb megoldani, ennek ellenére ha nem közvetlenül a mozgásegyenletet akarjuk megkapni, csak összefüggéseket a hatás és a koordináták között, akkor sokfelé jól használható.

## A Liouville-tétel(\*)

A Hamilton-i mechanikai rendszerekre kimondható a Liouville-tétel, ami azt fogalmazza meg, hogy nem-disszipatív rendszerre a fázistérfogat állandó marad. Ha  $\rho$  a fázistérbeli eloszlás függvény, és a rendszer  $d$  dimenziós:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial \rho}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \rho}{\partial p^i} \dot{p}^i \right) = 0$$

Ez azért fontos egyenlet, mert nem csak egyensúlyi szituációkban használható, hanem sokrészesekés bonyolult dinamikai problémákra is, ezért alapvető fontosságú a statisztikus jelenségek tárgyalásában.

## Megmaradási tételek, mint szimmetriák következményei

A közismert és a klasszikus mechanikában előbukkanó megmaradási tételek igen egyszerűen következnek a Hamilton-függvényes formalizmusból.

### Impulzusmegmaradás

Az impulzusmegmaradás a tárgyalási koordináta-rendszer eltolásával szembeni invarianciából vezethető le. Ez tulajdonképpen a tér homogenitása: mindegy hogy hova tesszük a mechanikai rendszert, a Hamiltonja ugyanaz, és az események ugyanúgy zajlanak.

### Impulzusmomentum megmaradása

Az impulzusmomentum megmaradása a koordináta-rendszer elforgatásával szembeni invarianciából vezethető le. Ez tulajdonképpen a tér izotrópiája: mindegy hogy hogyan forgatjuk el a mechanikai rendszert, a Hamiltonja ugyanaz, és az események ugyanúgy zajlanak.

### Energiamegmaradás

Ez az időbeli eltolásból következik, azaz mindegy, hogy egy adott kísérletet mikor végzünk el, a lefolyása ugyanaz, a Hamiltonja ugyanaz.

### Noether-tétel(\*)

A Noether-tétel azt mondja, hogy a Lagrange-függvény szimmetriáihoz hogyan lehet megmaradó mennyiséget rendelni.

**Állítás:** Ha a Lagrange-függvénynek szimmetriája a:

$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow q'_i = q_i + \epsilon f_i(q, \dot{q}) \\ \dot{q}_i &\rightarrow \dot{q}'_i = \dot{q}_i + \epsilon \dot{f}_i(q, \dot{q}) \end{aligned}$$

akkor a következő mennyiség megmaradó:

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i$$

**Bizonyítás:**

$$L(q_i + \epsilon f_i, \dot{q}_i + \epsilon \dot{f}_i) - L(q_i, \dot{q}_i) = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \epsilon f_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon \dot{f}_i = \sum \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \epsilon f_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon \dot{f}_i = \epsilon \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i \right) = 0$$

### Záróvizsga tematika

A klasszikus mechanika alapjai | **A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása** | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktnál megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenológikus termodinamika | Elektro- és magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszervezet | A magfizika alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok | Kristályos anyagok fizikája | Nemeqyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

A lap eredeti címe: „[http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php/A\\_klasszikus\\_mechanika\\_elm%C3%A9leti\\_t%C3%A1rgyal%C3%A1sa](http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php/A_klasszikus_mechanika_elm%C3%A9leti_t%C3%A1rgyal%C3%A1sa)”

- A lap utolsó módosítása: 2009. augusztus 14., 16:48