Fizika BSc záróvizsga tételek (2010 tavasz)

1. A klasszikus mechanika alapjai
Kinematikai alapfogalmak, mozgás leírása különböző koordinátarendszerekben. Newton-törvények, mozgásegyenlet, tehetetlen és súlyos tömeg. Gyorsuló koordinátarendszerek (jelenségek a forgó Földön). Munka tétel. Pontrendszerek. Merev testek: egyensúly feltétele, tehetetlenségi tenzor, pörgettyűk. Galilei-, Lorentz-transzformáció, relativisztikus kinematika, relativisztikus dinamika. Energia, impulzus és impulzusmomentum megmaradási tételek tömegpontra és pontrendszerre. Négyesimpulzus.

2. A klasszikus mechanika elvei
Virtuális munka elve, D'Alembert-elv, Hamilton-elv. Legkisebb hatás elve. Lagrange-féle elsőfajú és másodfajú mozgásegyenletek. Hamilton függvény, kanonikus egyenletek. Kanonikus transzformációk. Szimmetriák és megmaradási tételek.

3. Egzaktul megoldható fizikai problémák
Csillapított- és kényszerrezgések, csatolt rezgések, lineáris lánc. Kepler-probléma, bolygómozgás. Kvantummechanikai problémák: potenciálvölgy, oszcillátor, rotátor. Hidrogénatom. Klasszikus határesetek. Keltő és eltüntető operátorok.

4. Folytonos közegek mechanikája
Rugalmas és képlékeny alakváltozások, Hooke-törvény, speciális deformációk. A deformáció jellemzése, feszültség- és deformációs tenzor. Hullámterjedés deformálható testekben, Doppler-effektus. Folyadékok tulajdonságai, hidrosztatika, felületi feszültség Laplace-törvények, felhajtóerő. Áramlások jellemzése, Bernoulli-egyenlet, tökéletes folyadék áramlása, Euler-egyenletek, viszkózus folyadék áramlása, örvények, turbulencia.

5. Fenomenologikus termodinamika
Termodinamikai állapotjelzők, hőtágulás, ideális gáz, kinetikus modell., Nyílt és zárt folyamatok, Carnot-folyamat. Főtételek. Termodinamikai potenciálok, fundamentális egyenlet. Van der Waals-gázok. Fázisátalakulások jellemzői, típusai, Gibbs-féle fázisszabály, fázisdiagramok. Kémiai potenciál, fázisegyensúlyok.

6. Elektro- és magnetosztatika, áramkörök
Coulomb- és Gauss-törvény, szuperpozíció elve, stacionárius áram. Vezetők, szigetelők, dielektrikumok, kondenzátor, magnetosztatika. Stacionárius áram, áramköri törvények: Kirchhoff-törvények, Ohm-törvény.

7. Elektrodinamika !
Lorentz-erő. Indukció. Maxwell-egyenletek. Elektromágneses tér energiája, impulzusa, impulzusmomentuma. Váltakozó áram. Rezgőkörök, transzformátor.

8. Hullámegyenlet és hullámjelenségek
Hullámegyenletek származtatása, megoldásai, rugalmas és elektromágneses hullámok. Hullámok vákuumban, dielektrikumban. Diszperzió, csoport és fázissebesség, Doppler-effektus. Retardált potenciálok. Hullámvezetők, üregrezonátorok, antennák. Dipólsugárzás, szórás szabad töltésen. Interferencia. Polarizáció, Fresnel-formulák, diffrakció, nemlineáris optika.

9. Geometriai optika és alkalmazásai
Eikonál. Fermat-elv, kapcsolat a klasszikus mechanikával. Paraxiális közelítés. Optikai, leképezési törvények, felbontóképesség. Optikai eszközök. Optikai jelenségek a természetben, kausztikák.

10. A kvantumelmélet alapvető kísérletei
Hőmérsékleti sugárzás, fotoeffektus, Compton-effektus. Rutherford-kísérlet, Millikan-kísérlet, atommodellek. Davisson-Germer-kísérlet, Stern-Gerlach-kísérlet, Einstein-de Haas-kísérlet, Zeeman-effektus.

11. A kvantummechanika alapjai
A kvantummechanika matematikai háttere, kvantummechanikai reprezentációk, Schrödinger- és Heisenberg-kép. Határozatlansági reláció, szabad részecske hullámfüggvénye, szuperpozíció. Anyaghullámok, valószínűségi értelmezés, a fizikai állapot leírása. Fizikai mennyiségek operátorai, sajátfüggvények, sajátértékek. Schrödinger-egyenlet és szeparálása. Impulzusmomentum operátor, sajátértékei, sajátfüggvényei. Spin, Pauli-egyenlet. Korrespondancia elv. Ehrenfest-tétel.

12. Atom- és molekulaszerkezet
Kvantummechanikai közelítő módszerek. Atomi energiaszintek, emissziós-, abszorpciós spektrumok. A hidrogénatom spektruma, felhasadások, Lamb-féle eltolódás. Spektrumvonalak felhasadása külső térben: Stark- és Zeeman-effektusok. Szórás centrális térben, hatáskeresztmetszet. Kvantumátmenetek, alagútjelenség. Spektroszkópia. He-atom, Kétatomos molekulák, Pauli-elv. Periódusos rendszer, kémiai kötések kvantummechanikai alapjai.

13. A magfizika alapjai
Az izotóp térkép, atommagok tömege, mérete, kötési energiája. Energia és tömeg ekvivalencia, tömegdefektus. A cseppmodell és a félempirikus kötési formula. Maghasadás, magfúzió, radioaktivitás. Sugárzás és anyag kölcsönhatása. Radioaktív bomlások, magátalakulások. Elemi részecskék és alapvető kölcsönhatások. Kísérleti eszközök.

14. A termodinamika statisztikus alapozása
Mikrokanonikus, kanonikus, nagykanonikus sokaság. Mikroállapotok fogalma, Boltzmann-entrópia, egyszerű alkalmazások. Az egyensúly stabilitása, fluktuációk. Maxwell-féle sebességeloszlás.

15. Kvantumstatisztikák
Bose-Einstein-eloszlás, ideális Bose-gáz, klasszikus határeset, Bose-Einstein kondenzáció. Hőmérsékleti sugárzás, Stefan-Boltzmann törvény. Fononok. Fermi-Dirac-eloszlás, Ideális Fermi-gáz, klasszikus határeset. Elektronfajhő.

16. Mágneses rendszerek
Mágnesség statisztikus elmélete: Ising modell. Atomi paramágnesség, atomi diamágnesség, Pauli szuszceptibilitás, Landau diamágnesség. Ferro-, antiferro-, ferrimágneses anyagok, ferromágneses domének, hiszterézis. Curie-Weiss-törvény. Speciális anyagok: spinüveg, mágneses ellenállás, szupravezetés.

17. Kristályos anyagok fizikája
Szimmetriák, pontcsoportok, Bravais-rácsok. Diffrakció, kinematikus elmélet. Elektron- és röntgendiffrakció sajátosságai. Elektronoptika, elektronmikroszkóp. Rácsrezgések termikus hatásai. Bloch-tétel, adiabatikus szétcsatolás. Sávszerkezet.

18. Nemegyensúlyi folyamatok leírása
Irreverzibilis folyamatok. Master egyenlet, részletes egyensúly. Ingadozási jelenségek: Brown-mozgás, diffúzió, Langevin-egyenlet, Brown-mozgás potenciálban, Drude-modell. Vezetési jelenségek.

19. Az asztrofizika alapjai
Az ősrobbanás elmélet alapvető feltevései, a Hubble-törvény, Friedmann-egyenletek szemléletes értelme. Galaxisok kialakulása, morfológiája. A HR diagram és a csillagfejlődés szemléletes képe, csillagok energiatermelése. Kompakt objektumok: fehér törpék, neutroncsillagok, fekete lyukak. Megfigyelés alapjai: luminozitás, magnitúdó, vöröseltolódás.

1. A klasszikus mechanika alapjai

Kinematikai alapfogalmak

helyvektor

sebesség

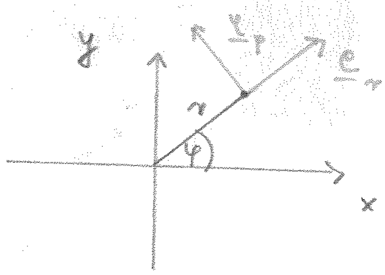
gyorsulás

Mozgás leírása különböző koord. r.

- Descartes

$$\underline{r} = (x, y, z)\,;\quad \underline{v} = \dot{\underline{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\,;\quad \underline{a} = \ddot{\underline{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

- henger



$$(x, y, z) \longrightarrow (r, \varphi, z')$$

$$z' = z\,;\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\,;\quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\underline{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi) = -\dot{\underline{e}}_\varphi \cdot \frac{1}{\dot{\varphi}}$$

$$\underline{e}_\varphi = \underline{e}_{r+90^\circ} = (-\sin\varphi, \cos\varphi) = \dot{\underline{e}}_r \cdot \frac{1}{\dot{\varphi}}$$

$$\underline{r} = r\underline{e}_r$$

$$\dot{\underline{r}} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\underline{e}}_r = \underbrace{\dot{r}}_{v_r}\underline{e}_r + \underbrace{r\dot{\varphi}}_{v_\varphi}\underline{e}_\varphi$$

$$\ddot{\underline{r}} = \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\underline{e}_r =$$

$$= \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)}_{a_r}\underline{e}_r + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})}_{a_\varphi}\underline{e}_\varphi$$

pl. körmozgás $r = \text{áll.} = R$

$$\underline{a}_{cp} = \underbrace{-R\dot{\varphi}^2}_{-R\omega^2}\underline{e}_r\,;\qquad \underline{a}_t = R\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi = R\beta\underline{e}_\varphi$$

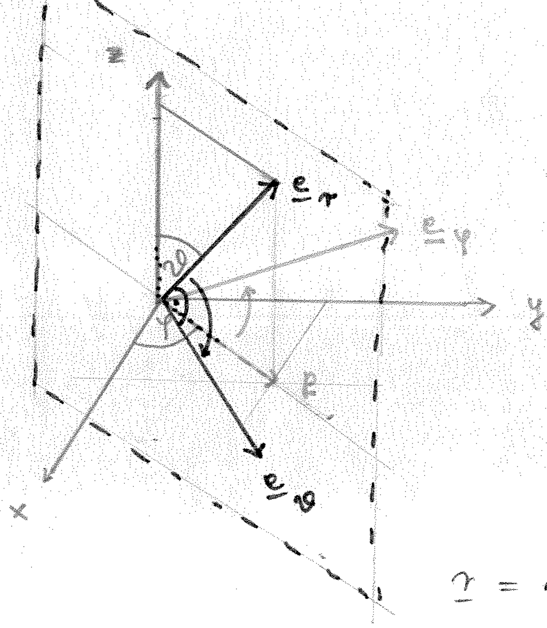
• gömbi

$(x, y, z) \longrightarrow (r, \vartheta, \varphi)$

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \to r$$

$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \quad \to \varphi$$

$$z = r \cos\vartheta \qquad x^2 + y^2 = r^2 \cdot \sin^2\vartheta \quad \to \vartheta$$



$$\underline{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta)$$

$$\underline{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi,\ \cos\vartheta\sin\varphi,\ -\sin\vartheta) =$$

$$= \underline{e}_{r\, -90°} \text{ a lila síkban}$$

$$\underline{e}_\varphi = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0) = \cancel{\ldots} \text{ x-y s.}$$

$$\underline{r} = r\underline{e}_r$$

$$\dot{\underline{r}} = \dot r \underline{e}_r + r \dot{\underline{e}}_r = \dot r \underline{e}_r + r\dot\vartheta \underline{e}_\vartheta + r\dot\varphi \sin\vartheta\, \underline{e}_\varphi$$

$$\dot{\underline{e}}_r = \dot\vartheta\, \underline{e}_\vartheta + \dot\varphi\, \underline{e}_\varphi \sin\vartheta$$

$$\dot{\underline{e}}_\vartheta = -\dot\vartheta\, \underline{e}_r + \dot\varphi \cos\vartheta\, \underline{e}_\varphi$$

$$\dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot\varphi \sin\vartheta\, \underline{e}_r - \dot\varphi\cos\vartheta\, \underline{e}_\vartheta$$

$$\ddot{\underline{r}} = \ddot r \underline{e}_r + \dot r \dot\vartheta \underline{e}_\vartheta + \dot r \dot\varphi \sin\vartheta\, \underline{e}_\varphi +$$

$$+ \dot r\dot\vartheta \underline{e}_\vartheta + r\ddot\vartheta \underline{e}_\vartheta + r\dot\vartheta(-\dot\vartheta \underline{e}_r + \dot\varphi\cos\vartheta\, \underline{e}_\varphi) +$$

$$+ (\dot r\dot\varphi \underline{e}_\varphi + r\ddot\varphi \underline{e}_\varphi)\sin\vartheta + r\dot\varphi\sin\vartheta(-\dot\varphi\sin\vartheta\, \underline{e}_r -$$

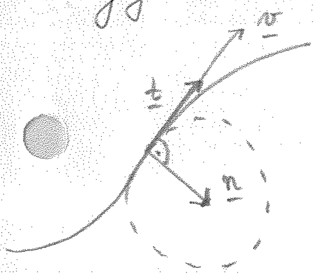
$$- \dot\varphi\cos\vartheta\, \underline{e}_\vartheta) =$$

$$= (\ddot r - r\dot\vartheta^2 - r\dot\varphi^2\sin^2\vartheta)\, \underline{e}_r + \qquad a_r$$

$$+ (r\ddot\vartheta + 2\dot r\dot\vartheta - r\dot\varphi^2 \sin\vartheta\cos\vartheta)\, \underline{e}_\vartheta + \qquad a_\vartheta$$

$$+ (r\ddot\varphi\sin\vartheta + 2\dot r\dot\varphi\sin\vartheta + 2r\dot\vartheta\dot\varphi\cos\vartheta)\, \underline{e}_\varphi \qquad a_\varphi$$

• együtt mozgó kr.



$$\underline{v} = v\,\underline{t}$$

$$\underline{a} = \dot{v}\,\underline{t} + v\,\dot{\underline{t}}$$

$$\dot{\underline{t}} = \dot{\varphi}\cdot\underline{n} \qquad \text{simulókör} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{v}{R}$$

$$\underline{a} = \dot{v}\,\underline{t} + \frac{v^2}{R}\,\underline{n} \qquad \underline{t} = \frac{\underline{v}}{v}$$

$$\underline{v}\times\underline{a} = v\,\underline{t} \times \left(\dot{v}\,\underline{t} + \frac{v^2}{R}\,\underline{n}\right) = \frac{v^3}{R}\cdot(\underline{t}\times\underline{n})$$

$$R = \frac{v^3}{|\underline{v}\times\underline{a}|}$$

pályaegyenlet: $x(t) = t$; $y(t) = f(x) = f(t)$

$$\underline{v} = (1, f') \qquad \underline{a} = (0, f'') \qquad \cos\alpha = \frac{\underline{v}\,\underline{a}}{|\underline{v}||\underline{a}|} = \frac{f'f''}{f''\sqrt{1+f'^2}}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{f''^2(1+f'^2) - f'^2f''^2}{f''^2(1+f'^2)} = \frac{1}{(1+f'^2)}$$

$$R = \frac{v^3}{|\underline{v}\times\underline{a}|} \Rightarrow R^2 = \frac{(1+f'^2)^3}{f''^2\cancel{(1+f'^2)}}\cdot \cancel{(1+f'^2)}$$

$$R = \frac{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''}$$

Newton-törvények, ME

I. $\exists$ inerciar.

II. a ME mindig másodrendű DE + 2 KF

$$\underline{a} = \underline{f}(\underline{r}, \underline{v}, t) \qquad \underline{f}: \text{erőtörvény} \quad \underline{f} = \frac{\underline{F}}{m}$$

III. 2 test KH-ban a gyors. hányadosa áll.

$$\frac{a_1}{a_2} = \text{áll.} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$$

IV. pontszerű testekre (nincs belső szab. fok) érvényes a szuperpozíció

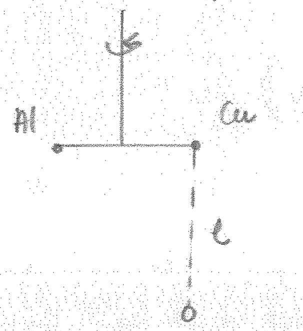
Tehetetlen és súlyos tömeg

$$F_{grav} = \gamma \frac{m_g M_g}{r^2} \overset{\text{tapasztalat}}{=} m_t a$$

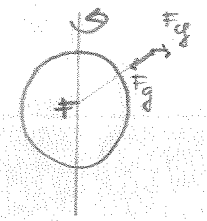
Kepler III. miatt $\quad m_g = m$

Kepler II. miatt $\quad F_g = F_c = F_{grav} \cdot \frac{r}{r} \Rightarrow \gamma = \text{áll.}$

kísérleti igazolás: Eötvös-inga



$$\left.\begin{matrix} m_s \cdot g \\ m_t\, \omega^2 \cdot s \end{matrix}\right\} \text{kicserélés} \Rightarrow \alpha \to -\alpha$$



torziós szál

egyensúlyi helyzete

10^{-9} pontosság

Gyorsuló koordinátarendszerek

a, transzláció $\quad \underline{r} = \underline{r}' + \underline{r}_0 \Rightarrow \underline{a} = \underline{a}' + \underline{a}_0$

b, forgás

- $\underline{r} = \underline{\underline{\Theta}}\, \underline{r}' \qquad r^2 = r'^2 \Rightarrow \underline{\underline{\Theta}}^T \underline{\underline{\Theta}} = 1 \quad \underline{\underline{\Theta}}^{-1} = \underline{\underline{\Theta}}^T$

  norma- és skalárszorzattartó

- $\underline{\underline{\Theta}}\, \underline{\underline{\Theta}}^T = 1 \Rightarrow \underbrace{\dot{\underline{\underline{\Theta}}}\, \underline{\underline{\Theta}}^T}_{\underline{\underline{\Omega}}} + \underbrace{\underline{\underline{\Theta}}\, \dot{\underline{\underline{\Theta}}}^T}_{\underbrace{(\dot{\underline{\underline{\Theta}}}\, \underline{\underline{\Theta}})^T}_{\underline{\underline{\Omega}}^T}} = 0 \qquad \underline{\underline{\Omega}} = -\underline{\underline{\Omega}}^T$

  antiszimm.

$$\underline{\underline{\Omega}}\, \underline{r} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

általánosan

$$\dot{\underline{A}} = \underline{\underline{\Theta}}\, \dot{\underline{A}}' + \underline{\omega} \times \underline{A}$$

- $\dot{\underline{\omega}} = \beta$

$$\beta = \underline{\underline{\Theta}} \cdot \dot{\underline{\omega}}' + \underline{\omega} \times \underline{\omega} = \beta'$$

gykr. (folyt.) 1/3

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \underline{\underline{\Theta}}\,\dot{\underline{r}}' + \dot{\underline{\underline{\Theta}}}\,\underline{r}'$$

$$\dot{\underline{v}} = \underline{a} = \dot{\underline{\underline{\Theta}}}\cdot\dot{\underline{r}}' + \underline{\underline{\Theta}}\cdot\ddot{\underline{r}}' + \ddot{\underline{\underline{\Theta}}}\,\underline{r}' + \dot{\underline{\underline{\Theta}}}\,\dot{\underline{r}}' = \underbrace{\underline{\underline{\Theta}}\,\ddot{\underline{r}}'}_{\underline{a}'} + 2\underbrace{\dot{\underline{\underline{\Theta}}}\,\dot{\underline{r}}'}_{\underbrace{\dot{\underline{\underline{\Theta}}}\underline{\underline{\Theta}}^T}_{\underline{\omega}}\times\underbrace{\underline{\underline{\Theta}}\,\dot{\underline{r}}'}_{\underline{v}'}} + \ddot{\underline{\underline{\Theta}}}\,\underline{r}'$$

$$\dot{\underline{\underline{\Omega}}} = \left(\dot{\underline{\underline{\Theta}}}\,\underline{\underline{\Theta}}^T\right)^{\cdot} = \ddot{\underline{\underline{\Theta}}}\,\underline{\underline{\Theta}}^T + \dot{\underline{\underline{\Theta}}}\,\dot{\underline{\underline{\Theta}}}^T$$

$$\ddot{\underline{\underline{\Theta}}}\,\underline{\underline{\Theta}}^T = \dot{\underline{\underline{\Omega}}} - \dot{\underline{\underline{\Theta}}}\,\dot{\underline{\underline{\Theta}}}^T = \dot{\underline{\underline{\Omega}}} + \underline{\underline{\Omega}}^2$$

$$\underline{\underline{\Theta}}^T\underline{\underline{\Theta}}$$

$$\underbrace{\dot{\underline{\underline{\Theta}}}\,\underline{\underline{\Theta}}^T}_{\underline{\underline{\Omega}}}\,\underbrace{\underline{\underline{\Theta}}\,\dot{\underline{\underline{\Theta}}}^T}_{-\underline{\underline{\Omega}}}$$

$$\underline{r} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{r}'$$

$$\underline{r}' = \underline{\underline{\Theta}}^T\underline{r}$$

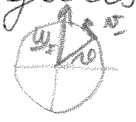
$$\underline{a} = \underline{a}' + 2(\underline{\omega}\times\underline{v}') + \underline{\beta}\times\underline{r} + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r})$$

$$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{\omega}\times\underline{r}$$

$$\underline{F} = m\underline{a}$$

$$m\underline{a}' = \underline{F} - 2m(\underline{\omega}\times\underline{v}') - m(\underline{\beta}\times\underline{r}) - m\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r})$$

Coriolis — szöggy. — centrifugális



$$\omega_F \approx \frac{2\pi}{\text{nap}} = 7{,}4\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{s}$$

$$\beta_F \approx -4{,}8\cdot 10^{-22}\,\frac{1}{s^2}$$

$$R_F \approx 6{,}4\cdot 10^{6}\,m$$

$$g \approx 10\,\frac{m}{s^2}$$

$$v = 10\,\frac{m}{s}$$

cf.	$\omega_F^2 R_F \sin\vartheta$	10^{-2}
Cor.	$2v\omega_F\cos\vartheta$	10^{-4}
szgy.	$\beta_F R_F \sin\vartheta$	10^{-15}

10^{-4} rel. hiba

Coriolis: kitérés, lefolyó örvénylése, ciklon, passzát

Munkatétel

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \qquad / \cdot \dot{\underline{r}}$$

$$m\ddot{\underline{r}}\,\dot{\underline{r}} = \underline{F}\,\dot{\underline{r}} = P$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2\right) = P \qquad \int_{t_0}^{t_1} dt$$

$$E_{kin}(t_1) - E_{kin}(t_0) = W$$

Pontrendszerek

$$\underline{r}_i(t) \quad i = 1 \ldots N; \qquad m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i^{tot} = \underset{\text{külső}}{\underline{F}_i} + \sum_{j \neq i} \underline{F}_{ij} \qquad \underline{F}_{ij} = -\underline{F}_{ji}$$

Newton III.

- impulzust. $\underline{F}_{ii} = 0$

$$\sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underbrace{\sum_i \underline{F}_i}_{\underline{F}} + \underbrace{\sum_i \sum_j \underline{F}_{ij}}_{0} \qquad \underline{r}_0 = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{\underbrace{\sum_i m_i}_{M}}$$

$$M\ddot{\underline{r}}_0 = \underline{F} \qquad m\dot{\underline{r}}_0 = \underline{p} \qquad \underline{\dot{\underline{p}} = \underline{F}}$$

- tkp.-i t. $\underline{F} = 0 \Rightarrow \dot{\underline{p}} = 0 \Rightarrow \underline{p} = \text{áll.}$

$$\underline{\underline{r}_0(t) = \frac{\underline{p}}{m} t + \underline{r}_0(0)}$$

- imp. mom. t.

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \sum_{i \neq j} \underline{F}_{ij} \qquad \underline{N}_i = m_i (\underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i) \quad \text{def.}$$

$$\dot{\underline{N}}_i = \ldots \qquad / \sum_i$$

$$\dot{\underline{N}} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i + \sum_{i,j} \underbrace{\underline{r}_i \times \underline{F}_{ij}}$$

$$0 = \sum_{i<j} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{F}_{ij} \quad \text{ha}$$

$$\underline{\dot{\underline{N}} = \underline{M}}$$

$$\underline{F}_{ij} \parallel (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \quad \text{páronként}$$

O eltolása: $\underline{r}_i' = \underline{r}_i - \underline{s} \Rightarrow \underline{N} = \underset{\text{sajátp.}}{\underline{N}_0} + \underbrace{\underline{r}_0 \times \underline{p}}_{\text{pályap.}}$

$\underline{s} \doteq \underline{r}_0$

- energiat. (konz. $\Rightarrow E = K + V = \text{áll.}$)

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i^2 \qquad \Delta K = K(t_2) - K(t_1) =$$

$$= \sum_i \int \underline{F}_i^{tot} d\underline{r}_i \leftarrow \frac{d\underline{r}_i}{dt} dt$$

$$\dot{K} = \sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i \dot{\underline{r}}_i = \sum_i \underline{F}_i^{tot} \dot{\underline{r}}_i$$

$$\Delta K = \sum A_i$$

Merev testek

pontrendszerek $M\ddot{\underline{r}}_0 = \underline{F}$; $\dot{\underline{N}} = \underline{M}$

$$\underline{v} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TKP.}}}{\underline{v}_0} + \underline{\omega} \times (\underbrace{\underline{r} - \underline{r}_0}_{\text{rel. koord.}})$$

TKP.-i kr.-ben $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$

$$\underline{N}_s = \sum_{i=1}^{N} \underline{\varrho}_i \times m_i \dot{\underline{\varrho}}_i = \sum_i \underline{\varrho}_i \times (m_i \underline{\omega} \times \underline{\varrho}_i) =$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\underline{b})$$

$$= \sum_i m_i (\underline{\omega}\, \underline{\varrho}_i^2 - \underline{\varrho}_i(\underline{\omega}\,\underline{\varrho}_i)) = \underbrace{\sum_i \{ m_i (\underline{\varrho}_i^2 \underline{\underline{I}} - (\underline{\varrho}_i \circ \underline{\varrho}_i))\}}_{\hat{\Theta}} \underline{\omega}$$

$\hat{\Theta}$: teh. nyom. tenzor

szimm. ⇒ valós sé.

főtengelyr. ⇒ sé.-k (poz. def.)

eltolás után: $\underline{r}' = \underline{r} - \underline{a}$ Steiner-t.

$$\underline{\underline{\Theta}} = \int d^3 \underline{r}' \, \varrho(\underline{r}') \{ \underline{r}'^2 \underline{\underline{I}} - \underline{r}' \circ \underline{r}' \} =$$

$$= \int d^3 \underline{r} \, \varrho(\underline{r}) \{ (\underline{r}^2 + \underline{a}^2 + \cancel{2\underline{a}\underline{r}}) - \underline{r} \circ \underline{r} - \cancel{\underline{a} \circ \underline{r}} - \cancel{\underline{r} \circ \underline{a}} - \underline{a} \circ \underline{a} \}$$

TKP ⇒ $\int d^3\underline{r}\, \varrho(\underline{r})\, \underline{r}$ elsőr. tagok eltűnnek

energia

legyen $\underline{v}_0 \,!\, 0$

$$K = \frac{1}{2} \sum_k m_k |\dot{\underline{r}}_k|^2 = \frac{1}{2} \sum_k m_k (\underline{v}_0^2 + \underline{2\underline{v}_0 (\underline{\omega} \times \underline{r}_k)} + (\underline{\omega} \times \underline{r}_k)^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k m_k (\omega_i \omega_i |\underline{r}_k|^2 - \omega_i r_{ki} \omega_j r_{kj}) = \frac{1}{2} \sum_k m_k \omega_i \omega_j \Theta_{ij}$$

$\underline{\underline{\Theta}}\, \underline{e}_j = \Theta_j \underline{e}_j$ sé., sv. ⇒ $\underline{\omega} = \omega_1 \underline{e}_1 + \omega_2 \underline{e}_2 + \omega_3 \underline{e}_3$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \Theta_i \omega_i^2$$

pörgettyűk

gömbi $A = B = C$ rotátor $A = B$ $C = 0$

szimm. $A = B \neq C$ aszimm. $A \neq B \neq C \neq A$

$N_i = \Theta_{ij}\, \omega_j$ TKR-ben

pörgettyűk számolása

gömbi pörgettyű

$\underline{M} = 0 \qquad A = B = C$

$\underline{N} = A\,\underline{\omega}$

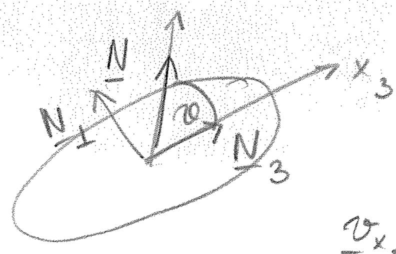
$\underline{\omega}_i$: i. teh. főtg. irányú része $\underline{\omega}$-nak

rotátor $A = B \,;\; C = 0$

$\underline{N} = A\,\underline{\omega}_1$

szimmetrikus erőmentes pörgettyű

$A = B \neq C \qquad \underline{R}_{TKP} = 0$



$\underline{N}_\perp = A\,\underline{\omega}_1$

$\underline{N}_3 = C \cdot \underline{\omega}_3$

$\underline{v}_{x_3} = \underline{\omega} \times x_3\, \underline{e}_3 \perp S(\underline{N}, \underline{e}_3)$

$\Downarrow$

$\vartheta = \text{áll.}$

$N_3 = \text{áll.} \Rightarrow \underline{N}_\perp = \text{áll.}$

$\underline{\omega} = \underline{\omega}_{pr} + \underline{\omega}_k$

$\cancel{x}_3$ tg. $\underline{\omega}_{pr.}$-sal forog $\underline{N}$ körül

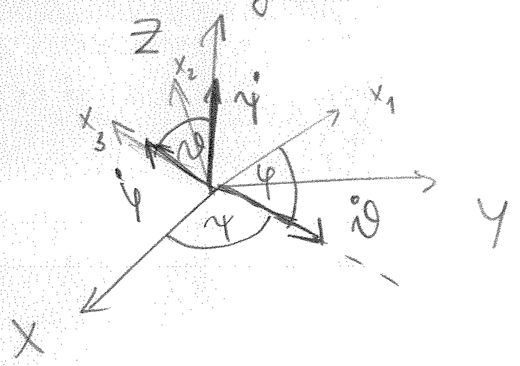
$\dot{\underline{N}} = \cancel{\underline{M}} + \underset{\Theta\underline{\omega}}{\underline{N}} \times \underline{\omega}$ Euler-egyenletek

$$\dot{\underline{N}} = \begin{pmatrix} \omega_2 \omega_3 (B - C) + M_1 \\ \omega_3 \omega_1 (C - A) + M_2 \\ \omega_1 \omega_2 (A - B) + M_3 \end{pmatrix}$$ főtg. r.-ben!

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{A}(A - C)\,\omega_2\omega_3 = \omega_2 \gamma$$
$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{A}(C - A)\,\omega_1\omega_3 = -\omega_1 \gamma$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_\perp \sin(\gamma t + \delta) \\ \omega_2 &= \omega_\perp \cos(\gamma t + \delta) \end{aligned}\right\} \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_\perp^2 \qquad \omega_\perp = \gamma$$

Euler-szögek



$$\underline{\omega}_\psi = \dot{\psi}\, \underline{e}_z \qquad Z$$

$$\underline{\omega}_\varphi = \dot{\varphi}\, (0, 0, 1) \qquad x_3$$

$$\underline{\omega}_\vartheta = \dot{\vartheta}\, (\cos\psi, -\sin\psi, 0) \quad \text{csomóv.}$$

$$\omega_1 = \sin\vartheta \sin\psi\, \dot{\psi} + \dot{\vartheta} \cos\psi$$

$$\omega_2 = \dot{\psi} \cos\psi \sin\vartheta - \dot{\vartheta} \sin\varphi$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} \cos\vartheta + \dot{\varphi}$$

$$K_{rot} = \frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2\right)$$

$$L = K - V$$

$V = Mgs \cos\vartheta \Rightarrow$ súlyos pörgettyű

aszimmetrikus erőmentes pörgettyű

Relativisztikus kinem. és din.

$s^2 = c^2t^2 - \underline{r}^2 \qquad ds' = ds$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\chi & \mathrm{sh}\,\chi \\ \mathrm{sh}\,\chi & \mathrm{ch}\,\chi \end{pmatrix} \text{ param. jó!}$$

O mozgása:

$$\left.\begin{aligned} ct &= ct'\,\mathrm{ch}\,\chi \\ x &= \mathrm{sh}\,\chi\, ct' \end{aligned}\right\} \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} = \mathrm{th}\,\chi$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1 \\ &\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}} = \frac{\mathrm{sh}}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2}} \quad \text{stb.} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \mathrm{sh} &= \dots \\ \mathrm{ch} &= \dots \end{aligned}$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \text{limesz: Galilei}$$

négyes formalizmus

$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x'^\nu \qquad ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx_\nu dx^\nu$

x^μ kontrav. $(ct, \underline{x})$

x_μ kov. $(ct, -\underline{x}) \qquad x_\mu = \eta_{\mu\nu}\, x^\nu$

skalár $s = s'$

négyesvektor $A^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, A^\nu$

négyestenzor

$\partial_\mu = (\partial_0, +\frac{\partial}{\partial \underline{x}})$; $\partial^\mu = (\partial_0, -\frac{\partial}{\partial \underline{x}}) \qquad \partial_\mu \partial^\mu = \Box$

kinematika

$u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{ds} \qquad u^\mu = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \dfrac{v/c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \qquad ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$

$u_\mu u^\mu = 1$ könnyű

$ds^2 = c^2dt^2 - d\underline{x}^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\overset{v^2}{\frac{d\underline{x}^2}{dt^2}}\right)$

$a^\mu = \dfrac{d^2x^\mu}{ds^2} = \dfrac{du^\mu}{ds} \qquad u^\mu a_\mu = 0$

egyenletesen gyorsuló (x tg. mentén) mozgás

$$a'^{\mu} = \left(0, \frac{a}{c^2}, 0, 0\right)$$

$$a^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, a'^{\nu} = \frac{a}{c^2}\begin{pmatrix} \operatorname{sh}\chi \\ \operatorname{ch}\chi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u^{\mu} = \dots$$

$$a^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{ds} \qquad \mu = 1\text{-re} \Rightarrow a = \frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \int, v$$

$$v = \dots = \frac{dx}{dt} \qquad x = \dots \quad \text{hiperbola}$$

$$x, t \text{ nagy} \Rightarrow x = ct$$

relat. dinamika

$$\underbrace{S := -\alpha \int_a^b ds \qquad \int}= \int_{t_a}^{t_b} L\, dt \qquad ds = c\,dt\sqrt{1-\beta^2}$$

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\beta^2} \qquad \beta \ll 1 \Rightarrow \text{klassz. limesz}$$

$$\alpha = mc$$

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\delta S = -mc\,\delta\int_a^b ds = -mc\,\delta\int_a^b \sqrt{dx_{\mu}dx^{\mu}} = -mc\int_a^b \frac{dx_{\mu}\,\delta dx^{\mu}}{\underbrace{ds}_{u_{\mu}}} =$$

$$= \cancel{-mc\left[u_{\mu}\delta x^{\mu}\right]_a^b} + mc\int_a^b \underbrace{\frac{du_{\mu}}{ds}\,ds}_{u_{\mu}}\, dx^{\mu} \overset{!}{=} 0$$

Landauban megnézni

$$p^{\mu} \overset{!}{=} -\partial^{\mu} S = mc\,u^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, p\right) \qquad p_{\mu} = \left(\frac{E}{c}, -p\right)$$

$$u_{\mu}u^{\mu} = 1 \Rightarrow p_{\mu}p^{\mu} = m^2c^2$$

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$$

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \qquad \text{tömeghéj}$$

$$F^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{ds} = mc\frac{du^{\mu}}{ds} \qquad F^{\mu}u_{\mu} = 0$$

$$F^{\mu} = \dots$$

2. A klasszikus mechanika elvei

Newton-törvények átfogalmazása, axiómák

Virtuális munka elve

N tömegpont

$\delta \underline{r}_i$: az i. anyagi pontnak a kényszerek által megengedett infinitezimális és virtuális elmozdulása

es. $\Leftrightarrow$ erők virtuális munkája zérus

$$\sum_i \underline{F}_i \delta \underline{r}_i = 0$$

szabad mozgás $\Rightarrow$ $\underline{F}_i = 0 \ \forall$ i-re

$N \to 3N$ koord. $s < 3N$ kényszer

kényszerfelület: $\phi(r_1, \dots, r_N) = 0$

$$\sum_i \underline{\nabla}_i \phi_k \delta \underline{r}_i = 0 \qquad k = 1 \dots s \ (< 3N)$$

$$\sum_i (\underline{F}_i + \sum_k \underline{\nabla}_i \phi_k \lambda_k) \delta \underline{r}_i = 0 \quad \text{Lagr.-multiplikátor}$$

3N-s eh. zérus, többinél λ_ℓ választása úgy, hogy eltűnjenek!

virt. elmozdulások ftl.-el

$$\underline{F}_i + \underbrace{\sum_k \lambda_k \underline{\nabla}_i \phi_k}_{\text{kényszererők}} = 0$$

kényszererők: merőlegesek a felületre

D'Alembert-elv

$\sum_i (\underline{F}_i - \dot{\underline{p}}_i) \delta \underline{r}_i = 0$ a mech. r. úgy mozog, hogy ez az egyenlet minden pillanatban telj.

$$\sum_i (\underline{F}_i + \sum_k \lambda_\ell \underline{\nabla}_i \phi_k - \dot{\underline{p}}_i) \delta \underline{r}_i = 0 \quad \text{kényszerfelt.}$$

$$\dot{p}_i = F_i + \sum_k \lambda_k \nabla_i \phi_k$$

$$m_i \ddot{r}_i = F_i + \sum_k \lambda_k \nabla_i \phi_k$$ Lagr.-f. elsőfajú ME

<u>Hamilton-elv</u> (stac. hatás, legkisebb hatás elve)

kényszerekhez illeszkedő koord.: ált. koord 3N-s

áll.: ∃ ilyen transzf., q_k, $\dot{q}_k$

konzervatív rendszerre $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = $ ext.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt =$$ kiesik a t-s tag

$$= \cancel{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2}} + \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)}_{0} \delta q\, dt = 0$$

Lagr.-f. másodfajú ME ; ELE

<u>Kanonikus egyenletek, $\mathcal{H}$-fv.</u>

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad \mathcal{H} = \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$$ Einstein-konv. Legendre-tr.

$$d\mathcal{H}(p, q, t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt =$$

$$= dp_k \dot{q}_k + \cancel{p_k d\dot{q}_k} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \dot{p}_k} dq_k - \underbrace{\cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k}}_{p_k d\dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$\underline{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = \dot{q}_k} \qquad \underline{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = -\dot{p}_k} \qquad \underline{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$$

konzervatív rendszerben

$$\sum_i (m_i \ddot{x}_i - X_i)\,\delta x_i = 0 \quad \text{(D'Alembert-elv)}$$

áttérés általános koordinátákra

$$\delta x_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\,\delta q_k \qquad (1)$$

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\,\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \qquad (2)$$

$$(1) \rightarrow \quad \sum_k \left\{ \sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} - \underbrace{X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}}_{Q_k} \right\} \delta q_k = 0$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i} \underbrace{\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}}_{(2)\rightarrow} = \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \underbrace{\sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}}_{\frac{\partial K}{\partial q_k}}$$

$$\sum_k \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} - Q_k \right) = 0$$

$$Q_k = -\frac{\partial}{\partial q_k} V(q_1 \dots q_k) \qquad \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0 \ \forall\, k\text{-ra!}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (K-V)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (K-V)}{\partial q_k} = 0 \qquad \| \ \text{ELE}$$

$L = K - V$ konzervatív rendszerre

kanonikus transzformációk

ha $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow q_i$ ciklikus koord., és $p_i =$ áll.

koord. + impulzustranszf.

f dim. konfigurációs tér transzf. $\rightarrow$ $2f$ dim. fázistér

könnyű lenne H-e.-ket megoldani, ha ciklikus koordinátákkal tudnánk tenni mindent

$$\mathcal{H}(\underbrace{p_1 \dots p_f}_{\alpha_1 \dots \alpha_f}, \cancel{q_1 \dots q_f}) \qquad q_i = \omega_i t + c_i \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha_i} = \omega_i$$

akkor ezek megoldhatók p-ből

$$(q_i, p_i) \rightarrow (Q_k, P_k) \qquad Q_k(p_1 \dots p_f, q_1 \dots q_f, t)$$
$$P_k(p_1 \dots p_f, q_1 \dots q_f, t)$$

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H'}{\partial P_k} \qquad \dot{P}_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q_k}$$

alkotófv.-ek : régi és új változók közti kapcs.

$$W_{1-4} : \quad \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{f} P_i \dot{Q}_i - H' + \frac{dW}{dt}$$

$$W_1(q_i, Q_i, t); \quad W_2(q_i, P_i, t), \quad W_3(p_i, Q_i, t), \quad W_4(p_i, P_i, t)$$

$$\sum p_i \dot{q}_i - H = \sum P_i \dot{Q}_i - H' + \frac{\partial W_1}{\partial t} + \sum \frac{\partial W_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial W_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i$$

$$\sum \left(p_i - \frac{\partial W_1}{\partial q_i}\right) \dot{q}_i - H = \sum \left(P_i + \frac{\partial W_1}{\partial Q_i}\right) \dot{Q}_i - H' + \frac{\partial W_1}{\partial t}$$

$$W_1(q_i, Q_i, t) \qquad H' = H + \frac{\partial W_1}{\partial t} \qquad P_i = -\frac{\partial W_1}{\partial Q_i} \qquad p_i = \frac{\partial W_1}{\partial q_i}$$

$$\left.\begin{aligned} W_2 &= W_1 + \sum P_e Q_e \\ W_3 &= W_1 - \sum p_e q_e \\ W_4 &= W_1 + \sum P_e Q_e - \sum p_e q_e \end{aligned}\right\} \text{Legendre-tr.-k!}$$

Szimmetriák és megmaradási tételek

Noether-t.: $\forall$ folytonos szimmetriához tart. egy megmaradó menny.

$$q_i : \; q_i' = q_i + \varepsilon f_i(q, \dot q) \quad \text{akkor} \quad \underset{\uparrow \text{ Lagrange}}{L} = \text{áll.}$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} f_i = \text{áll.}$$

ez nem csak $\approx$?

$$L(q_i + \varepsilon f_i, \dot q_i + \varepsilon \dot f_i) - L(q_i, \dot q_i) \approx$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \varepsilon f_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \varepsilon \dot f_i \right) = \varepsilon \underset{\text{ELE m.}}{\frac{d}{dt}} \Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \cancel{\times} f_i}_{\text{áll.}} \Big) = 0$$

- tér homogén $\Rightarrow$ imp. megm.

$$r_i' = r_i + \delta r$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \sum_i p_i = p = \text{áll.}$$

- tér izotróp

$$r_i' = r_i + \delta r_i \qquad \delta r_i = \delta \varphi \, \vec{e} \times \vec{r}$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \times \vec{r} = \sum_i \vec{p_i} \times \vec{r} = \sum_i N_i \Rightarrow N = \text{áll.}$$

- idő homogén

$$t' = t + t_0$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \text{áll.}$$

3. Egzaktul megoldható fizikai problémák

Csillapított - és kényszerrezgések

- $x + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2 = 0 \qquad \gamma = 2\beta$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}}{-2} = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

alulcsillapított rezg.
kritikus csill. ⇒ lin. tag is
felülcsillapított ⇒ rezg. + exp. lecsengés

- $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin(\omega t)$

$x_p = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ tg φ ; A part. mo.

$A(\omega)$ max. ? FWHM ? ω_1, ω_2 $\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ -nél

↳ $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ ⇒ A_{max} + rezonanciakatasztrófa

$\omega_1^2 - \omega_2^2 = \dots$

$$\left.\begin{array}{l} A(\omega_r) \sim \frac{1}{\beta} \\ \omega_2 - \omega_1 \sim \beta \end{array}\right\}$$

fázistolás:
nagy ω → ellentétes m.
$0 - \pi$

Csatolt rezgés

$$m\ddot{x}_1 = -Dx_1 + k(x_2 - x_1) \qquad \omega_0^2 = \frac{D}{m}$$
$$m\ddot{x}_2 = -Dx_2 + k(x_1 - x_2) \qquad \Omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = A_1 \sin\omega t \\ x_2 = A_2 \sin\omega t \end{array}\right\} \quad A_1, A_2 \text{ behelyettesíteni!!!}$$

2 spec. ind. felt. $\omega^2 = \omega_0^2$; $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2$

$A_1 = A_2$ $\qquad$ $A_1 = -A_2$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dots \\ x_2 = \dots \varphi_1 \end{array}\right\} A_1^1$ $\qquad$ $\begin{array}{l} x_1 = \dots \\ x_2 = \dots \varphi_2 \end{array}$ A_1^2

x_1: 4 szabad param. → ált. mo.

x_2 - ben már nincs szabadságom

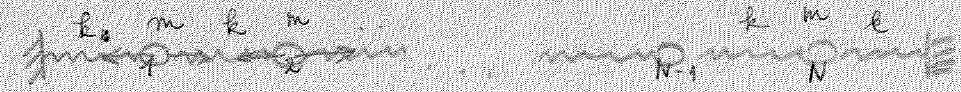
lebegés: k kicsi, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\omega_1 \approx \omega_2$

$$x = \frac{A_1 + A_2}{2} \sin \omega_1 t + \frac{A_1 - A_2}{2} \sin \omega_1 t + \frac{A_1 + A_2}{2} \sin \omega_2 t +$$
$$+ \frac{A_2 - A_1}{2} \sin \omega_2 t =$$

$$= \frac{A_1 + A_2}{2} \left(\quad + \quad \right) + \frac{A_1 - A_2}{2} \left(\quad - \quad \right)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cos \quad \sin$$

Lineáris lánc



→ +

$$\left.\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\
m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) \\
m\ddot{x}_3 &= -k(x_3 - x_2) + k(x_4 - x_3) \\
&\vdots \\
m\ddot{x}_{N-1} &= -k(x_{N-1} - x_{N-2}) + k(x_N - x_{N-1}) \\
m\ddot{x}_N &= -k(x_N - x_{N-1}) + k x_N
\end{aligned}\right\}$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\ddot{\underline{u}} = \underline{\underline{M}}\, \underline{u}$

$\underline{u} = \underline{a}\, e^{i\omega t}$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \dots & & 0 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \dots & 0 \\ & & \cdot & & \end{pmatrix} = \omega_0^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{M}}'}$$

$$-\omega^2 \underline{a} = \omega_0^2 \underline{\underline{M}}' \underline{a}$$

$\underline{\underline{M}}' \underline{a} = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \underline{a}$ $\quad -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \lambda$ sé. $\quad \underline{a}_\lambda$ módus

DGy-nél megnézni

Kepler-probléma, bolygómozgás

Centrális erők $\Rightarrow \underline{F} \parallel \underline{r} \Rightarrow \underline{M} = \underline{\dot N} = 0, \; \underline{N} = \text{áll.} \Rightarrow$ síkmozg.

$$a_r = \ddot r - r\dot\varphi^2$$

$$a_\varphi = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi$$

$$m a_r = -V'(r)$$

$$m a_\varphi = 0$$

$$m r^2\dot\varphi = N = \text{áll.}$$

$$\dot\varphi = \frac{N}{m r^2}$$

$$m a_r = m\ddot r - \cancel{m}\cancel{r}\frac{N^2}{m^{\cancel{2}} r^{\cancel{4}3}} = -V'(r)$$

$$m\ddot r = -V'_{eff}(r)$$

$$V_{eff}(r) = V(r) + \underbrace{\frac{N^2}{2mr^2}}_{\text{cf. pot. taszító}}$$

$$V(r) = -\frac{\alpha m}{a r^a}$$

$$V_{eff}\begin{cases} a < 0 \\ 0 < a < 2 \quad \} \text{ stabil körp.} \\ a = 2 \quad \} \text{ kh.-tól függ} \\ a > 2 \quad \} \text{ instabil körp.} \end{cases}$$

bolygópályák: $a = 1$

$r(\varphi) = ?$ $\qquad N = m r^2\dot\varphi$

$$r = \frac{1}{u} \qquad \dot r = -\frac{u'}{u^2}\dot\varphi = -u' r^2\dot\varphi = -u'\frac{N}{m}$$

$$E = \overset{K}{\frac{m}{2}\dot r^2} \overset{+}{+} \overset{V_{eff}}{\frac{N^2}{2mr^2} - \frac{\alpha m}{r}} = \frac{N^2}{m}\left[\frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}u^2 - \frac{u}{p}\right] \qquad p = \frac{N^2}{\alpha m^2}$$

$$\frac{d}{d\varphi} \qquad u''\cancel{u'} + u\cancel{u'} - \frac{\cancel{u'}}{p} = 0$$

$$u'' = -u + \frac{1}{p} \quad \text{harm. osc.} \qquad -y = -u + \frac{1}{p}$$

$$y'' = -y \qquad y = A\cos(\varphi) \qquad y'' = u''$$

$$u = A\cos\varphi + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi = \frac{1}{r}$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

$0 \leq \varepsilon \leq 1$ ellipszis

$\varepsilon = 1$ parabola

$\varepsilon \geq 1$ hiperbola

$$r + \varepsilon \underbrace{r\cos\varphi}_{x} = p$$

$$r = p - \varepsilon x$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = p^2 - 2\varepsilon p x + \varepsilon^2 x^2$$

$$(1-\varepsilon^2)x^2 + 2p\varepsilon x + y^2 = p^2$$

$$(1-\varepsilon^2)\left\{ x^2 + \frac{2p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}x \right\} + y^2 = p^2$$

$$(1-\varepsilon^2)\left\{ \left(x + \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2 - \frac{p^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \right\} + y^2 = p^2$$

$$\frac{\left(x + \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\frac{1}{1-\varepsilon^2}} + y^2 = p^2 + \frac{p^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$$

$$\frac{\left(x + \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\underbrace{\frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}}_{a^2}} + \frac{y^2}{\underbrace{\frac{p^2}{1-\varepsilon^2}}_{b^2}} = 1$$

leolvasható minden

$b = \frac{a^2}{p}$ $\qquad e = \underset{\text{exc.}}{\varepsilon} a$

hiperbola asszimptotái?

KF; N, E $\qquad r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon} \qquad E = V_{eff}(r_{min}) = \frac{N^2}{2mp^2}(1+\varepsilon)^2 - \frac{\alpha m}{p}(1+\varepsilon)$

$$p = \frac{N^2}{\alpha m^2}$$

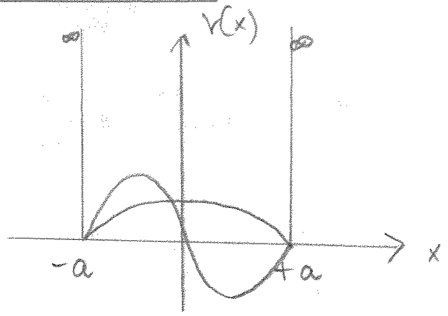
$$E = \frac{\cancel{N^2}}{2mp\frac{\cancel{N^2}}{\alpha m^2}}(1+\varepsilon)^2 - \frac{\alpha m}{p}(1+\varepsilon) = \frac{\alpha m}{p}\cdot\frac{1}{2}\left\{ \cancel{1} + \cancel{2\varepsilon} + \varepsilon^2 \underset{-1}{\cancel{-2}} - \cancel{2\varepsilon} \right\}$$

$\varepsilon \gtreqless 1 \iff E \gtreqless 0$!

$\left.\begin{array}{l} a = \dots \\ b = \dots \end{array}\right\}$ energiával

Kvantummechanikai problémák

- potenciálvölgy



$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

$$\phi(a) = 0$$

$$\phi(-a) = 0$$

$$\Psi(x,t) = T(t)\,\phi(x) \quad \text{szeparálás}$$

$$T(t) = A e^{-\frac{iE}{\hbar}t} = A e^{-i\omega t}$$

$$\hat{H}\phi = E\phi \quad \text{sé. - keresés}$$

$$\phi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E} \qquad k = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \phi(x) = A' \sin(kx)$$

$$k = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a} \Rightarrow \phi(x) = B' \cos(kx)$$

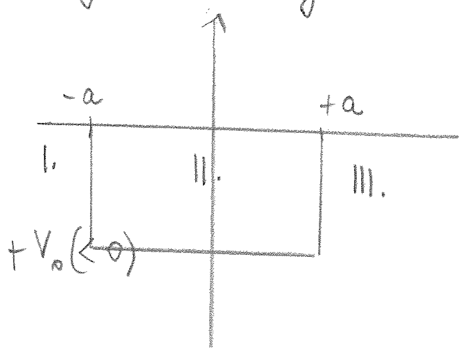
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x,t)|^2 = \int_{-a}^{a} |\phi(x)|^2 = 1$$

$$\int_{-a}^{a} |A'|^2 \cdot \sin^2(kx) = a \cdot |A'|^2 = 1 \qquad A' = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\int_{-a}^{a} |B'|^2 \cdot \cos^2(kx) = a \cdot |B'|^2 = 1 \qquad B' = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \ell^2 \pi^2}{8ma^2} \begin{cases} \ell \text{ ps. } \sin \\ \ell \text{ ptl. } \cos \end{cases}$$

véges mély esetén



$$\phi_I = A e^{\kappa x} + \cancel{B e^{-\kappa x}} \qquad \kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(-E)}$$

$$\phi_{II} = C e^{kx} + D e^{-kx} \qquad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)}$$

$$\phi_{III} = \cancel{E e^{\kappa x}} + F e^{-\kappa x}$$

$$\left.\begin{matrix} \phi_I(-a) = \phi_{II}(-a) & \phi_{II}(a) = \phi_{III}(a) \\ \phi_I'(-a) = \phi_{II}'(-a) & \phi_{II}'(a) = \phi_{III}'(a) \end{matrix}\right\} + \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\phi(x)|^2 = 1$$

- harmonikus oszcillátor

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$

$$[a, a^+] = 1\!\!1$$

$$\hat{N} = a^+a$$

?

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ a^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \end{aligned}\right\}$$ N s. áll. generálják

$$\left.\begin{aligned} [\hat{N}, a^+] &= a^+ \\ [\hat{N}, a] &= -a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \hat{N}(a|n\rangle) &= n-1\,(a|n\rangle) \\ \hat{N}(a^+|n\rangle) &= n+1\,(a^+|n\rangle) \end{aligned}\right\} \cancel{*}$$

legyen $a|n_0\rangle = n_0|n_0 - 1\rangle = 0 \Rightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$

$\hat{N}|0\rangle = 0$

ebből $|n_0\rangle$ meghatározható

majd $a^+|n_0\rangle \rightarrow$ többi s. áll.

- rotátor

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2\mu}}\Delta\Psi = E\Psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\cancel{\Delta_r} + \frac{\hat{J}^2}{\hbar^2 r^2}\right)\Psi = E\Psi$$

$$\frac{\hat{J}^2}{2\Theta}\Psi = E\Psi$$

Nem sfv.

$j(j+1)$ sé.

KÉPZŐ KÖZPONT
SZÉKESFEHÉRVÁR

OLDAL:

TÉMA: harmonikus oszcillátor rendesen

DÁTUM:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right) \qquad a^+$$

$$\hat{N} = a^+a \qquad \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

$$[a, a^+] = 1\!\!1$$

$$[\hat{N}, a] = -a$$

$$[\hat{N}, a^+] = a^+$$

könnyű

$$\hat{N}(a|n\rangle) = (a\hat{N} - a)|n\rangle = a(n|n\rangle - |n\rangle) = n-1\,\underbrace{(a|n\rangle)}_{c_1|n-1\rangle}$$

$$\hat{N}(a^+|n\rangle) = (a^+\hat{N} + a^+)|n\rangle = a^+(n|n\rangle + |n\rangle) = n+1\,\underbrace{(a^+|n\rangle)}_{c_2|n+1\rangle}$$

$$\langle n|a^+a|n\rangle = c_1^2 \qquad \langle n|\underbrace{aa^+}_{a^+a+1\!\!1}|n\rangle = c_2^2$$

$$n\cancel{\langle n|n\rangle} = \qquad \underbrace{a^+a}_{\hat{N}} + 1\!\!1$$

$$c_1 = \sqrt{n} \qquad c_2 = \sqrt{n+1}$$

$$a|n_0\rangle = 0 \rightarrow |n_0\rangle$$

$$a^+|n_0\rangle = \ldots |n_1\rangle$$

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Regionális Munkaerőfejlesztő és Képző Központ "SZÉKESFEHÉRVÁR"

KÉPZŐ KÖZPONT
SZÉKESFEHÉRVÁR

OLDAL:

TÉMA:

DÁTUM:

• hidrogénatom

centrális erőtérben $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2 + U(r)$

$\underline{r}$, $\underline{R}$ változócsere

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_r - \frac{\hbar^2}{2M}\Delta_R + U(r) \qquad \psi = \varphi(\underline{R})\psi(\underline{r})$$

1. szabad r.

2. pot.-os tag

$\downarrow$

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r \cdot + \Delta_{\vartheta,\varphi}$$

$$\psi(\underline{r}) = \frac{1}{r}\chi(r) Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\chi'' + \left[U - E + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right]\chi = 0$$

$$\chi'' - \left[\frac{2m}{\hbar^2}\left[U + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\right]\chi = \cancel{E}\chi \quad 1D$$

$$\chi(0) \overset{!}{=} 0 \qquad \chi = C \cdot r^s$$

$$\chi(\infty) = 0 \quad (\chi \in L^2!) \qquad \text{kis } r\text{-re}$$

$s = l+1$!

Coulomb-térben $\Rightarrow$ H-atom

$$\chi'' + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] = 0$$

$$\xi = \frac{2r}{r_0} \qquad r_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m|E|}}$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi^2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{\xi} + \frac{l(l+1)}{\xi^2}\right)\chi = 0 \qquad \varepsilon = \frac{me^2 r_0}{\hbar^2}$$

$\xi \to \infty$ asz. mo. $e^{-\frac{1}{2}\xi}$

$$\chi = \xi^{l+1} e^{-\frac{1}{2}\xi} w(\xi) \leftarrow \text{hatványsor} = \sum a_s \xi^s$$

$$\xi w'' + (2l+2-\xi)\, w' + (\varepsilon - 1 - l)\, w = 0$$

$$\sum_s \left[a_s s(s-1) + 2(l+1) s a_s \right] \xi^{s-1} +$$

$$\sum \left[-a_s s + a_s(\varepsilon - l - 1) \right] \xi^{s} = 0$$

$s' = s-1 \qquad s = s'+1$ felső sorra

$$\sum \left[a_{s'+1} (s'+1)s + 2(l+1)(s'+1)\, a_{s'+1} \right] \cancel{\xi^{s'}} +$$

$$\sum \left[-a_s s + a_s(\varepsilon - l - 1) \right] \cancel{\xi^{s}} = 0$$

$$a_{s+1} = \frac{(\varepsilon - \overset{\text{egész}}{l} - 1 - \overset{\text{egész}}{s})}{(s+1)(2l+2+s)} (-a_s)$$

polinom, ha ε egész

$\varepsilon = l+1,\ l+2 \ \dots \qquad \varepsilon := n$

$$n = \varepsilon = \frac{m e^2 r_0}{\hbar^2} = \frac{m e^2}{\hbar^2} \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m|E|}} \right)$$

$$E = -\frac{m e^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{Ry}{n^2}$$

4. Folytonos közegek mechanikája

bevezetés

$$\underbrace{\frac{F}{A}}_{\sigma} = \underbrace{E}_{\text{Young-modulus}} \cdot \frac{\Delta l}{l} \Big\} \text{ relatív megnyúlás} \qquad \sigma_0 = E\varepsilon$$

Poisson-szám

$$\underbrace{\frac{\Delta d}{d}}_{\text{harántösszeh.}} = -\nu \underbrace{\frac{\Delta l}{l}}_{\text{rel. hossz.}}$$

$$\underbrace{\frac{F}{A}}_{\tau} = \mu \gamma$$

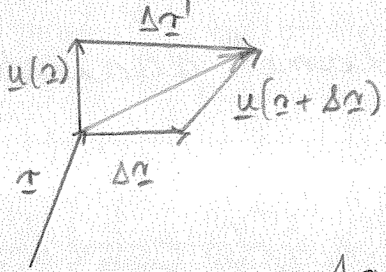
γ: szög

nyírási modulus

$\Delta l, \Delta d \Rightarrow$ rel. térf. vált. $\quad \dfrac{\Delta V}{V} \approx \dfrac{\Delta l}{l} + 2\dfrac{\Delta d}{d} \approx (1-2\nu)\underbrace{\dfrac{\Delta l}{l}}_{\sigma/E}$

K kompresszió modulus

deformációs tenzor



$$\underline{u}(\underline{r}) + \Delta\underline{r}' = \underline{u}(\underline{r}+\Delta\underline{r}) + \Delta\underline{r}$$

$$\Delta\underline{r}' = \underline{u}(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - \underline{u}(\underline{r}) + \Delta\underline{r}$$

$$\Delta r'_k = \Delta r_k + \underbrace{u_k(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - u_k(\underline{r})}$$

$$u_k\cancel{(\underline{r})} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\Delta r_l - \cancel{u_k(\underline{r})}$$

$$l^2 = |\Delta\underline{r}'|^2 \underset{\text{lin. rendig}}{=} \Delta r_k \Delta r_k + 2\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\Delta r_l \Delta r_k = l_0^2 + 2\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\Delta r_k \Delta r_l$$

$$l^2 - l_0^2 = \underbrace{(l+l_0)}_{2l_0+\Delta l}\underbrace{(l-l_0)}_{\Delta l} \approx 2l_0\cdot\Delta l = 2\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\Delta r_k \Delta r_l$$

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\underbrace{\frac{\Delta r_k}{l_0}}_{n_k}\underbrace{\frac{\Delta r_l}{l_0}}_{n_l}$$

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon_{kl}\, n_k n_l \qquad \underline{\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\partial_k u_l + \partial_l u_k\right)}$$

az antiszimm. rész ugyanis $n_k n_l$ szimm. tenzorral 0 járulékot ad energiasűrűség

$$\Phi = \int \varphi[\underline{\underline{\varepsilon}}]\, dV$$ lin. közelítés: $\varphi[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \frac{1}{2} C_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl}$

feszültségtenzor

$$\sigma_{kl} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}$$ $\sigma_{kl}, \varepsilon_{ij}$ szimm. $\Rightarrow$ 6 ftl. elem

repr.: 6 x 6-os mx.

szimm.

anyag szimm. tovább csökkenti a ftl. elemek számát

homogén, izotróp anyagra

$$\varphi = \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ll}^2 + \mu\, \varepsilon_{mn} \varepsilon_{nm}$$

Lamé-állandók

$$\sigma_{kl} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{kl}} = \lambda\, \varepsilon_{ll}\, \delta_{kl} + 2\mu\, \varepsilon_{kl}$$

alkalmazás

- nyújtás: $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\sigma_{ll} = 3\lambda\, \varepsilon_{ll} + 2\mu\, \varepsilon_{ll} = (3\lambda + 2\mu)\, \varepsilon_{ll}$$

$$\varepsilon_{ll} = \frac{\sigma_{ll}}{3\lambda + 2\mu}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\sigma_{ll}}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\sigma_{ll}}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \sigma_0 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\cancel{\sigma}}{3\lambda + 2\mu} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & & \\ & -\nu\varepsilon_0 & \\ & & -\nu\varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_0 = E\,\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad E(\mu, \lambda) =$$

$$\frac{\nu}{E} = \dots \quad \Rightarrow \quad \nu(\mu, \lambda) =$$

- egyenletes összenyomás

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p & & \\ & -p & \\ & & -p \end{pmatrix} \qquad \kappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_T$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ll} \quad \Rightarrow \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p} = \dots$$

$$\kappa(\mu, \lambda) = \dots$$

- nyírás

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tau}{2\mu} & \\ \vdots & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\gamma = 2\,\varepsilon_{ij} = \frac{\tau}{\mu} = \frac{\tau}{G} \qquad G = \mu$$

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\,\delta_{ij}\right)}_{Sp\,=\,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\,\delta_{ij}$$

tiszta nyírás $\qquad$ tiszta összenyomás

<u>mozgásegyenlet</u>

$$\Lambda = \underbrace{\frac{\varrho}{2}|\dot{\underline{u}}|^2}_{\text{kin. e.}} - \underbrace{v(\underline{u})}_{\text{pot. es.}} - \underbrace{\varphi(\underline{\underline{\varepsilon}})}_{\text{rug. es.}} \qquad S = \int dt\, L = \int dt \int d^3\underline{r}\,\Lambda$$

extremális

$$\underbrace{-\frac{\partial v}{\partial u_i}}_{f_i} = \varrho\, u_{tt\,i} - \partial_j \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial(\partial_j u_i)}}_{\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{kl}}\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial(\partial_j u_i)} = \sigma_{ij}}$$

relatból megnézni

külső erősűrűség

$$\underline{\rho \underline{u}_{tt} = \underline{f} + \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}}$$

$$\partial_j \sigma_{ij} = \partial_j \left(\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2\mu \varepsilon_{ij} \right) =$$

$$= \partial_j \lambda \delta_{ij} \partial_m u_m + \tfrac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}\mu \, \partial_j \left(\partial_i u_j + \partial_j u_i \right) =$$

$$= \lambda \partial_i \partial_j u_j + \mu \partial_i \partial_j u_j + \mu \partial_j \partial_j u_i$$

$$\rho \underline{u}_{tt} = \cancel{\underline{f}} + (\lambda + \mu) \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u}$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0$$

$$\operatorname{rot} \underline{w} = 0 \qquad \underline{u} = \underline{v} + \underline{w}$$

$$\rho (\ddot{\underline{v}} + \ddot{\underline{w}}) = (\lambda + \mu) \underline{\nabla} (\underline{\nabla} (\cancel{\underline{v} +} \underline{w})) + \mu \Delta (\underline{v} + \underline{w})$$

rot: $\rho \operatorname{rot} \ddot{\underline{v}} = \mu \Delta \operatorname{rot} \underline{v} \Rightarrow \rho \ddot{\underline{v}} = \mu \Delta \underline{v}$

div: $\rho \operatorname{div} \ddot{\underline{w}} = (\lambda + \mu) \Delta (\operatorname{div} \underline{w}) + \mu \Delta (\operatorname{div} \underline{w})$

$$\rho \ddot{\underline{w}} = (2\mu + \lambda) \Delta \underline{w}$$

hullámegyenlet

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_{tr.} = \sqrt{\dfrac{\rho}{\mu}} & \underline{b} \perp \underline{k} \\[2ex] c_{longi} = \sqrt{\dfrac{\rho}{2\mu + \lambda}} & \underline{a} \parallel \underline{k} \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \underline{u} = \varepsilon_{ll} = \frac{\Delta V}{V} \Rightarrow$$ tr.: tiszta nyírás

l.: összenyomás

Doppler-effektus

forrás + megfigyelő egymáshoz képest mozog

$$f' = f \cdot \frac{c}{c \pm v}$$ álló megf.

$$f' = f \cdot \frac{c \pm v}{c}$$ mozgó megf.

4/3

ez egy véletlenül üres oldal

Folyadékok tulajdonságai, hidrosztatika

$\rho =$ áll., összenyomhatatlan

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \mathrm{div}(\rho \underline{v}) = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\,\underline{v} = 0$$ ~~nyírófeszültsé~~

$$\mathrm{div}\,\underline{u} = \varepsilon_{ii} \quad \frac{d}{dt}$$

Euler-kép $\quad \underline{v}(\underline{r}),\ \underline{a}(\underline{r})$

Lagrange-kép $\quad$ 1-1 részecske pályájának követése

hidrosztatika

$$\cancel{\rho \underline{\ddot{u}}} = \underline{f} + \mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}$$ $\emptyset$ nyírófesz. id. folyadékban

$$\partial_j \sigma_{ij} = -\partial_j \delta_{ij} p = -\partial_i p$$

$$\underline{f} = \rho \underline{g} = -\rho \underline{\nabla} U$$

$$0 = -\rho \underline{\nabla} U - \underline{\nabla} p \qquad \rho = \text{áll.}$$

$$0 = \underline{\nabla}(\rho U + p) \Rightarrow \rho U + p = \text{áll.}$$

a nyomás az ekvipotenciális felületek mentén állandó

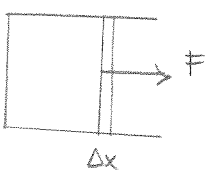
$$p = p_0 + \rho g h$$

felhajtóerő

$$\underline{F}_f = \oint \underline{\underline{\sigma}}\, d\underline{A} = \int \mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}\, dV = -\int (\mathrm{grad}\,p)\, dV =$$

$$-\mathrm{grad}\,p + \rho_f \cdot g = 0$$

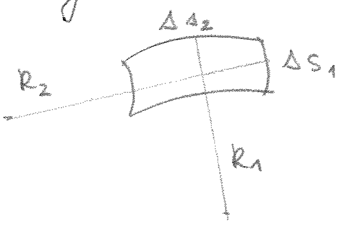
felületi feszültség



$$F = 2\alpha l$$

$$\Delta W = F \cdot \Delta x = \alpha \cdot \underbrace{2l \cdot \Delta x}_{\Delta A}$$

görbületi nyomás



görb. nyom. folyt.

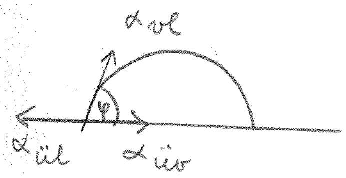
$$F \overset{?}{=} \alpha \cdot \Delta s_1 = 2\alpha \Delta s_1 \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}_{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}} \approx \alpha \Delta s_1 \Delta\varphi = \frac{\alpha}{k}\Delta s_1 \Delta s_2$$

$$F = \alpha\underbrace{\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)}_{\Delta p}\Delta s_1\Delta s_2$$

Laplace I.

Orsinál megnézni

nedvesítés



$$\alpha_{ül} - \alpha_{üv} - \alpha_{vl}\cdot\cos\varphi = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{\alpha_{ül} - \alpha_{üv}}{\alpha_{vl}}$$

Laplace II.

nem biztos, hogy van mo.

kapilláris jelenség

Áramlások jell., Bernoulli-egy., tökéletes f. ár.

szubsztanciális derivált:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + (\underline{v}\underline{\nabla})\phi$$

ideális f.

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\mathbb{1} + \underline{\underline{\sigma}}'$$ súrlódó tag

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \eta'\,\mathbb{1}\,\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}_t + 2\eta\,\underline{\underline{\varepsilon}}_t$$

$$\rho\frac{d\underline{v}}{dt} = -\rho\underline{\nabla}U - \underline{\nabla}p$$

$$\rho\frac{\partial\underline{v}}{\partial t} + \rho(\underline{v}\underline{\nabla})\underline{v} = \underline{f} + \mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}$$

Navier-Stokes

$\forall$ folyadék

$$-\underline{\nabla}p + \eta\Delta\underline{v} + (\eta+\eta')\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\underline{v})$$ // ny. közeg

áramvonal: olyan görbe, amelyet egy adott pillanatban a folyadékrészecskék sebességvektora minden pontjában érint

pályagörbe
nyomvonal } stac. áramlásban ugyanazok

áramcső, áramfonal

stac.: p, ϱ, $\underline{v}$ időfüggetlen

id. foly.: összenyomhatatlan, súrlódásmentes

örvényes: $\operatorname{rot} \underline{v} \neq 0$

<u>Euler-egyenlet</u> (ideális f.)

$$\varrho \underline{v}_t + \varrho(\underline{v}\underline{\nabla})\underline{v} = \underline{f} + \underbrace{\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}}_{-\underline{\nabla} p, \text{ ha } \underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{0}}}$$

$$\underline{v}_t + (\underline{v}\underline{\nabla})\underline{v} = -\underline{\nabla} V - \frac{\underline{\nabla} p}{\varrho}$$

<u>Bernoulli-egyenlet</u>

stac. áramlás: $\underline{v}_t = 0$ $\quad (\underline{v}\underline{\nabla})\underline{v} = -\underline{\nabla} V - \frac{\underline{\nabla} p}{\varrho}$

$$v_i(\underline{v}\underline{\nabla}) v_i = (\underline{v}\underline{\nabla})\frac{1}{2} v_i^2 = (\underline{v}\underline{\nabla})\frac{|\underline{v}|^2}{2}$$

$$\underline{v}\left(\underline{\nabla}\frac{|\underline{v}|^2}{2} + \underline{\nabla} V + \underline{\nabla}\frac{p}{\varrho}\right) = 0 \quad \text{Euler m.}$$

áramvonal (stac. esetben pályavonal) m.

$$\frac{|\underline{v}|^2}{2} + V + \frac{p}{\varrho} = \text{áll.}$$

örvény

turbulencia – kaotikus változások

NS dimenziótlanítása – Re-szám

5. Fenomenologikus termodinamika

Termodin. állapotjelzők, hőtágulás, id. g., kin. modell

extenzív $V \quad N \quad U \quad S \quad \underline{M} \quad \underline{P}$

intenzív $p \quad \mu \quad T \quad \underline{B} \quad \underline{E}$

ex.: külső feltételek egyformák – állapotj. is egyformák

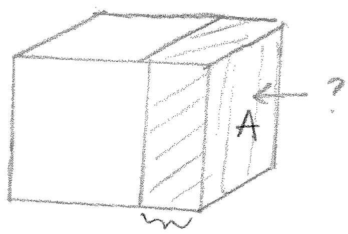
ex. termodin.: kvázisztatikus folyamatok

$l = l_0(1 + \alpha \Delta t)$

$\Delta V \approx V_0 \underbrace{(3\alpha)}_{\beta} \Delta t$ szilárd., f., gáz β különbözik

id. g.

- tömegpontok
  rendezetlen mozgás
  rugalmas ütk.
  nincs hosszútávú kh.



$\Delta s = v \cdot \Delta t$

$$\Delta N = \frac{N}{6} \cdot \frac{\Delta t v A}{V}$$

$$\Delta I = \Delta N \cdot 2mv = \frac{2N}{3V} \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\langle \varepsilon \rangle} A \Delta t$$

- $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta t} = F$ $\qquad F = \frac{2N}{3V} \langle \varepsilon \rangle A$

$$\left.\begin{array}{l} p = \frac{2N}{3V} \langle \varepsilon \rangle \\ pV = NkT \end{array}\right\} \langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT$$

$T = \ldots$

Nyílt és zárt folyamatok, Carnot-folyamat

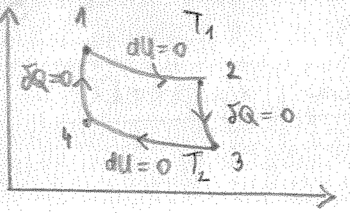
izoterm $dU = 0$

izobár $W = p\Delta V$

izochor $\delta Q = dU$

adiabatikus $\delta Q = 0 \qquad dU = c_v \underbrace{dT}_{d\left(\frac{pV}{R}\right)} = -pdV$

politropikus $c =$ áll.



$$Q_1^{fel} = W_{12} = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} \qquad W_{23} = c_V(T_1 - T_2)$$

$$Q_2^{le} = W_{34} = RT_2 \ln\frac{V_3}{V_4} \qquad W_{34} = -c_V(T_1 - T_2)$$

$$W = W_{12} + W_{34} \qquad \eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln\frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}\cancel{\frac{\ln\frac{V_3}{V_4}}{\ln\frac{V_2}{V_1}}}$$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} pV^{\kappa} = \text{áll.} \\ pV = RT \end{array}\right\} TV^{\kappa-1} = \text{áll.}$$

$$T_1 V_2^{\kappa-1} = T_2 V_3^{\kappa-1}$$

$$T_1 \cdot V_1^{\kappa-1} = T_2 \cdot V_4^{\kappa-1}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

$$\ln\frac{V_2}{V_1} = \ln\frac{V_3}{V_4}$$

Főtételek

I. $dU = \delta Q + \delta W$

II. folyamatok spontán iránya $\Delta S \geq 0$

III. $\lim\limits_{T \to 0} S = 0$

Termodin. potenciálok

$U(S, V, N) \qquad dU = TdS - pdV + \mu dN$

$H(S, p, N) = U + pV$

$F(T, V, N) = U - TS$

$G(T, p, N) = U + pV - TS$

fázisát.: elsőrendű – pot.' ugrik

másodrendű – 2. der. ugrik

Gibbs-f. fázisszabály

$$F + Sz = K + 2$$

6. Elektro- és magnetosztatika, áramkörök

Coulomb- és Gauss-tv.

$$\underline{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\cdot\frac{\underline{r}}{r} \qquad \underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \qquad \varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}$$

$$\underline{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_j \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_j - \underline{r}_i|^3}(\underline{r}_j - \underline{r}_i) \qquad i \neq j$$ szuperpozíció

$$\underline{F}_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\sum_j \dots$$

$$\underline{E}_i = \frac{\underline{F}_i}{q_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_j \dots$$ térerősség $[E] = \frac{V}{m}$

$d\Psi = \underline{E}\,d\underline{f}$ fluxus

$$\oint \underline{E}\,d\underline{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,4r^2\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$ $\forall$ felületre is igaz

gömbre $\underline{E} \parallel d\underline{f}$

q töltésre

szuperpoz. $\Rightarrow$ $$\oint \underline{E}\,d\underline{f} = \underbrace{\frac{q[f]}{\varepsilon_0} \quad \int \mathrm{div}\,\underline{E}\,dV}_{\mathrm{div}\,\underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} = \int \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,dV$$

ekvipot. felületek: $\phi(\underline{r} + d\underline{r}) - \phi(\underline{r}) = 0 \rightarrow \underline{E}\,d\underline{r} = 0$

monopól tere $\underline{E}, \phi, \mathrm{div}\,\underline{E}$ $\quad \partial_i E_i$ } indexesen

dipól tere $\phi \Rightarrow$ sorf. ; $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi$ $\quad -\partial_i \phi$!

stacionárius áram

$$\left.\begin{aligned} & I + \frac{dq}{dt} = 0 \\ & I = \oint \underline{j}\,d\underline{f} = \int_V \mathrm{div}\,\underline{j}\,dV \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{div}\,\underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$ kont. e.

$I(t)$ általában, ha nem $\Rightarrow$ stac. / egyenáram

vezetők

fémes — félvezető

szupravezető — elektrolit

Kirchoff-tv.-ek

$\oint j\, dA = 0 \qquad \sum I_i = 0 \qquad$ I. csomóponti

$\oint E\, dr = 0 \qquad \sum U_i = 0 \qquad$ II. hurokttv.

Ohm-tv.

$\frac{U}{I} = R \quad ; \quad j = \sigma E$

dielektrikumok

elektrét

ϕ eredő polarizáció

$\bar{q} = -\oint \underline{P}\, d\underline{A} \qquad \oint \underline{E}\, d\underline{A} = \frac{q_v}{\varepsilon_0} + \frac{q_p}{\varepsilon_0} = \frac{q_v}{\varepsilon_0} - \oint \underline{P}\, d\underline{A} \frac{1}{\varepsilon_0}$

$\oint \underbrace{(\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P})}_{\underline{D}} d\underline{A} = q_v \qquad \underline{P} = \chi \varepsilon_0 \underline{E}$ lin közelítés

ε_r

HF: $\mathrm{rot}\, \underline{E} = 0 \qquad \mathrm{div}\, \underline{D} = 0$

E_t folyt. $\qquad D_n$ folyt.

kondenzátor

• sík

$\oint \underline{E}\, d\underline{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow EA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad U = Ed = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{d}{A} Q \qquad C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

• gömb

$U = \int_r^R E\, dr = \int_r^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\varrho^2} d\varrho = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right]$

• henger

$\oint \underline{E}\, d\underline{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad E\, 2\pi x \ell = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad E(x) \qquad U = \int_r^R \ldots dx \qquad C = \ldots$

egyenáram + kond. kapcsolása

magnetosztatika

Lorentz-erő, két áramvezető közt

$F = Nq v B = \frac{Nq}{A\ell} A \ell v B = \varrho v A \ell B = j A \ell B = I \ell B$

$\oint \underline{B}\, d\underline{A} = 0 \qquad \mathrm{div}\, \underline{B} = 0 \qquad \underline{B} \overset{!}{=} \mathrm{rot}\, \underline{A} \qquad \mathrm{div}\, \underline{A} = 0$

$\oint \underline{B}\, d\underline{r} = \mu_0 I \qquad \mathrm{rot}\, \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \qquad \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \underline{A} = \mu_0 \underline{j} = -\Delta A$

7. Elektrodinamika

$\underline{D}(r,t)$, $\underline{E}(r,t)$, $\underline{B}(r,t)$, $\underline{H}(r,t)$ megadása $\varrho(r,t)$, $j(r,t)$ esetén

Maxwell-e.

ez a tag pont a kont. miatt kell. !

$$\operatorname{div} \underline{D} = \varrho \qquad {}^{*}\operatorname{rot} \underline{H} = j + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \operatorname{div} \underline{B} = 0$$

} + anyagi egyenletek

$\underline{D}(\underline{E}, \underline{B})$

$\underline{H}(\underline{E}, \underline{B})$

div $*$ $\Rightarrow$ kontinuitási e.

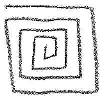
Skalár- és vektorpotenciál, mérték

$$\underline{B} \overset{!}{=} \operatorname{rot} \underline{A} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} \underline{A} = 0 \quad \operatorname{div} \underline{B} = 0 \checkmark$$

$$\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \underline{A} \qquad \underline{A}' \overset{!}{=} \underline{A} + \operatorname{grad} \Lambda$$

$$\operatorname{rot} \underbrace{\left(\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right)}_{-\underline{\nabla}\phi} = 0 \qquad \operatorname{rot} \underline{A}' = \operatorname{rot} \underline{A} + \cancel{\operatorname{rot}\operatorname{grad} \Lambda} = \underline{B}$$

$$\underline{E} = \underline{E}'$$



$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \dot{\underline{A}} = -\underline{\nabla}\phi' - \underbrace{\dot{\underline{A}}'}_{-\dot{\underline{A}} - \underline{\nabla}\dot{\Lambda}} =$$

$$= -\underline{\nabla}(\phi' + \dot{\Lambda}) - \dot{\underline{A}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \phi' + \dot{\Lambda} \\ \underline{A}' &= \underline{A} + \underline{\nabla}\Lambda \end{aligned}\right\}$$

stat. - Coulomb-m.: $\operatorname{div} \underline{A} = 0$

relat. - Lorentz-m.: $\frac{1}{c^2}\dot{\phi} + \operatorname{div} \underline{A} = 0$

Hullámegyenlet

$$\underline{\nabla} \times \underbrace{(\underline{\nabla} \times \underline{A})}_{\underline{B}} = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\underline{A}) - \Delta\underline{A} = \mu_0 j + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\underline{\nabla}\phi - \dot{\underline{A}}\right)$$

$$\varepsilon_0\mu_0 \ddot{\underline{A}} - \Delta\underline{A} = \mu_0 j - \underline{\nabla}\left(\underline{\nabla}\underline{A} + \varepsilon_0\mu_0\dot{\phi}\right)$$

Energia- és impulzusmegm. elektromech. r.-ekre

$$f(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)\,\underline{E}(\underline{x},t) + \underline{j}(\underline{x},t)\times\underline{B}(\underline{x},t) \qquad \text{L.-erős.}$$

$$\frac{dE_{mech}}{dt} = \int_V d^3\underline{x}\, f(\underline{x},t)\,\underline{v} = \int_V d^3\underline{x}\, \underbrace{\underline{j}(\underline{x},t)}_{\frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\underline{B} - \dot{\underline{E}}}\, \underline{E}(\underline{x},t) =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\int d^3\underline{x}\, \underbrace{(\mathrm{rot}\,\underline{B})\,\underline{E}}_{E_i\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_j B_k} - \varepsilon_0 \int_V d^3\underline{x}\; \underline{E}\,\dot{\underline{E}} =$$

$$\underbrace{E_i\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_j B_k}_{\partial_j(\underbrace{E_i\,\varepsilon_{ijk}\,B_k}_{-\varepsilon_{jik}E_iB_k}) - B_k\,\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\varepsilon_{kji}}\,\partial_j E_i}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\int_V d^3\underline{x}\,\left(-\,\mathrm{div}(\underline{E}\times\underline{B})\right) - \int_V d^3\underline{x}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2\right)$$

$$\frac{dE_{mech}}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V d^3\underline{x}\,\rho^{EM} + \frac{1}{\mu_0}\oint d\underline{F}\,(\underbrace{\underline{E}\times\underline{B}}) = 0$$

$$j^{EM} = \underline{S}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\rho^{mech} + \rho^{EM}\right] + \mathrm{div}\,\underline{S} = 0$$

energiaáramsűrűség

$$\frac{dP_i^{(mech)}}{dt} = \int_V d^3\underline{x}\,\left(\rho E_i + \varepsilon_{ijk}\,j_j\,B_k\right) =$$

$$\partial_j E_j = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad j_j = \frac{1}{\mu_0}\varepsilon_{jmn}\,\partial_m B_n - \varepsilon_0\,\dot{E}_j$$

$$= \int_V d^3\underline{x}\left\{\varepsilon_0(\partial_j E_j)E_i + \varepsilon_{ijk}\frac{1}{\mu_0}\left(\varepsilon_{jmn}\,\partial_m B_n\right)B_k - \varepsilon_0\,\varepsilon_{ijk}\,\underbrace{\dot{E}_j\,B_k}\right\}$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}(E_j B_k) - E_j \dot{B}_k}$$

folyt. köv. másik lap

$$= \int_V d^3\underline{x} \left\{ \varepsilon_0 (\partial_j E_j) E_i + \varepsilon_{ijk} \frac{1}{\mu_0} (\varepsilon_{jmn} \partial_m B_n) B_k - \varepsilon_0 \varepsilon_{ijk} \underbrace{\dot{E}_j B_k}_{\frac{\partial}{\partial t}(E_j B_k) - \underbrace{E_j \dot{B}_k}_{E_j \varepsilon_{kpq} \partial_p E_q}} + \frac{1}{\mu_0} B_i \underbrace{(\partial_j B_j)}_{0} \right\} \ominus$$

$$\frac{1}{\mu_0} \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jmn}} B_k \partial_m B_n =$$

$$-\varepsilon_{jik} \varepsilon_{jmn} = \varepsilon_{jki} \varepsilon_{jmn}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left(\delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im} \right) B_k \partial_m B_n =$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left(B_m \partial_m B_i - B_n \partial_i B_n \right)$$

$$+ \varepsilon_0 (-\varepsilon_{ijk}) E_j \varepsilon_{kpq} \partial_p E_q = \varepsilon_0 \left(\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} \right) E_j \partial_p E_q =$$

$$\varepsilon_{kij} \varepsilon_{kpq} \qquad = \varepsilon_0 \left(E_q \partial_i E_q - E_j \partial_j E_i \right)$$

$$\ominus \int_V d^3x \; \partial_j \underbrace{\Pi_{ij}}_{\varepsilon_0 \left(\frac{1}{2} \underline{E}^2 \delta_{ij} - E_i E_j \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} \underline{B}^2 \delta_{ij} - B_i B_j \right)} + \int_V d^3\underline{x} \; \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_{ijk} E_j B_k \right)$$

impulzussűrűség   impulzus-áramsűrűség

$$\frac{d}{dt} \left(\underline{P}^{mech} + \varepsilon_0 \underbrace{(\underline{E} \times \underline{B})}_{\frac{1}{c^2} \underline{S}} \right) + \operatorname{div} \underline{\underline{\Pi}} = 0$$

Váltakozó áram, rezgőkörök

$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t) \qquad U_0 = 100\pi \, V$

$U_{eff} = \ldots$

$U_{R,S,T}$ } összegük $\forall$ t-ben 0

$\uparrow \quad \uparrow$
$+\frac{2\pi}{3} \quad +\frac{4\pi}{3}$

$Z = R - iX \qquad P = \mathrm{Re}\, \frac{1}{2} I^* U =$

$= \frac{1}{2} R |I|^2$

- ohmikus ellenállás

$$\frac{1}{2} R |I|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma} \int d^3\underline{x} \, |j(x, \omega)|^2 \qquad j = \sigma \underline{E}$$

diff. Ohm

$$F \cdot l \cdot |j|^2 = \frac{l}{F} \cdot |I|^2$$

$$R = \frac{l}{F} \cdot \frac{1}{\sigma}$$

- kapacitív ell.

$$-\frac{1}{2} X_c |I|^2 = \mathrm{Im} \frac{i\omega}{2} \int d^3\underline{x} \, \underline{E} \, \underline{D}^* \ominus$$

$\mathrm{div}\, \underline{D}^* = \rho^* \qquad \underline{E} = -\underline{\nabla} \phi \qquad$ parc. int.

$$\ominus \mathrm{Im} \frac{i\omega}{2} \int d^3\underline{x} \, \phi \underbrace{\mathrm{div}\, \underline{D}^*}_{\rho^*} \qquad \Phi(\omega) = \frac{1}{C} Q(\omega)$$

$$-\frac{1}{2} X_c |I|^2 = \mathrm{Im} \frac{i\omega}{2C} |Q(\omega)|^2 \quad 1 \text{ kond.-ra}$$

$$I(\omega) = -i\omega |Q(\omega)|$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} X_c \, \omega^{\cancel{2}} \cancel{|Q(\omega)|^2} = \frac{\omega}{\cancel{2}C} \cancel{|Q(\omega)|^2}$$

$$X_c = \frac{1}{C\omega}$$

- induktív ell.

$$-\frac{1}{\cancel{2}} X_L |I|^2 = -\mathrm{Im} \frac{i\omega}{\cancel{2}} \int \underline{B} \, \underline{H}^* d^3\underline{x} \ominus$$

$\Phi_{magn.}(\omega) = L \cdot I(\omega) \qquad \dot{\underline{A}}(\underline{x}, \omega) = -\underline{E}_L = -i\omega \underline{A}$

$$\ominus - i\omega \int d^3\underline{x}\, j^* \underline{A} = + \int d^3\underline{x}\, j^* \underbrace{\dot{\underline{A}}}_{-\underline{E}} = -I^* \int \underbrace{\underline{E}\, d\underline{s}}_{-\frac{d\phi_m}{dt}} =$$

$$= -i\omega I^* \phi_m(\omega) =$$

$$= -i\omega L |I(\omega)|^2$$

$$\underline{X_L = L\omega}$$

energiamegmaradás átlagolt menny. $\Rightarrow$

átlagos kisug. e.

$w_e = \frac{1}{4} \underline{E}\, \underline{D}^* \qquad w_m = \frac{1}{4} \underline{B}\, \underline{H}^*$

$$\frac{1}{2} \underbrace{\int d^3\underline{x}\, j^*_\omega E_\omega}_{\text{Ohm}} + \cancel{\int d\underline{F}\, \underline{S}_\omega} + \underbrace{2i\omega \int d^3x\, (w_e - w_m)}_{X_C / X_L} = 0$$

sug. nincs.

$$\frac{1}{2} |I_\omega|^2 \left(\frac{l}{\sigma F} + \frac{i}{\omega C} + i\omega L \right) = \frac{1}{2} I_\omega V_\omega^* \qquad V_\omega = Z I_\omega$$

$$Z = R - iX$$

8. Hullámegyenlet és hullámjelenségek

EM-hullámok

- forrásmentes, vákuum

$$\operatorname{div} \underline{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \operatorname{div} \underline{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \underline{E} = -\dot{\underline{B}} \qquad \operatorname{rot} \underline{B} = \cancel{\mu_0 \underline{j}} + \frac{1}{c^2}\dot{\underline{E}}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{E})} = -\frac{\partial}{\partial t}\, \underline{\nabla} \times \underline{B} = -\frac{1}{c^2}\ddot{\underline{E}}$$

$$\underline{\nabla}(\underbrace{\underline{\nabla}\,\underline{E}}_{0}) - \underline{\nabla}^2 \underline{E} = -\frac{1}{c^2}\ddot{\underline{E}}$$

- $$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\underline{E} = 0$$

síkhullám
gömbhullám

$$\Box\, \underline{E} = 0 \qquad (\underline{B}\text{-re hasonló})$$

rugalmas hullámok

$$\Lambda = \underbrace{\frac{1}{2}\varrho|\dot{\underline{u}}|^2}_{\text{kin. es.}} + \underbrace{\varphi[\underline{\underline{\varepsilon}}]}_{\text{rug. es.}} + \underbrace{v(\underline{u})}_{\text{pot. es.}}$$

- $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{u}_j} = \frac{\partial \Lambda}{\partial u_j} + \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_j u_i)} \qquad \varphi = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \mu\, \mathrm{Sp}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2)$$

$$\varrho\ddot{\underline{u}} = \underline{f} + \operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}} \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial\varphi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}} = \lambda\, \mathbb{1}\, \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{\varepsilon}} + 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\partial_j \sigma_{ij} = \partial_j \lambda \delta_{ij} \underbrace{\varepsilon_{mm}}_{(\partial_m u_m)} + 2\mu\, \partial_j \underbrace{\varepsilon_{ij}}_{\frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)} =$$

$$= \lambda \partial_i \partial_m u_m + \mu\, \partial_i \partial_j u_j + \mu\, \partial_j \partial_j u_i$$

- $$\varrho\ddot{\underline{u}} = (\lambda + \mu)\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\,\underline{u}) + \mu\,\Delta\underline{u}$$

$\underline{u} = \underline{v} + \underline{w}$

$\text{div}\,\underline{v} = 0$ transzv.

$\text{rot}\,\underline{w} = 0$ longit.

$$\varrho\,\text{div}(\cancel{\ddot{\underline{v}}} + \ddot{\underline{w}}) = (\lambda+\mu)\nabla(\nabla(\cancel{\text{div}\,\underline{v}} + \text{div}\,\underline{w})) + \mu\Delta\,\text{div}(\cancel{\underline{v}} + \underline{w})$$

$$\varrho\,\text{rot}(\ddot{\underline{v}} + \cancel{\ddot{\underline{w}}}) = \underbrace{(\lambda+\mu)\nabla(\nabla(\text{rot}\,\underline{v} + \cancel{\text{rot}\,\underline{w}}))}_{0} + \mu\Delta\,\text{rot}(\underline{v} + \cancel{\underline{w}})$$

$$\varrho\ddot{\underline{w}} = (2\mu+\lambda)\Delta\underline{w} \qquad c_\ell = \sqrt{\frac{\varrho}{2\mu+\lambda}}$$

$$\varrho\ddot{\underline{v}} = \mu\Delta\underline{v} \qquad c_t = \sqrt{\frac{\varrho}{\mu}}$$

megoldási módszerek

1. D'Alembert $u(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$ $v = c$
2. Fourier

változók szeparálása

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2\frac{X''(x)}{X(x)} \overset{!}{=} -\omega^2 \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

$$\left.\begin{aligned} T(t) &= a\cos\omega t + b\sin\omega t \\ X(x) &= c\cos kx + d\sin kx \end{aligned}\right\} + \to \text{KF},\ \text{HF} \to \text{megkvantálja a paramétereket}$$

megkapható a D'Alembert-módszer

$\left(u(x,t) = e^{i\omega t} e^{ikx}\right)$

KF-hez illesztés
(cos-os tag $x=0 \Rightarrow 0$ miatt meghalt)

$$u(x, t=0) = \sum_n A_n \sin k_n x = \alpha(x)$$

$$\dot{u}(x, t=0) = \sum_n B_n\omega_n \sin k_n x = \beta(x)$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \alpha(x)\sin(k_n x)\,dx$$

$$B_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L \beta(x)\sin(k_n x)\,dx$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\right) u(\underline{x}, t) = 0$$

$L(-i\omega, i\underline{k}) = 0$ kar. e. $\rightarrow$ diszp. rel.

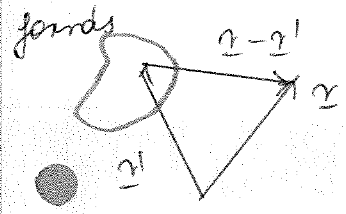
$$\omega = f(k)$$

$$v_f = \frac{\omega}{|\underline{k}|}$$

$$u_{ált}(\underline{x}, t) = \int C(\underline{k}) e^{i\underline{k}\underline{x}} e^{-i\omega(\underline{k})t} d\underline{k}$$

$$\underline{v}_{cs} = \frac{\partial \omega}{\partial \underline{k}}$$

retardált potenciálok



a mező c sebességgel terjed

$\Box f(\underline{x}, t) = s(\underline{x}, t)$ mo.-a

a partikuláris mo. egy előállítása

$$\Box G(\underline{x} - \underline{x}', t - t') = \delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{x}')\,\delta(t - t')$$

Green-fv. megkeresése

$$\tilde{G} = \frac{e^{i\underline{k}(\underline{x} - \underline{x}')} e^{-i\omega(t-t')}}{-\frac{\omega^2}{c^2} + \underline{k}^2}$$

parc. törtekre b.
2 pólus valós tg.-n
csak $t > t'$-re
akarunk járulékot
$\Rightarrow$ pólus-id eltolás

int.

$$G(\underline{x} - \underline{x}', t - t') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{c}\right)}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$$

$$f(\underline{x}, t) = \int dt' \int d^3\underline{x}'\, G(\underline{x} - \underline{x}', t - t')\, s(\underline{x}', t') =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int d^3\underline{x}' \frac{s\left(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{c}\right)}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$$

Lorentz-mértékben

$\Box \underline{A} = \mu_0 \underline{j}$ $\quad \Box \phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$ $\quad \frac{1}{c^2}\dot{\phi} + \operatorname{div} \underline{A} = 0$

kieg.: hogy jön ki a potenciálokra az egy.

$$\operatorname{div} \underline{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{div} \underline{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \underline{E} = -\dot{\underline{B}} \qquad \operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 j + \frac{1}{c^2} \dot{\underline{E}}$$

$$\operatorname{rot} \underline{A} \overset{!}{=} \underline{B} \qquad \underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla} \Lambda$$

$$\operatorname{rot} \underline{E} = -\operatorname{rot} \dot{\underline{A}} \Rightarrow \quad \underline{E} + \dot{\underline{A}} = -\underline{\nabla} \phi$$

$$\underbrace{\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A})}_{\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\underline{A}) - \Delta \underline{A}} = \mu_0 j - \frac{1}{c^2}(\underline{\nabla}\dot{\phi} + \ddot{\underline{A}})$$

$$\Box \underline{A} = \mu_0 j - \underline{\nabla}\Big(\underbrace{\frac{1}{c^2}\dot{\phi} + \underline{\nabla}\underline{A}}_{\text{Lorentz-mértékben } 0}\Big)$$

$$\operatorname{div}(-\underline{\nabla}\phi - \dot{\underline{A}}) = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad -\underline{\nabla}\dot{\underline{A}} = \frac{1}{c^2}\ddot{\phi}$$

$$\Box \phi = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

Hullámvezetők, üregrezonátorok, antennák

$$\underline{E}_\omega(\underline{x}) = \underline{E}_\omega(x,y)\, e^{ikz} = (\underline{E}_t + \underline{e}_z E_\ell)\, e^{ikz}$$

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_z \partial_z + \underline{\nabla}_t \qquad \underline{\nabla}\underline{E} = \partial_z E_\ell + \underline{\nabla}_t \underline{E}_t$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = (\underline{\nabla} \times \underline{E})_\ell + (\underline{\nabla} \times \underline{E})_t =$$

$$= (\underline{\nabla}_t \times \underline{E}_t) + \underline{e}_z \times (\partial_z \underline{E}_t - \underline{\nabla}_t E_\ell)$$

$$\begin{array}{l} \underline{E}_t(E_\ell, B_\ell) \\ \underline{B}_t(E_\ell, B_\ell) \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \underline{\nabla} \times \underline{E} = i\omega \underline{B} & \leftarrow \partial_z \\ \underline{\nabla} \times \underline{B} = -i\omega\mu\varepsilon \underline{E} & \leftarrow \partial_z \\ \underline{\nabla} \underline{B} = 0; \ \underline{\nabla} \underline{E} = 0 & \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{TM} & E_\ell \neq 0 & B_\ell = 0 \\ \text{TE} & E_\ell = 0 & B_\ell \neq 0 \end{array}\right\} \quad [\Delta_t + \underbrace{\varepsilon\mu\omega^2 - k^2}_{\gamma^2}] \underbrace{\begin{pmatrix} E_\ell \\ B_\ell \end{pmatrix}}_{\psi} = 0$$

HF-k

TM $\quad \psi = E_\ell \quad \psi(x_F) = 0$

TE $\quad \psi = B_\ell \quad \underline{n}\,\underline{\nabla}\psi(x_F) = 0$

pl. téglalap, TM-módus

$$\psi(x, y) = \sin\frac{\pi}{a}nx \sin\frac{\pi}{b}my \cdot A_{nm}$$

$$\Delta_t \psi = -\underbrace{\left[\left(n\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(m\frac{\pi}{b}\right)^2\right]}_{\gamma_{n,m}}\psi \quad \& \quad n \geq 1, \quad m \geq 1$$

$$\gamma_{n,m} \rightarrow k_{n,m} \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{terjed}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega^2_{\text{alsó}}!$$

TE-módus

cos-os

$n=0, \; m=1$
$m=0, \; n=1$ } legalacsonyabb

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{v_\infty}{(\quad)^{\frac{1}{2}}}$$

$$v_g = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = c$$

üregrezonátor:

$z = 0, d$-ben fémfedő $\Rightarrow$ két új HF

TM $\quad \psi = A_{n,m,p} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y \cos\frac{\pi}{d}z$

TE $\quad \psi = B_{n,m,p} \cos\frac{n\pi}{a}x \cos\frac{m\pi}{b}y \sin\frac{\pi}{d}pz$

$$\frac{\omega^2}{c^2}_{n,m,p} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}\right)$$

antenna

Dipólsug., szórás szabad töltésen

el. m. hull. → mozgásba hozza a töltéseket → sug.

$$d\sigma = \frac{\overline{dU_{sec}}^{T}}{|\overline{S_{be}}^{T}|} \qquad \sigma = \int d\sigma \, d\Omega$$

Thomson - hkm.

$$m\ddot{\underline{r}} = e\underline{E}_{be}$$

$$\underline{p} = e\underline{r}$$

$$\ddot{\underline{p}} = e\ddot{\underline{r}} = \frac{e^2}{m}\underline{E}_{be}$$

rezgő dipól által keltett tér

$$\underline{E}_{ki} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \left. \frac{(\ddot{\underline{p}} \times \underline{r}) \times \underline{r}}{r^3} \right|_{t-\frac{r}{c}}$$

$$\underline{B}_{ki} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \left. \frac{\ddot{\underline{p}} \times \underline{r}}{r^2} \right|_{t-\frac{r}{c}}$$

$$|\underline{S}_{ki}| = \varepsilon_0 c^2 |\underline{E}_{ki} \times \underline{B}_{ki}| =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} |E_{be}|^2 \sin^2\vartheta \frac{e^4}{m^2}$$

$$|\underline{S}_{be}| = \varepsilon_0 c \frac{|E_0|^2}{2}$$

$$\overline{dU}_{sec} = r^2 d\Omega |\underline{S}_{ki}| \Rightarrow d\sigma = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \underbrace{\sin^2\vartheta \, d\Omega}$$

int. után

$$\underline{p} \sim \underline{E}_{be} \qquad \underline{E}_{be} \sim \cos(\omega t)$$

$$\ddot{\underline{p}} \sim \omega^2 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{\omega^4}{c^4} \sim \frac{1}{\lambda^4} \quad \text{Rayleigh}$$

Interferencia

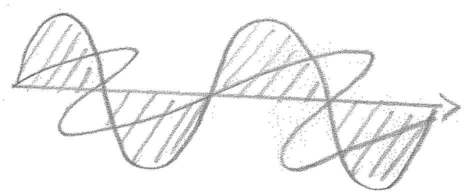
$\Delta s = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$ kioltás

$\Delta s = \lambda \Rightarrow$ erősítés

} koherens fényforrás!

Polarizáció

2 ftl. irány



$$\underline{\underline{E}}(z,t) = \underline{A}\, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\begin{array}{l} TE \rightarrow \\ TM \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y e^{i\varphi} \end{pmatrix} \qquad \varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

Jones-vektor (1-re norm.)

lin.: $a_x = a_y$

$\varphi = 0$ v. π

cirk. $a_x = a_y$ és $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

ell.

pol. eszk. mátrixos leírása $\underline{A}_{ki} = \underline{\underline{J}}\, \underline{A}_{be}$

késleltetők

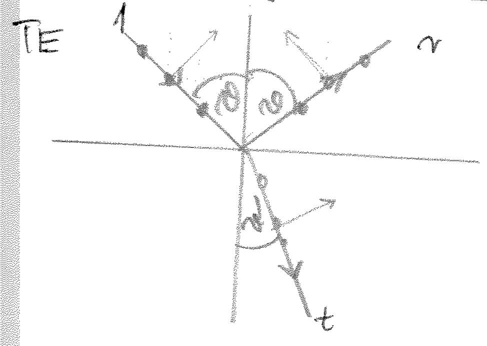
forgatók

Fresnel-rombusz

Brewster-lemezek

Fresnel-formulák

TE



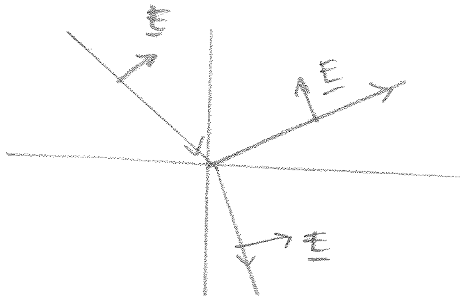
$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp}$

$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$

$B_{1\perp} = B_{2\perp}$

$\frac{B_1}{\mu_1}\parallel = \frac{B_2}{\mu_2}\parallel$

TM



$r_\perp$

$E_\parallel$ folyt. $1 + r = t$ $t_\perp$

$H_\parallel$ folyt. $n_1(1-r)\cos\vartheta = n_2 t \cos\vartheta'$

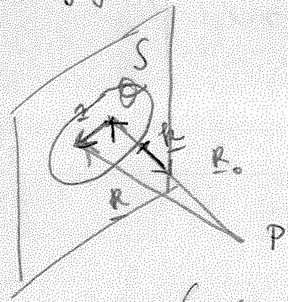
$B = \frac{nE}{c}$

$r_\parallel$ $\left\{ E_\parallel = (1-r)\cos\vartheta = t\cos\vartheta' \right.$

$t_\parallel$ $\left\{ H_t = n_1(1+r) = n_2 t \right.$

Diffrakció

Huygens – Fresnel – elv



$\underline{k} = \frac{\underline{R}_0}{R_0}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}$

$$U(P) = C\int_S d^2\underline{r}\, U(\underline{r})\, e^{ikR}\, \underbrace{\frac{1}{R}}_{\approx R_0}\, \underbrace{\cancel{\cos\vartheta}}_{\approx 1}$$

$\vartheta : (\underline{n}(\underline{r}), \underline{R})_\angle$

$$R = |\underline{R}| = \sqrt{(\underline{R}_0 + \underline{r})^2} =$$

$$= R_0\sqrt{1 + \frac{2\underline{R}_0\underline{r}}{R_0^2} + \frac{\underline{r}^2}{R_0^2}} \approx$$

$f(x_0+\varepsilon) = f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon + \frac{1}{2}f''(x_0)\varepsilon^2$

$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 +$

$$\approx R_0\left(1 + \frac{\underline{R}_0\underline{r}}{R_0^2} + \frac{r^2}{2R_0^2} - \frac{1}{\cancel{8}_2}\frac{\cancel{4}(\underline{R}_0\underline{r})^2}{R_0^4}\right)$$

$\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$

r-ben másodrendig megyünk

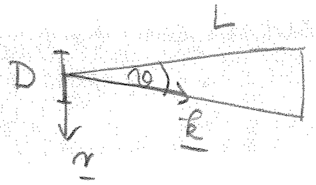
$(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ $\qquad \frac{\underline{k}}{k} \approx -\frac{\underline{R}_0}{R_0} \quad \left(= -\frac{\underline{R}}{R}\right)$

$$U(P) = \frac{k}{2\pi i}\,\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\int_S d^2\underline{r}\; U(\underline{r})\; e^{-i\underline{k}\underline{r} + \underbrace{i\frac{k}{2R_0}r^2}_{?} + \underbrace{\frac{1}{4}\frac{(\underline{k}\underline{r})^2}{kR_0}}}$$

Fresnel: $\underline{k}\underline{r} = 0$ $\qquad$ Fraunhofer $R_0 \to \infty$

$$\frac{kr^2}{2R_0} \sim \frac{D^2}{\lambda L}$$

$$\underline{k}\underline{r} \sim \frac{D}{\lambda}\sin\vartheta$$



~~D~~ $L\sin\vartheta < D \Rightarrow$ Fresnel

közel
szemből

Fraunhofer: távol, ferdén

Nemlin. opt.

$$\underline{P} = \varepsilon_0\chi\underline{E} + 2(\underline{d}\underline{E})\underline{E} + 4\chi^{(3)}E^2\underline{E} \Rightarrow n(\underline{E}) = \ldots !$$

poláros kristályokban lehets.

pl. { moduláló sztatikus térrel – fázism.
{ felyadékkristályok

FONTOS:

moduláló el. tér – fényhullám

erős el. tér: lézerekkel

$$P = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} + \chi^{(2)} \vec{E} + \chi^{(3)} \vec{E}^2 + \ldots \right) \vec{E}$$

összegfrekvencia-keltés
különbségfrekvencia-keltés

$$\underline{k} = \frac{\underline{R}_0}{R_0} \cdot k \qquad e^{ikR} \approx e^{ikR_0} \; e^{-ik\frac{\underline{R}_0 \underline{r}}{R_0}} \; e^{i\frac{kr^2}{2R_0}} \; e^{+\frac{1}{4}\frac{(\underline{k}\,\underline{r})^2}{kR_0}}$$

Fresnel: $\underline{k}\,\underline{r} = 0$

Fraunhofer: $R_0 \to \infty$

$$\frac{kr^2}{2R_0} \sim \frac{D^2}{\lambda L}$$

$\cancel{kr^2}$

$$\underline{k}\,\underline{r} \sim \frac{D}{\lambda} \cdot \sin\vartheta$$

9. Geometriai optika és alkalmazásai

Eikonál

$$\ddot\phi = c^2 \Delta\phi \quad \rightarrow \quad \ddot\phi = c(\underline{r})^2 \Delta\phi \qquad \frac{1}{|\nabla n|} \sim \lambda \Rightarrow \text{nem jó}$$

$$\phi(\underline{r},t) = A(\underline{r},t)\, e^{i\varphi(\underline{r},t)}$$ lokális síkhullám

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = (\dot A + i\dot\varphi A)e^{i\varphi} \Rightarrow \ddot\phi = (\ddot A + iA\ddot\varphi + i\dot A\dot\varphi)e^{i\varphi} + (\cancel{i}\, i\dot\varphi\dot A \cancel{+i} - \dot\varphi^2 A)e^{i\varphi} =$$

$$= (\cancel{\ddot A} + \cancel{2i\dot\varphi\dot A} - \dot\varphi^2 A + \cancel{iA\ddot\varphi})e^{i\varphi}$$

$$\Delta\phi = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\phi) = \underline{\nabla}\left[(\underline{\nabla}A + iA\underline{\nabla}\varphi)e^{i\varphi}\right] =$$

$$= \left\{\cancel{\Delta A} + \cancel{iA\Delta\varphi} + i\cancel{(\underline{\nabla}A)}(\underline{\nabla}\varphi) - A(\underline{\nabla}\varphi)^2\right\}e^{i\varphi}$$

A elsőrendű
A másodrendű } változásait elhanyagoljuk

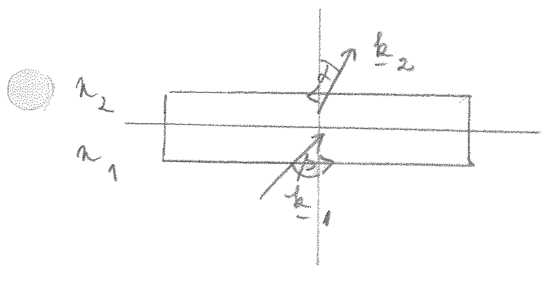
$$+\dot\varphi^2 \cancel{A e^{i\varphi}} = c(\underline{r})^2\left(+\cancel{A}(\underline{\nabla}\varphi)^2 \cancel{e^{i\varphi}}\right)$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = c(\underline{r})^2(\underline{\nabla}\varphi)^2}$$

fázis sorfejtése: $\varphi(\underline{r},t) = \varphi_0 + \underbrace{(\underline{\nabla}\varphi)}_{\underline{k}}\underline{r} + \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}_{-\omega} t + \dots$

Young-t. $\left.\begin{cases} \dfrac{\partial k_l}{\partial t} = -\dfrac{\partial\omega}{\partial x_l} \\[2ex] \dfrac{\partial k_l}{\partial x_m} = \dfrac{\partial k_m}{\partial x_l} \end{cases}\right\} \Rightarrow \operatorname{rot}\underline{k}(\underline{r}) = 0$

lokális Snellius-tv.



$$\int \operatorname{rot}\underline{k}(\underline{r})\, d\underline{F} = \oint \underline{k}(\underline{r})\, d\underline{r} = 0$$

$$k_2 \sin\alpha = k_1 \sin\beta \qquad k_1^x = k_2^x$$

$$\frac{\omega}{c_1} \sin\alpha = \frac{\omega}{c_2}\sin\beta$$

$\omega = \text{const.} \Rightarrow \varphi(r,t) = -\omega t + \Psi(r)$

$$\omega^2 = \left(\frac{c_0}{n(r)}\right)^2 (\underline{\nabla}\Psi)^2 = \left(\frac{c_0}{n(r)}\right)^2 \underline{k}^2(r)$$

Analógia a mech. és a geom. opt. között

$\underline{p} = \underline{\nabla} S$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\underline{k} = \underline{\nabla}\varphi$

$E = -\dfrac{\partial S}{\partial t}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\omega = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$

$S = \int L \, dt$

$\delta S = \delta \int \underline{p} \, d\underline{r} = 0$ $\qquad\qquad$ $\delta S = \delta \int (\underline{\nabla}\varphi) \, d\underline{r} = \delta \int \underline{k}(r) \, d\underline{r} = 0$

$$0 = \delta \int \underline{k}(r) \, d\underline{r} = \delta \int |\underline{k}| \, dl = \delta \frac{\omega_0}{c} \int n(r) \, dl$$

Fermat-elv

$$L = \left(c(r)\frac{\underline{k}}{k}\right)\underline{k} - c(r)\,k = 0 \ !$$

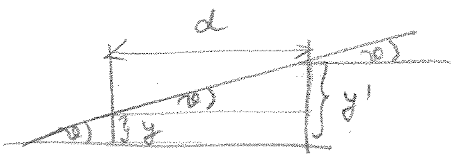
Paraxiális közelítés

hengerszimm.

tengelyközeli sug. $\quad \sin\vartheta \approx \operatorname{tg}\vartheta \approx \vartheta$

fénysugarak $\longrightarrow$

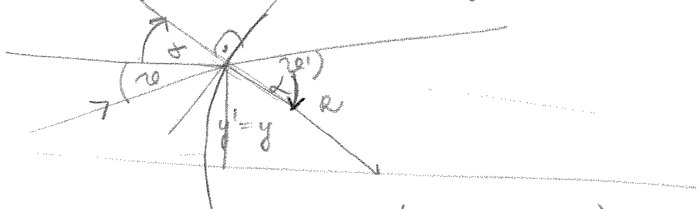
$$\begin{pmatrix} y' \\ n_2 \vartheta' \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}} \begin{pmatrix} y \\ n_1 \vartheta \end{pmatrix}$$



- szabad terj.

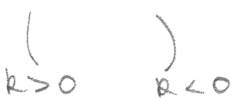
$$\left.\begin{aligned} y' &= y + d \cdot \operatorname{tg}\vartheta \approx y + \frac{d}{n} n\vartheta \\ n\vartheta' &= n\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{M}}_{szab} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- gömb a. törőfelület



$\alpha \approx -\dfrac{y}{R}$ $\qquad \underbrace{y' = y}$

$$n_1(\vartheta - \alpha) = n_2(\vartheta' - \alpha)$$

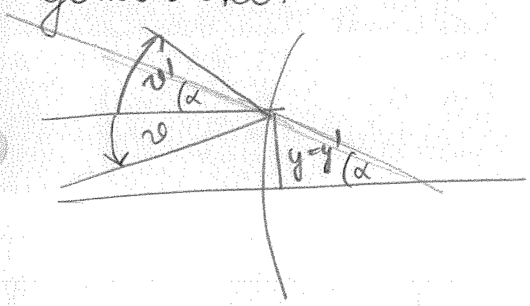


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

$$y' = y$$

$$n_2\vartheta' = \frac{n_1 - n_2}{R} \, dy + n_1\vartheta$$

• gömbtükör



$$y = y' \qquad \alpha \approx -\frac{y}{k}$$

$$\vartheta - \alpha = \alpha - \vartheta'$$

$$n\vartheta' = -\frac{2n}{k}y - n\vartheta$$

$$\begin{pmatrix} y' \\ n\vartheta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{k} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ n\vartheta \end{pmatrix}$$

~~tetsz~~ tetszőleges paraxiális optikai r. építőkövei

- szabad terj.
- törés gömbfelületen
- ~~tö~~ visszaverődés gömbfelületről

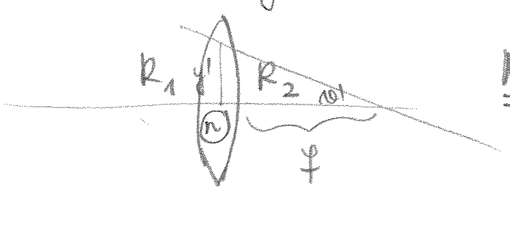
$$\xrightarrow{y_0,\ n\vartheta_0} (1) \xrightarrow{y_1,\ n\vartheta_1} (2) \xrightarrow{y_2,\ n\vartheta_2} (3) \xrightarrow{y_f,\ n\vartheta_f}$$

$$\begin{pmatrix} y_f \\ n\vartheta_f \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}_3 \cdot \underline{\underline{M}}_2 \cdot \underline{\underline{M}}_1 \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ n\vartheta_0 \end{pmatrix} \qquad \det \underline{\underline{M}} = \pm 1$$

fókuszpont: $y' = 0$ mindig $\forall\, y$-ra

leképezés: $\forall\, \vartheta^{\varphi}$-ra egy pontba gyűlnek

- gömbtükör fókusza $\quad \underline{\underline{M}}_d \cdot \underline{\underline{M}}_{tükör} \quad$ $M_{11} = 0$, $y'(\cancel{y}) = 0$
- leképezési tv.-e $\quad \underline{\underline{M}}_t\, \underline{\underline{M}}_{tükör}\, \underline{\underline{M}}_k \quad$ $\underline{\underline{M}}_{12} = 0$, $y'(\cancel{\vartheta})$
- vékony lencse fókusza



$$\underline{\underline{M}}_k \cdot \underline{\underline{M}}_L$$

$$\underbrace{\vartheta' = -\frac{y'}{f}}$$

$$\frac{1}{f} = -M_{21}$$

- lek. tv. $\quad \underline{\underline{M}}_t\, \underline{\underline{M}}_{lencse}\, \underline{\underline{M}}_k \qquad \underline{\underline{M}}_{12} = 0$

általános leképezés

$$\underline{\underline{M}}' = \begin{pmatrix} 1 & k_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underbrace{M_{21}}_{-\frac{1}{f}} & \underbrace{\det \underline{\underline{M}}}_{\pm 1} \end{pmatrix}$$

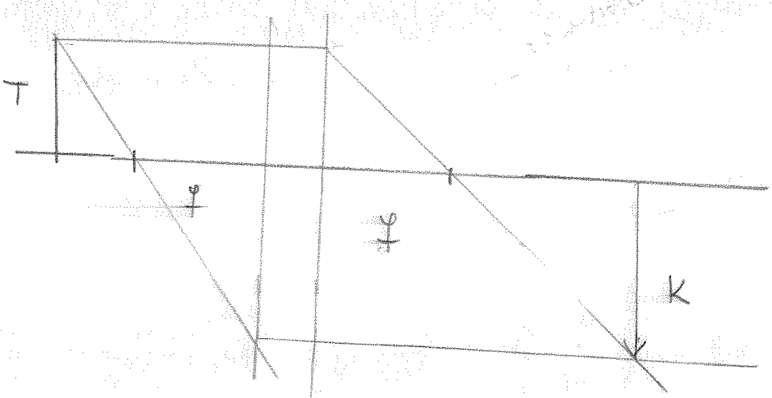
$$t_0 = \frac{1}{M_{21}} \left(\det \underline{\underline{M}} - M_{22} \right)$$

$$k_0 = \frac{1}{M_{21}} \left(1 - M_{11} \right)$$

fősíkok helye

képszerkesztés általános esetben

fősíkoktól mérni a fókusztávot

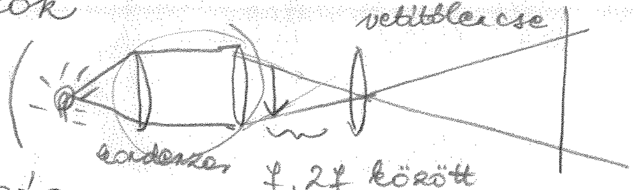


ha a két oldalon n nem azonos $\Rightarrow f_1 \neq f_2$

kausztikák (DGy)

optikai eszközök

- vetítőgép



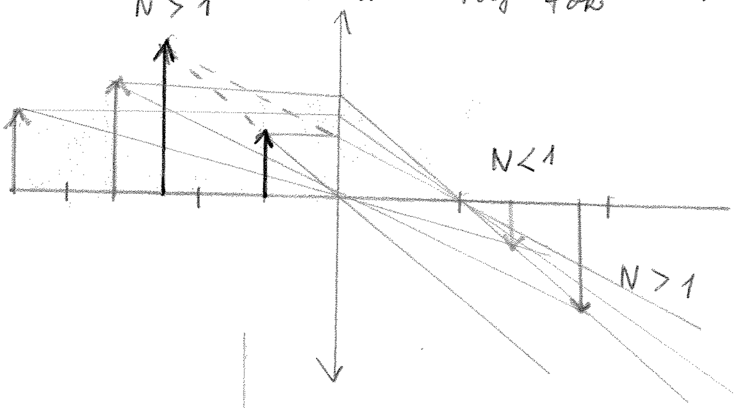
- fényképezőgép
- lupe : nagyított, virtuális kép

szemüveg rövidl. + szóról., távoll. + gyűjtől.

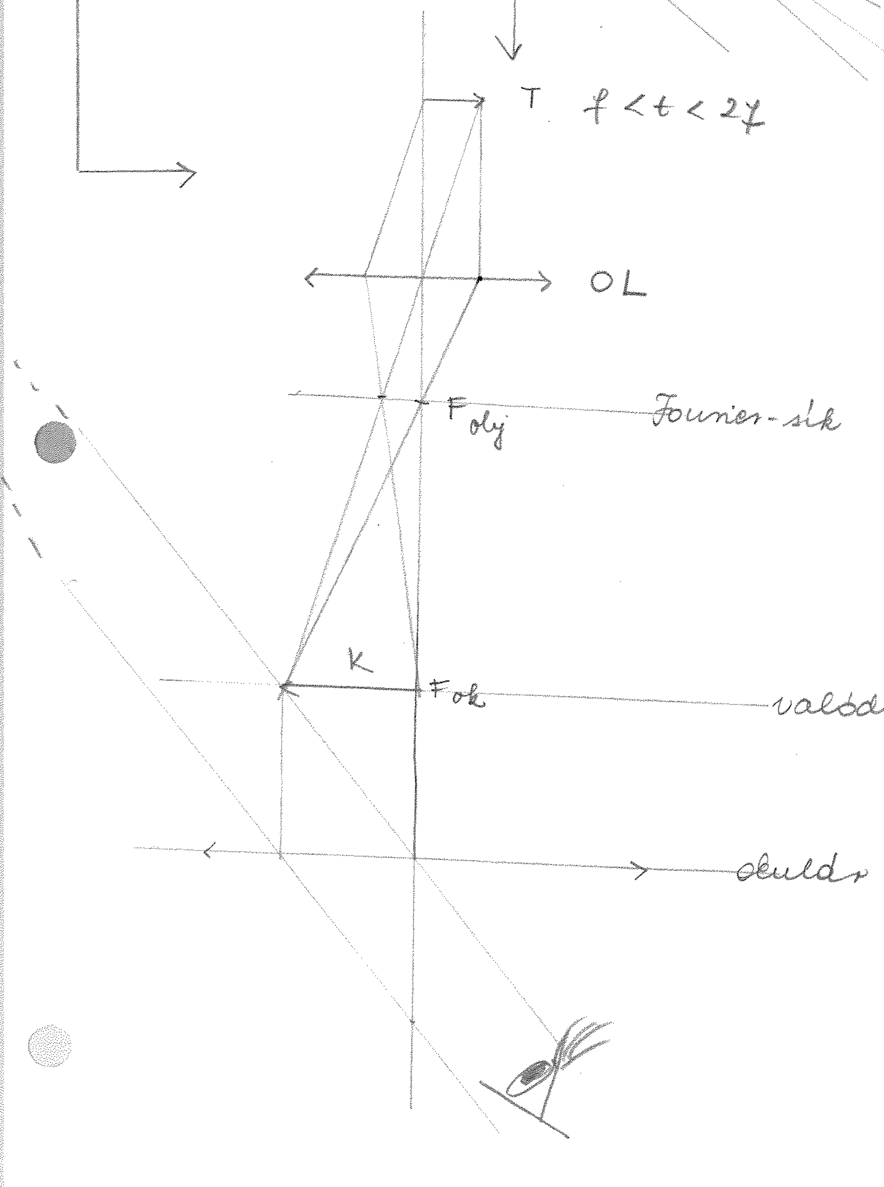
mikroszkóp

távcső (Kepler, Galilei, Newton)

f_1+f_2 $f_{obj}-f_{ok}$ 1 tükör



szóról. : mindig látszólagos, kicsinyített



felbontóképesség

lencse = rés ⇒ $\frac{\lambda}{D}$ diffr.

max. felb. mikr. :

$f \cdot \frac{\lambda}{D}$ NA

$n \cdot \sin\alpha$

optikai jelenségek a természetben

szivárvány

?

10. A kvantumelmélet alapvető kísérletei

Hőmérsékleti sugárzás

kocka alakú ideális vezető

4 vákuumbeli Maxwell-e. + HF-k: $E_t = 0$, $H_n = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{n} = (n_x, n_y, n_z) \\ \nu = 1/2\end{array}\right\} \text{ módus meghat.}$$

hány módus van $\leq \nu$-re?

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x^2}\ldots = 0 \longrightarrow \ddot{q} + \underbrace{4\pi^2 \nu_n^2}\, q = 0$$

$$\frac{4\cancel{\pi^2}\nu_n^2}{c^2} = \frac{\cancel{\pi^2}}{\ell^2}\underline{n}^2$$

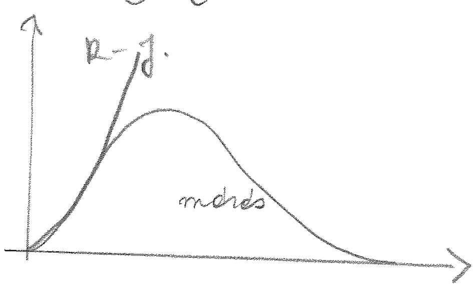
$$\underline{n}^2 \leq \frac{4\ell^2\nu_n^2}{c^2}$$

$$N = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2\ell\nu}{c}\right)^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{8\pi}{3} V \frac{\nu^3}{c^3}$$

(2: pol. irányok; $\frac{1}{8}$: nyolcadgömb)

$$dN = \frac{8\pi}{3}\frac{V}{c^3}\nu^2 d\nu \qquad u(\nu)d\nu = dN(\nu)\underbrace{\overline{\varepsilon(\nu)}}_{k_B T} \quad \text{(lin. osc.)}$$

$$u(\nu) = \frac{8\pi}{3}\frac{V}{c^3}\nu^2 k_B T \qquad \text{R-J.}$$



Planck: $P \sim e^{-\frac{h\nu}{kT}}$

$$\varepsilon_n = n\,\varepsilon_0$$

$$\overline{\varepsilon(\nu)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1}$$

$$U = \int_0^\infty u(\nu)\,d\nu = \frac{\pi^2}{15}\frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^4 c^3}$$

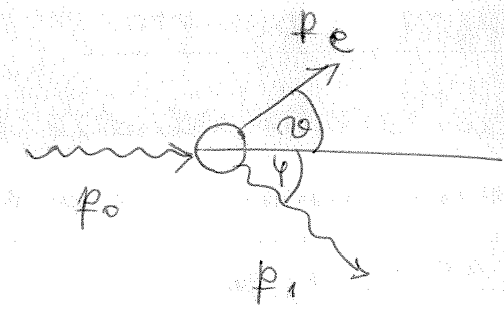
Stefan–Boltzmann-tv.

Wien-f. eltolódás is kijön

Fotoeffektus

Compton-effektus

relat.



$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \underline{p}\right) = m u^\mu$$

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma \underline{v})$$

$$E = mc^2 \gamma$$

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \qquad c \stackrel{!}{=} 1 \qquad E^2 - p^2 = m^2$$

E

$$\begin{cases} m_e c^2 + E_0 = E_e + E_1 & \longrightarrow \quad p_0 + m_e = \sqrt{m_e^2 + p_e^2} + p_1 \\ \underline{p}_0 = \underline{p}_e + \underline{p}_1 & \longrightarrow \quad p_e^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos\varphi \end{cases}$$

imp.

$$m_e^2 + p_e^2 = p_0^2 + m_e^2 + p_1^2 - 2p_0p_1 - 2m_e p_1 + 2p_0 m_e$$

$$\cancel{m_e^2} + \cancel{p_0^2} + \cancel{p_1^2} - \cancel{2}p_0 p_1 \cos\varphi = \cancel{p_0^2} + \cancel{m_e^2} + \cancel{p_1^2} - \cancel{2}p_0 p_1 - \cancel{2}m_e p_1 + \cancel{2}p_0 m_e$$

$$p_1 (p_0 + m_e - p_0 \cos\varphi) = p_0 m_e$$

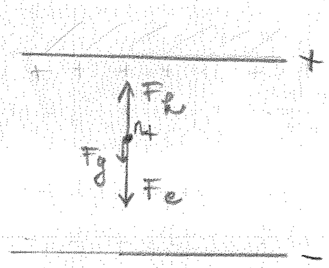
$$p_1 = \frac{p_0}{\frac{p_0}{m_e}(1-\cos\varphi) + 1}$$

$$h\nu_1 = \frac{h\nu_0}{\frac{h\nu_0}{m_e}(1-\cos\varphi) + 1}$$

Rutherford-kísérlet

elrendezés

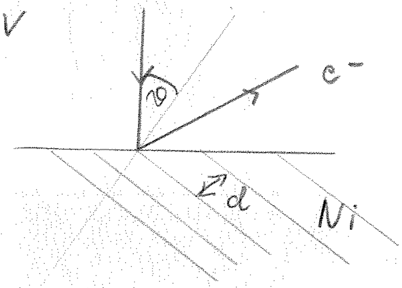
Millikan-kísérlet



$$6\pi\eta r v = mg + e\frac{U}{d}$$

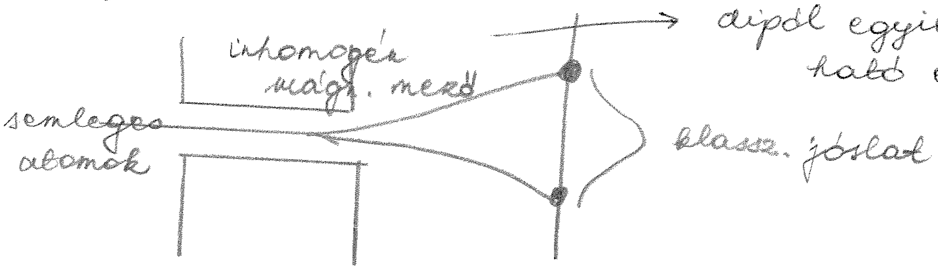
Davisson-Germer-kísérlet

54eV



$$2d\sin\vartheta = n\lambda$$

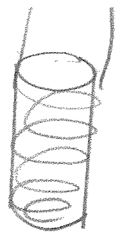
Stern-Gerlach-kísérlet



dipól egyik végére
ható erő nagyobb, mint a
másikra!

sajátimpulzusmomentum - kvantált

Einstein - de Haas kísérlet



$I\uparrow$ ⇒ spinek B-vel párh. állnak

$I\downarrow$ ⇒ imp. mom. változás ⇒ forog a henger

Zeeman-effektus

energiaszintek felhasadása
homogén mágneses térben

11. A kvantummechanika alapjai

- fiz. r. állapota – hullámfv.
- mérhető menny. – operátorok

$\downarrow$

<u>Hilbert-tér</u> : $\Psi \in L^2$ (bázisfv.-ek nem mindig $\in L^2$)

1. lin. tér (szuperpozícióból) $\left(\begin{array}{l} \Psi_1 \text{ megeng.} \\ \Psi_2 \text{ megeng.} \Rightarrow \Psi_1 + \Psi_2 \text{ is} \end{array} \right)$
2. $\exists$ skalárszorzat a szokásos def.-gal (Born-szabály, kifejtéshez)

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int dV\, \Psi_1^* \Psi_2 \qquad \text{bra-ket}$$

3. $\exists$ norma $\quad \|\Psi\| = \langle \Psi | \Psi \rangle^{\frac{1}{2}}$
4. a tér teljes

$$\text{ha } \|\Psi_n - \Psi_m\| \to 0 \Rightarrow \Psi_n \to \Psi \quad ? \text{ Fenn}$$

<u>mérhető fiz. mennyiségek</u>

- hozzárendelt operátor sajátfv.-ein meghat. értéke van: a sé.!
- különben: Born-szabály $|\Psi(\underline{r}, t)|^2 d^3\underline{r}$ vsz.!

$\Downarrow$

$$\text{ha } \Psi(\underline{r}, 0) = \sum_n c_n \Psi_n(\underline{r}) \Rightarrow p_n = |c_n|^2$$

$$\sum_n p_n = \sum_n |c_n|^2 = 1 \qquad (\text{térben szétválasztás!})$$

- op. $\Rightarrow$ sfv. teljes ortonormált r. alkotnak

↳ önadjungáltnak kell lennie!

- def.: $\langle m | \hat{A} n \rangle = \langle \hat{A}^+ m | n \rangle, \quad \hat{A} = \hat{A}^+$
- sé. valósak!
- sv.-ok ortogonálisak (kül. sé.-hez tart.)

$\downarrow$

kifejtés lehetséges

- <u>kifejtés, op. várható értéke</u>

- $|n\rangle \quad (n = 1, 2, \ldots)$ ortonorm. bázis

$$\langle m | n \rangle = \delta_{mn}$$

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \qquad c_m = \langle m | \Psi \rangle$$

$$|\Psi\rangle = \underbrace{\sum_n |n\rangle\langle n|}_{1\!\!1} \Psi\rangle$$

$1\!\!1$ teljességi reláció

projektoroperátor! $|n\rangle\langle n|$

- $$\langle \hat{A} \rangle_\Psi = \sum_n |c_n|^2 a_n = \sum_n \langle \Psi | n \rangle \langle n | \Psi \rangle a_n =$$

$$= \sum_n \langle \Psi \underbrace{| n \rangle a_n \langle n |}\Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$$

$$\hat{A}|\Psi\rangle = \hat{A} \sum_n |n\rangle\langle n|\Psi\rangle = \underbrace{\sum_n |n\rangle a_n}\langle n|\Psi\rangle$$

op. egységfelb.

- $$\hat{A}|\Psi\rangle = \sum_{m,n} |m\rangle\langle m|\hat{A}|n\rangle\langle n|\Psi\rangle$$

$$= \sum_m b_m |m\rangle$$

$$b_m = \sum_n A_{mn} c_n$$

$A_{mn} = A_{nm}^*$ önadj.

- <u>bázisváltás</u>

$$|\Psi\rangle = \sum_m c_m |m\rangle \equiv \sum_\alpha d_\alpha |\alpha\rangle$$

$$d_\alpha = \langle \alpha | \Psi \rangle = \sum_m \langle \alpha | m \rangle \langle m | \Psi \rangle = \sum_m U_{\alpha m} c_m$$

$$\langle \alpha | \hat{A} | \beta \rangle = \sum_{n,m} \langle \alpha | m \rangle \langle m | \hat{A} | n \rangle \langle n | \beta \rangle = \left(\underline{\underline{U}}\ \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{U}}^{-1} \right)_{\alpha\beta}$$

$$\langle \hat{U}\Psi | \hat{U}\Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{U}^+ \hat{U} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \Rightarrow \hat{U}^+ \hat{U} = 1\!\!1$$

unitér

- Schrödinger-egyenlet, szeparálása

$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar\omega \qquad e^{-i\omega t}\, e^{i\underline{k}\underline{x}}$

szabad r. diszp. rel. ⇒ keressünk olyan parc. diffe.-t, melynek síkhullám a megoldása!

$-i\frac{\hbar^{\cancel{2}} k^2}{2m} = \cancel{\hbar}-i\omega$

$i\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = \hbar\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta}_{\hat{H}}\psi$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi}$$

$\psi(\underline{r}, t) = \phi(r)\,T(t)$ keressük a mo.-t ilyen alakban

$i\hbar\dot{T}(t)\,\phi(r) = T(t)\,\hat{H}\phi(r)$

$$i\hbar\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\hat{H}\phi(r)}{\phi(r)} \overset{!}{=} E \quad (\text{const.})$$

$\dot{T}(t) = -i\frac{E}{\hbar}T(t) \qquad \hat{H}\phi(r) = E\phi(r)$

$T(t) = e^{-i\underbrace{\frac{E}{\hbar}}_{\omega}t}$

sajátértékegyenlet

stacionárius Schr.-e.

mo.: E_n, φ_n

$$\psi(r,t) = \sum_n \varphi_n(r)\cdot e^{-i\omega_n t}$$

- korrespondanciaelv

új elméletnek tartalmazni kell a „régit"

$n\to\infty$ kv. mech. ⇒ kl. mech. / eldin.

- Schrödinger- és Heisenberg-kép

$|\Psi(t)\rangle, \hat{A}, \hat{B}$ $\qquad$ $|\Psi_H\rangle, \hat{A}_H(t)$

$$\Psi(t) = \hat{U}(t)\,|\Psi(t=0)\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t) = \hat{H}\hat{U}(t)$$

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

$$\hat{U}^{+}(t) = e^{+\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \hat{U}^{-1}(t) \text{ ! unitér}$$

$$|\Psi_H\rangle = \hat{S}\,|\Psi(t)\rangle = \hat{S}\hat{U}(t)\,|\Psi(t=0)\rangle \qquad \hat{S} = \hat{U}^{-1} = \hat{U}^{+}$$

$$\hat{A}_H = \hat{S}\hat{A}\hat{S}^{+} = e^{+\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

$$\langle\Psi_H|\hat{A}_H|\Psi_H\rangle = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle$$

- határozatlansági reláció

$$\Delta x_i \cdot \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2}$$

Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség

$$|\langle a|b\rangle|^2 \leq \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle$$

$$\Delta\hat{A} := \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle \qquad [\hat{A},\hat{B}] = [\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}] \qquad |\Psi\rangle$$

$$\Delta\hat{B} := \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle$$

$$\langle\Delta\hat{A}\Psi|\Delta\hat{A}\Psi\rangle\langle\Delta\hat{B}\Psi|\Delta\hat{B}\Psi\rangle \geq |\langle\Delta\hat{A}\Psi|\Delta\hat{B}\Psi\rangle|^2$$

$$\langle\Psi|(\Delta\hat{A})^2|\Psi\rangle\langle\Psi|(\Delta\hat{B})^2|\Psi\rangle \geq \underbrace{|\langle\Psi|\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}|\Psi\rangle|^2}$$

$$\Big|\underbrace{\frac{1}{2}\langle\Psi|\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} - \Delta\hat{B}\Delta\hat{A}|\Psi\rangle}_{\in \mathrm{Im}} + \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\langle\Psi|\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} + \Delta\hat{B}\Delta\hat{A}|\Psi\rangle}_{\in \mathrm{Re}}\Big|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\Psi|\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} + \Delta\hat{B}\Delta\hat{A}|\Psi\rangle|^2$$

$$\underbrace{\langle\psi|(\Delta\hat{A})^2|\psi\rangle}_{(\Delta A)^2}\underbrace{\langle\psi|(\Delta\hat{B})^2|\psi\rangle}_{(\Delta B)^2} \geq \frac{1}{4}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|^2$$

$$\Delta A\cdot\Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|$$

$\Downarrow$

következménye az első példa

- $\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{A}_H]$ (elfelejtettem odaírni)

Impulzusmomentum

$$\hat{\underline{L}} = \hat{\underline{r}}\times\hat{\underline{p}}$$

$\hat{L}_k = \varepsilon_{klm}\hat{r}_l\hat{p}_m$ Descartesban, polárban

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$[L_i,L_j] = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\left[\varepsilon_{ikl}x_k\partial_l\varepsilon_{jmn}x_m\partial_n - \varepsilon_{jmn}x_m\partial_n\varepsilon_{ikl}x_k\partial_l\right] =$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\Big[x_k\delta_{lm}\partial_n + \cancel{x_k x_m\partial_l\partial_n} -$$

$$- x_m\delta_{nk}\partial_l - \cancel{x_m x_l\partial_n\partial_l}\Big] =$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\Big[\underbrace{\varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jmn}}_{\substack{\varepsilon_{mik}\varepsilon_{mjn}\\ \delta_{ij}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{kj}}}x_k\partial_n - \underbrace{\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmk}}_{\substack{\varepsilon_{kil}\varepsilon_{kjm}\\ \delta_{ij}\delta_{lm}-\delta_{im}\delta_{lj}}}x_m\partial_l\Big] =$$

$$= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\Big[\cancel{\delta_{ij}x_n\partial_n} - x_j\partial_i - \cancel{\delta_{ij}x_m\partial_m} + x_i\partial_j\Big] =$$

$$= i\hbar\,\varepsilon_{ijk}L_k$$

$$\underline{L}^2 = \sum_i L_i^2 \qquad [\underline{L}^2, L_i] = 0 \quad \text{közös sfv.-r.}$$

$$\underline{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\vartheta,\varphi} \qquad \Delta_{\vartheta,\varphi} Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$$

$$\partial_\varphi Y_{lm} = im\, Y_{lm}$$

$$\underline{L}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}$$

$$L_z Y_{lm} = \hbar m\, Y_{lm}$$

$$Y_{lm} = N_{l,m}\, e^{im\varphi} P_l^m(\cos\vartheta)$$

Spin, Pauli-egy.

Stern–Gerlach–kís. $\Rightarrow$ r. $\mathcal{J}$ sajátimpulzusmom.
hull. fv. ~~térbeli~~ forgatásokkal szembeni tr. tulajdonságait írja le.

$\hat{\underline{\mathcal{J}}} = \hat{\underline{L}} + \hat{\underline{S}}$ telj. imp. mom.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi(\uparrow) \\ \psi(\downarrow) \end{pmatrix} \text{ spinor}$$

Ehrenfest-t.

$\hat{\underline{v}} = \dot{\hat{\underline{r}}} \leftarrow$ kvantummech. idődenivált

$$\hat{\underline{v}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\underline{r}}] = \frac{i}{\hbar}\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \underbrace{\cancel{V(r)}}_{\text{0-t ad}}, \hat{\underline{r}}\Big]$$

$$\Delta(\underline{r}\psi) - \underline{r}(\Delta\psi) = 2\underline{\nabla}\psi \quad ???$$

$$\underline{\nabla}\big(\underbrace{\underline{\nabla}(\underline{r}\psi)}\big) - \underline{r}\,\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\psi)$$

$$\underbrace{\underline{\nabla}\Big[(\underbrace{\underline{\nabla}\underline{r}}_{3})\psi + \underline{r}(\underline{\nabla}\psi)\Big]} \qquad u\underline{\nabla}\psi - \underline{\nabla}(u\psi) = -(\underline{\nabla}u)\psi$$

$$3\underline{\nabla}\psi + 3\underline{\nabla}\psi + \cancel{\underline{r}\Delta\psi} - \cancel{\underline{r}\Delta\psi}$$

$$\hat{\underline{v}} = -\frac{i\hbar}{\cancel{2}m}\cancel{2}\underline{\nabla} = \frac{\hat{\underline{p}}}{m} \qquad \dot{\hat{\underline{v}}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\underline{v}}] = \frac{1}{m}[u, \underline{\nabla}] \Rightarrow m\dot{\hat{\underline{v}}} = -\underline{\nabla}u$$

12. Atom- és molekulaszerkezet

Kvantummechanikai közelítő módszerek

1. Perturbációszámítás

A, időfüggetlen, nem elfajult

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{W} \qquad \hat{H}_0 \text{ bázisán!}$$

$$\hat{H} \Psi = E \Psi \qquad |\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \qquad \hat{H}_0 |n\rangle = E_n^{(0)} |n\rangle$$

$$\hat{H}_0 + \lambda \hat{W} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle$$

$$\sum_n c_n (\hat{H}_0 + \lambda \hat{W}) |n\rangle = \sum_n c_n E |n\rangle \qquad / \cdot \langle m|$$

$$\sum_n c_n (E_n^0 \delta_{mn} + \lambda W_{mn}) = \sum_n c_n E \delta_{mn}$$

$$(E_m^{(0)} - E) c_m + \sum_n \lambda c_n w_{mn} = 0$$

$$E = E^{(0)} + \lambda E^{(1)} + \lambda^2 E^{(2)} + \dots$$

$$c_m = c_m^{(0)} + \lambda c_m^{(1)} + \dots$$

$$(E_m^{(0)} - E^{(0)} - \lambda E^{(1)} - \lambda^2 E^{(2)})(c_m^{(0)} + \lambda c_m^{(1)}) +$$

$$+ \sum_n \lambda (c_n^{(0)} + \lambda c_n^{(1)}) W_{mn} = 0$$

$$\lambda^0 : (E_m^{(0)} - E^{(0)}) c_m^{(0)} = 0 \qquad *$$

vagy $E^{(0)} = E_m^{(0)}$, vagy $c_m^{(0)} = 0$

legyen $E^{(0)} = E_i^{(0)}$; $c_m^{(0)} = \delta_{im}$ nem elf. !

m i - re $\Rightarrow (-\lambda E^{(1)} - \lambda^2 E^{(2)})(1 + \lambda c_i^{(1)}) +$

$$+ \lambda \Big(w_{ii}(1 + \lambda c_i) + \sum_{n \neq i} w_{in} (\lambda c_n^{(1)}) \Big) = 0$$

szétbontás

$$(\cancel{-\lambda E^{(1)}} - \lambda^2 E^{(2)})(1+\lambda c_i^{(1)}) +$$

$$+\lambda \left\{ \underset{n=i}{\cancel{W_{ii}(1+\lambda c_i^{(1)})}} + \sum_{n\neq i} W_{in}\left(\lambda c_n^{(1)} + \dots\right) \right\}$$

$$\lambda^1: \quad E^{(1)} = W_{ii} = \langle i | \hat{W} | i \rangle \qquad -\lambda^2 E^{(1)} c_i^{(1)} = -\lambda^2 \underset{E^{(1)}}{W_{ii}} c_i^{(1)}$$

$$\lambda^2: \quad E^{(2)} = \sum_{n\neq i} W_{in} c_n^{(1)}$$

ezt visszaírva fentre

$m \neq i$ -re $\qquad c_m^{(0)} = \delta_{im} = 0$

$$\left(E_m^{(0)} - E_i^{(0)} - \lambda E^{(1)} - \lambda^2 E^{(2)}\right)\left(\lambda c_m^{(1)}\right) +$$

$$+\lambda \left\{ W_{mi}(1+\lambda c_i^{(1)}) + \sum_{n\neq i} W_{mn}\left(\lambda c_n^{(1)} + \dots\right) \right\} = 0$$

$$\lambda^1: \quad c_m^{(1)} = \frac{W_{mi}}{E_i^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

$$\Downarrow$$

végeredményben:

$$E^{(0)} = E_i^{(0)}$$

$$E^{(1)} = W_{ii}$$

$$E^{(2)} = \sum_{n\neq i} \frac{W_{in} W_{ni}}{E_i^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

B, időfüggetlen, elfajult

$$\lambda^1: \quad \underbrace{E^{(1)} c_m^{(0)} = \sum_n w_{mn} c_n^{(0)}}$$

sajátértékegyenlet !

⇓

az elfajult altérben $\hat{W}$-t diagonalizáljuk

p-szeresen elf. $E_i^{(0)}$ sajátérték

$|i1\rangle, |i2\rangle, \ldots, |ip\rangle$ bázisvekt.

$W_{rs}^{i} = \langle ir | \hat{W} | is \rangle$ mx. elemek

p-ed fokú kar. e. megoldása!

C, időfüggő

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \lambda \hat{W}(t) \qquad \hat{H}_0 \text{ bázisán}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_n c_n |n\rangle\right) = \sum_n c_n\left(\hat{H}_0 + \lambda \hat{W}(t)\right)|n\rangle \qquad / \cdot \langle m|$$

$$i\hbar \dot{c}_m = c_m E_m + \lambda \sum_n w_{mn}(t)\, c_n(t)$$

$$\dot{c}_m = -\frac{i}{\hbar}\left(c_m(t) E_m + \lambda \sum_n w_{mn}(t)\, c_n(t)\right)$$

$$c_m(t) = c_m^{(0)}(t) + \lambda c_m^{(1)}(t)$$

$$\lambda^0: \quad c_m(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t} c_m(0)$$

legyen $b_m(t) = e^{\frac{i}{\hbar}E_m t} c_m(t)$ λ^0 rendben áll.

$$\dot{b}_m(t) = \cancel{\frac{i}{\hbar} E_m \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}E_m t} c_m(t)}_{b_m(t)}} + \underbrace{\dot{c}_m(t)} e^{\frac{i}{\hbar}E_m t} =$$

$$\cancel{-\frac{i}{\hbar} c_m(t) E_m e^{\frac{i}{\hbar}E_m t}} - \frac{i}{\hbar}\lambda \sum_n w_{mn} c_n$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\lambda \sum_n w_{mn}\, e^{\frac{i}{\hbar}E_m t}\, \underbrace{b_n(t)}_{\approx c_n(0)} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

$$b_m(t) \approx -\frac{i}{\hbar} \sum_n \int_0^{t'} e^{i\omega_{mn}t'} W_{mn}(t') c_n(0)\, dt'$$

kezdeti állapot: $c_n(0) \stackrel{!}{=} \delta_{in}$

$f \neq i$ végállapot valószínűsége

$$P_{fi} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t e^{i\omega_{fi}t'} W_{fi}(t')\, dt' \right|^2 \rightarrow$$

Fermi-f. aranyszab.

$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |K_{fi}|^2 (\delta + \delta)$

$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |K_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i)$

$T_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |K_{fi}|^2 g$

---

tehát az átmenet valószínűsége csak akkor nagy, ha $W_{fi}(t')$ közel olyan frekvenciával oszcillál, mint amilyent a perturbálatlan $\hat{H}$ szintkülönbségei adnak!

pl. fény által okozott kvantumátmenetek rezonanciaszerű viselkedése

II. Variációs módszerek

pl. Ritz-f. variációs m.

$E_0 \leq \int \psi^* \hat{H} \psi\, dq$ ha ψ norm.

$$\int \psi^* \hat{H} \psi\, dq = \sum |a_n|^2 E_n \geq E_0$$

keressük: $\min \int \psi^* \hat{H} \psi\, dq$, ha $\int \psi^* \psi\, dq = 1$

$\int \psi^* \psi_0\, dq = 0$

$$f(\psi, \lambda) = \int \psi^* \hat{H} \psi\, dq - \underset{\text{sé.}}{\lambda} \left(\int \psi^* \psi\, dq - 1 \right)$$

szélsőérték-keresés

lok. min.: sé.-k

glob. min.: alapállapot

III. Átlagtérközelítés, egyéb

- nem kh. r. $\hat{H} = \sum_{l=1}^{N} \hat{H}_l \Rightarrow \phi(1,2,3,\dots) = \phi_a(1)\phi_b(2)\dots$

+ Pauli-elv $\Rightarrow$ Slater-determináns

- önkonzisztens becslés

1 r. a többi r. terét kiátlagolva érzi

megoldjuk $\Rightarrow$ az új tereket visszarakjuk

iteráljuk, míg nem konvergál

kettő együtt: Hartree-Fock-módszer

Alkalmazások

I. Stark-effektus

$E = (0, 0, \varepsilon)$ + H-atom

$$\hat{H} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{r}}_{\hat{H}_0} \underbrace{- e\varepsilon}_{\hat{V}}$$

degenerált időfüggetlen pert.

$$\hookrightarrow \psi_{nlm} = \frac{1}{r}\chi_{nl}(r) Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$$

$n=1$ $E_1^{(1)} = \langle \psi_{100} | -e\varepsilon z | \psi_{100} \rangle = 0$

$$n=2 \quad \left.\begin{array}{lll} \rightarrow & l=1 & m=-1,0,1 \\ \rightarrow & l=0 & m=0 \end{array}\right\} \text{ 4x-esen elfajult!}$$

$\varphi_1 = \psi_{200}$ $\varphi_2 = \psi_{210}$ $\varphi_3 = \psi_{211}$ $\varphi_4 = \psi_{21,-1}$

$$\begin{pmatrix} \cancel{V_{11}} & V_{12} & 0 & 0 \\ V_{21} & \cancel{V_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{V_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{V_{44}} \end{pmatrix}$$

ψ_{200}, ψ_{210} valós

$V_{21} = V_{12}$

belátható, hogy ezek 0-k

$$V_{12} = V_{21} = \int d^3 \underline{r}\, \varphi_1 (-ez\mathcal{E})\, \varphi_2 =$$

$$= \int r^2 dr\, \underbrace{d(\cos\vartheta)}_{?\,\frac{2}{3}}\, \underbrace{d\varphi}_{2\pi}\, \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{r}{2\varrho_0}\right) e^{-\frac{r}{2\varrho_0}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\cdot (-e\,\mathcal{E}\, r\cos\vartheta) \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{r}{\varrho_0} e^{-\frac{r}{2\varrho_0}} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta = 3e\,\mathcal{E}\varrho_0$$

$$\left| \begin{matrix} 0 - E^{(1)} & \\ & \ddots \end{matrix} \right| = E^{(1)^4} - (3e\,\mathcal{E}\varrho_0)^2$$

$+\,3e\,\mathcal{E}\varrho_0$	$-\,3e\,\mathcal{E}\varrho_0$	0	0	sé.
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \varphi_2)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - \varphi_2)$	φ_3	φ_4	sv.

$\Delta E \propto \mathcal{E}$ lineáris Stark-eff.

II. Zeeman-effektus

normális / anomális

$>$ finomszerk. $\qquad <$ finomszerk. $\qquad \underline{J}$ marad meg

$\downarrow \qquad$ $\underline{B}$ hatása kisebb, hogysem pert. tudjon

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) - \underline{H}\,\underline{\hat{M}}_{\sim}$$

Pauli-egy.

$-\mu_B\, g \frac{\hat{\underline{J}}}{\hbar}$ $\quad g_L = 1$, $g_S = 2$ $\qquad \frac{e}{2mc}(\hat{\underline{L}} + 2\hat{\underline{S}})$ $\qquad E_{nlm\sigma} = \ldots + \frac{e\hbar}{2mc} \cdot H(m + 2\sigma)$

$2l+1$ $\boxed{\begin{matrix}\Delta s = 0 \\ \Delta m_s = 0\end{matrix}}$

anomális Zeeman

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$\vec{S}_{avg} = \frac{(\vec{S}\vec{J})}{J^2}\vec{J} \qquad \vec{L}_{avg} = \frac{(\vec{L}\vec{J})}{J^2}\vec{J}$$

$$\langle V_M \rangle = \frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}\left(g_L \frac{\vec{L}\vec{J}}{J^2} + g_S \frac{\vec{S}\vec{J}}{J^2}\right)\vec{B}$$

$$\vec{L} = \vec{J} - \vec{S}$$

$$\vec{L}^2 = \vec{J}^2 + \vec{S}^2 - 2\vec{S}\vec{J}$$

$$\vec{S}\vec{J} = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2 + \vec{S}^2 - \vec{L}^2\right) \to \frac{\hbar^2}{2}\cdot\left(j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)\right)$$

$$\vec{L}\vec{J} = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2 - \vec{S}^2 + \vec{L}^2\right) \to \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - s(s+1) + l(l+1)\right)$$

$$J_z \to \hbar m_j$$

$j \to$ felh. száma

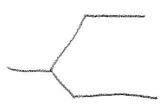
$$V_M = \mu_B B m_j g_j$$

III. Spin-pálya-kh. – finomszerkezet

$$\hat{V} = \xi(r)\underbrace{\vec{L}\vec{S}}$$

$$\frac{1}{2}\left(\vec{J}^2 - \vec{S}^2 - \vec{L}^2\right) \qquad s = \frac{1}{2} \Rightarrow \qquad j = l + \frac{1}{2}$$

$$j = l - \frac{1}{2}$$



IV. A mag mágn. momentumának hatása

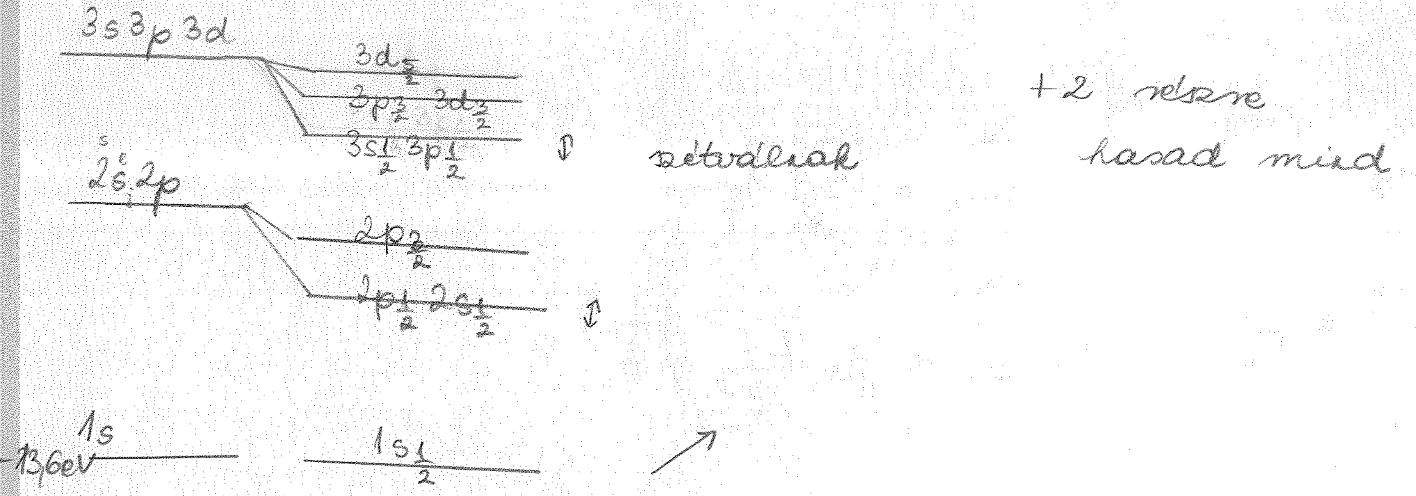
$$\hat{V} = \xi(r)\hat{I}\hat{J} \qquad \vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$$

+ Lamb-shift

kvantumeldin

zérusponti energiafluktuáció

Összefoglaló ábra



Bohr-modell | finomszerk. j szerint | Lamb-shift | hiperfinom szerk. magspin

Szórás centrális térben, hkm.

$$j_{be} \rightarrow dN(\vartheta, \varphi)$$

$$j_{be} \cdot \sigma(\vartheta, \varphi)\, d\Omega = dN(\vartheta, \varphi)$$

$$\psi_{be} = e^{ikz}$$

$$\psi_{ki} = e^{ikz} + f(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\underline{j} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\underline{\nabla} \psi^* \cdot \psi - \underline{\nabla} \psi \cdot \psi^* \right)$$

$$\left. \begin{aligned} j_{be} &= \frac{\hbar k}{m} \\ j_{ki\,szórt} &= \frac{\hbar k}{m r^2} |f|^2 \end{aligned} \right\} \quad \sigma(\vartheta, \varphi) = |f(\vartheta, \varphi)|^2$$

Schr. -e. szeparálása

$\underline{R}_{TKP} \to E_c \overset{!}{=} 0$

$\underline{r}_{rel.}$ $\psi(\underline{r}) := R(r) \underbrace{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}_{\text{sél.}:\ -\frac{l(l+1)}{r^2}}$ ábrázás

$u = rR$

radiális, 1D Schr.-e. megoldása

$$u'' - \frac{l(l+1)}{r^2}u - \frac{2\mu}{\hbar^2}Vu = -k^2u$$

- $l=0,\ V=0$
- $V=0,\ l\neq 0,\ r\to\infty$
- $l\neq 0,\ V\neq 0,\ r\to\infty \Rightarrow \psi \xrightarrow[r\to\infty]{}$

$$e^{ikz} + f\frac{e^{ikr}}{r} = \sum_l A_l \frac{1}{r}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) P_l(\cos\vartheta)$$

$$\sigma_{total} = \int \sigma\, d\Omega = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty} \sin^2\delta_l\,(2l+1)$$

<u>Alagúteffektus</u>

1. lerajzolni, felírni, határfelt. ill., normálni
2. transzfermátrix

lépcső + szabad terj.

$$L(k', k) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\frac{k}{k'} & 1- \\ 1- & 1+ \end{pmatrix} \qquad E_a(k) = \begin{pmatrix} e^{ika} & 0 \\ 0 & e^{ika} \end{pmatrix}$$

$V_0 > 0 \quad E < V_0 \quad k'^2 = -q'^2 \quad k' = iq'$

$$T_{22} = \dots \qquad |T_{22}|^2 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\,\mathrm{sh}^2(q'a)}$$

a nő $\Rightarrow$ exp. csökk., V_0 nő ≈ -2 hatv. csökk.

He-atom

$$H^1 = H^1_0 + \frac{e^2}{r_{12}}$$

H^1_0 sfv. : $\varphi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_a(1)\varphi_b(2) + \varphi_a(2)\varphi_b(1)\right)$ $S=0$

$\varphi^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_a(1)\varphi_b(2) - \varphi_a(2)\varphi_b(1)\right)$ $S=1$

$E^{(0)} = E_a + E_b$ deg.

$\Downarrow$

pert. sz.

1. $V^1 = \frac{e^2}{r_{12}}$ diag., teljesül

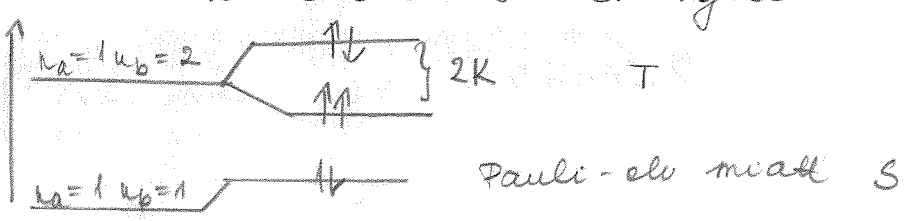
$$\Delta E_1 = C + K$$

$$\Delta E_3 = C - K$$

$C = \iint d^3r_1\, d^3r_2\, |\varphi_a(1)|^2 |\varphi_b(2)|^2 \frac{e^2}{r_{12}}$ Coulomb-en.

$K = \iint d^3r_1\, d^3r_2\, \varphi_a^*(1)\varphi_b(2)\varphi_b^*(2)\varphi_a(1)\frac{e^2}{r_{12}}$

kicserélődési energia



Periódusos rendszer

$_n{}^{2S+1}L_j$ elektronkonfiguráció

Bohr: $(2l+1)(2s+1)$ degeneráció – felhasad!

Hartree-módszer

Kétatomos molekulák

nehéz magok ⇒ tfh. rögz.

minimalizáció e^-- energiára az elh. fv.-ekben

⇒ Born-Oppenheimer-közelítés

13. A magfizika alapjai

1. Történeti áttekintés

- Röntgen
- Becquerel
- Curie
- Rutherford mag
- Chadwick n^0
- Anderson – Dirac e^+

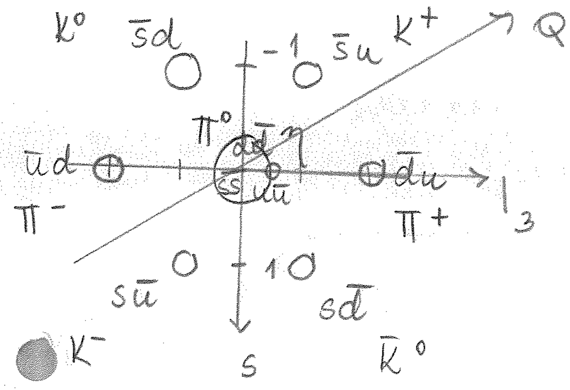
magerő, izospin, pion

2. Elemi részecskék és alapvető kölcsönhatások

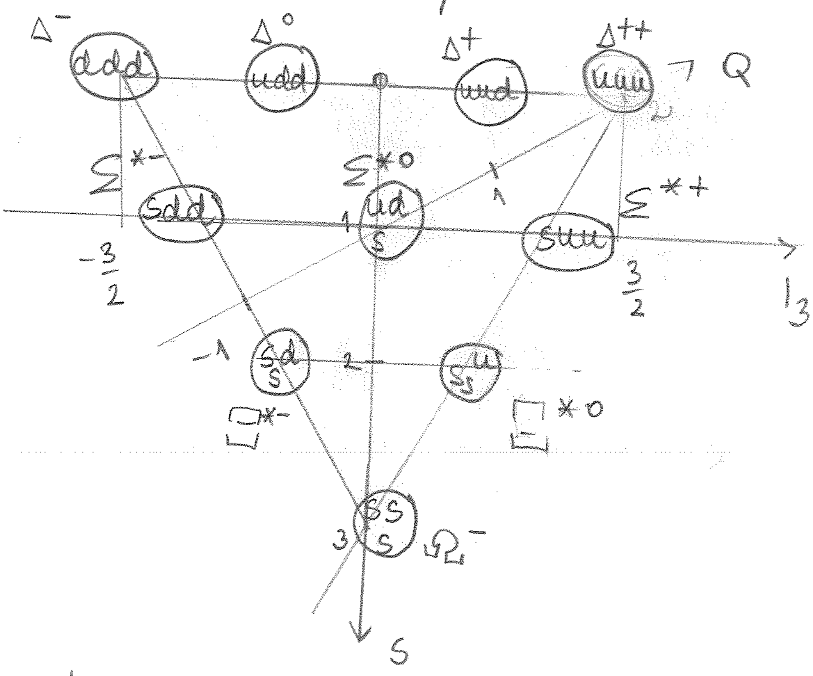
- kvarkmodell

V- részecskék, rezonanciák

mezon oktett



barion dekuplett



	I_3	Q
s	0	$-\frac{1}{3}$
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
d	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$

SU(3) színszimmetria – színkv. szám

fehér részecskék

2 kvark – mezon, 3 kvark – barion

[illegible], b, t

• standard modell

	fermionok			bozonok
kvark	u	c	t	γ
	d	s	b	Z
lepton	ν_e	ν_μ	ν_τ	W
	e	μ	τ	g

3 család

+ Higgs-bozon?

erőhatás-közvetítők

erős	gluon	QCD
gyenge	$W^\pm, Z^0$	QED
EM	γ	
grav.	graviton	?

erős kh.

„színes" r.-k között (ko. + gluon)

kvarkbezárás

gyenge kh.

ízváltoztatás

$u \rightarrow d + e^+ + \nu_e$ rövid hatótáv

$\uparrow$ tömeggel rendelkező mértékbozonok

EM: $m_\gamma = 0 \Rightarrow$ végtelen hatótáv

töltött r.-k

3. Atommagok tulajdonságai

A tömegszám

Z p^+ $R \sim R_0 A^{\frac{1}{3}}$ $R_0 \approx 1{,}4$ fm

A − Z n^0

• kötési energia

$$\underbrace{E_B}_{\Delta m c^2} = m_A c^2 - Z m_p c^2 - N m_n c^2 < 0$$

$\Delta m c^2$ tömegdefektus

• FEKF

$$E_B = c_1 \cdot A - c_2 \cdot A^{\frac{2}{3}} - c_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - c_4 \frac{(N-Z)^2}{A} - c_5 \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}}$$

c_1: térfogati tag

$\sim A$: rövid távolságra ható magerők

c_2: felületi tag

a felszínen levő nukleonok kevesebb vonzást éreznek

c_3: protonok el. taszítása, Coulomb-tag

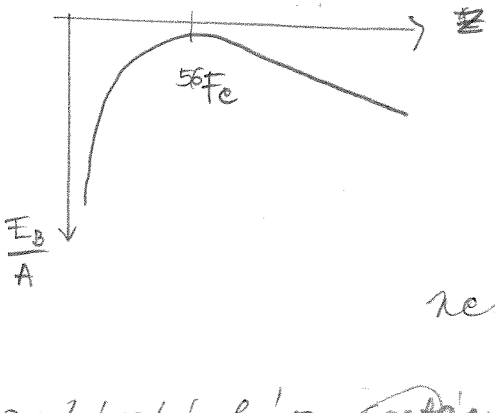
c_4: aszimmetria-tag

stabil magokban több neutron

c_5: $\delta = +1$: N, Z ps.

$\delta = 0$: ~~N, Z~~ egyik ps. másik ptl.

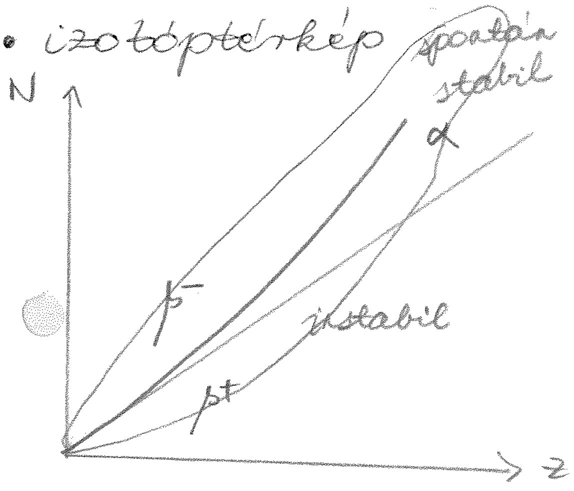
$\delta = -1$ mindkettő ptl.



$$Z = \frac{A/2}{1 + \frac{c_3}{4c_4} A^{\frac{2}{3}}} \leftarrow \begin{matrix} A \text{ adott} \\ E_B \text{ max.} \end{matrix}$$

nehezebb magokra $Z \neq \frac{A}{2}$

• izotóptérkép



egzotikus magok pár különleges, kilóg a modellekből

- magmodellek
  - kollektív – pl. folyadék cseppmodell
  - független r. modell – közel ftl. nukleonok átlagpotenciálban mozognak megtartják önálló kvantumszámaikat

cseppmod.

kötési E

telítettség

hasadás

mágikus számok? $\underbrace{8, 20, 28, 50, 82,}_{\text{héjmodell}} 126$

ftl. r. m.

Fermi-gáz

harm. oszc. + rel. spin-pálya csat.

4. Radioaktivitás

- N, bomlási vsz. $\lambda dt = p_1$

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \qquad N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \qquad t_{1/2} = \frac{\log 2}{\lambda}$$

$$A = \lambda N \qquad [A] = Bq \qquad \tau = \frac{t_{1/2}}{\log 2} = \frac{1}{\lambda}$$

bomlási sorok ^{238}U, ^{235}U, ^{232}Th, ^{237}Np

radioaktív es.

abszolút aktivitás

indukált radioaktivitás

párhuzamos bomlás

?

- γ, α, β → + $\quad \mu \to d + e^+ + \nu_e$
  → − $\quad d \to u + e^- + \bar{\nu}_e$
  → K $\quad u + e^- \to d + \nu_e$

5. Magfúzió, Napmodell

- $p^+ + p^+$ lánc ①
- CNO-ciklus ②

① $p^+ + p^+ \longrightarrow {}^2H + e^+ + \nu_e$ gyenge ⇒ lassú „deutérium"-szűkület

$^2H + {}^1H \longrightarrow {}^3He + \gamma$

$^3He + {}^3He \longrightarrow {}^4He + 2p$

$4p^+ \longrightarrow {}^4He + 2e^+ + 2\nu_e + \cancel{\gamma}\ 26{,}2\ MeV$

②

$^{12}C + p \longrightarrow {}^{13}N + \gamma$

$^{13}N \longrightarrow {}^{13}C + e^+ + \nu_e$

$^{13}C + p \longrightarrow {}^{14}N + \gamma$

$^{14}N + p \longrightarrow {}^{15}O + \gamma$

$^{14}O \longrightarrow {}^{15}N + e^+ + \nu_e$

$^{15}N + p \longrightarrow {}^{12}C + {}^4He$

- Σ ugyanaz!

sok neutrínó

ν_e fluxus: $\frac{1}{3}$ észlelhető

neutrínóoszcilláció

6. Sugárzás és anyag kölcsönhatása, detektorok

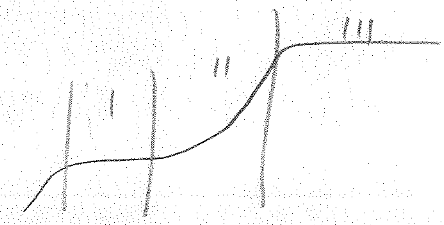
ionizáció	fotoeffektus	kis E
fékezési sugárzás	Compton-szórás	↓
Cserenkov-sugárzás	párkeltés	nagy E

ködkamra

buborékkamra

gáztöltésű detektorok

- ionizációs — megjelennek
- proporcionális — erősítés
- GM-számláló — beütés



- sokszálas prop.
- időprojekciós
- drift cső

félvezető detektorok

szcintillátorok

7. Sugárvédelem

ALARA-elv

árnyékolás

minél távolabb

minél rövidebb ideig

elnyelt dózis

effektív dózis

egyenérték dózis

évi átlagos dózis

14. A termodinamika statisztikus alapozása

Entrópia

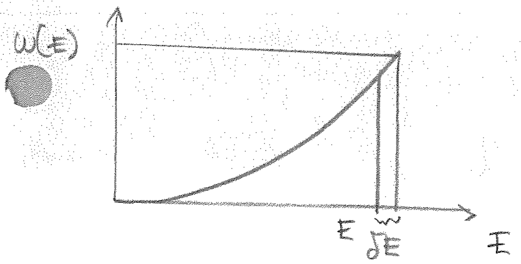
$S_{inf} = -\sum_i p_i \ln p_i$ hiányzó inf. mértéke

$S_{inf} \geq 0 \quad = \Leftrightarrow$

$S_{inf} \leq \ln n \quad = \Leftrightarrow$

$$S_{inf} = -\sum_n \frac{1}{\Omega(E,\delta E)} \cdot \ln \frac{1}{\Omega(E,\delta E)} = \ln \Omega(E,\delta E)$$

$$S = k_B \cdot \ln \Omega(E,\delta E)$$

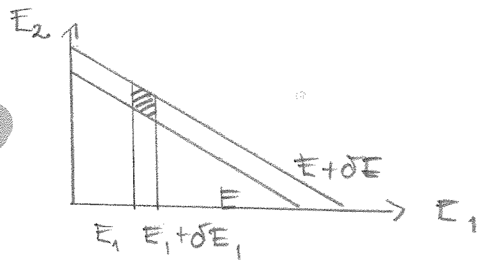


$$k_B \ln \omega(E)\,\delta E \leq k_B \ln \Omega_0(E) \leq k_B \ln \omega(E) E$$

$$T_{\square} - T_{\square} = \ln \underbrace{\frac{E}{\delta E}}_{N} \qquad \Theta(\ln N) =$$

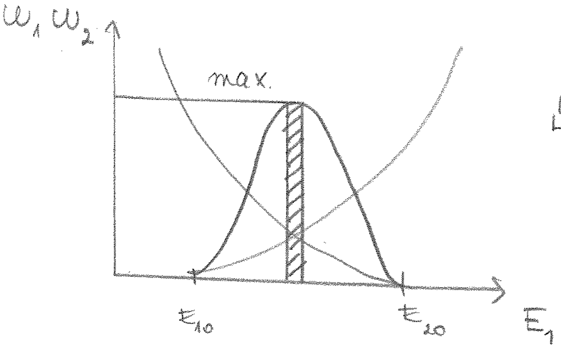
Mikrokanonikus

izolált r.



$$P \sim \frac{\Omega_1(E_1,\delta E_1)\cdot \Omega_2(E-E_1,\delta E)}{\Omega(E,\delta E)} \sim$$

$$\sim C \cdot \omega_1(E_1)\,\omega_2(E-E_1)\cdot \delta E_1$$



$$\Omega_1(E_1^*,\delta E_1)\,\Omega_2(E_2^*,\delta E)\cdot\cancel{\delta E_1} \leq$$

$$\leq \Omega(E,\delta E) \leq \underbrace{\frac{E_1}{\delta E_1}}_{\Theta(\ln N)} \Omega_1 \cdot \Omega_2$$

$S(E) = S_1(E_1^*) + S_2(E_2^*)$ max. $\Rightarrow$

$$\frac{\partial S_1}{\partial E_1} - \frac{\partial S_2}{\partial E_2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} \quad \text{stat. hőm.}$$

anyagi kh.

$$P(E_1, \Delta E_1, N_1) = e^{\frac{S_1(E_1, N_1) + S_2(E_2, N_2)}{k_B}} \Delta E_1$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \quad \text{és} \quad \frac{\partial S_1}{\partial N_1} = \frac{\partial S_2}{\partial N_2}$$

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} \qquad -\frac{\mu}{T_1} = -\frac{\mu}{T_2}$$

mech. kh. $S_1(E_1, V_1) + S_2(E_2, V_2) = \max.$

$$\frac{\partial S_1}{\partial V_1} = \frac{\partial S_2}{\partial V_2} \qquad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

gondolatkísérlet

$$E_0 = E + U(z) \qquad E = E_0 - U_z \qquad V + z \cdot A = \text{const.}$$

$$\frac{dS}{dz} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial E} \underbrace{\frac{\partial E}{\partial z}}_{-\frac{\partial U_z}{\partial z}} + \frac{\partial S}{\partial V} \underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}}_{-A} = 0$$

$$F = A \frac{\partial S}{\partial V} \cdot T$$

$$\frac{F}{A} = p = \frac{\partial S}{\partial V} \cdot T$$

fundamentális egyenlet

$$dS = \frac{\partial S}{\partial E} dE + \frac{\partial S}{\partial V} dV + \frac{\partial S}{\partial N} dN$$

$$dE = TdS - pdV + \mu dN$$

pl. mikrokan.

- id. g. kl.
- lin. oszc. kv.

Kanonikus sokaság

$$E_1 + E_2 = E$$

$$N_1 \ll N_2, \quad E_1 \ll E_2$$

$$p(E_1, E_1 + \delta E_1) = \frac{\Omega_1(E_1, \delta E_1) \cdot \Omega_2(E_2, \delta E)}{\Omega(E, \delta E)}$$

$$\Omega_2(E_2, \delta E) = e^{\frac{S_2(E_2)}{k_B}} = e^{\underbrace{\frac{S_2(E - E_1)}{k_B}}}$$

$$S_2(E) + \underbrace{\left.\frac{\partial S_2}{\partial E_2}\right|_E}_{-\frac{1}{T_2}} E_1 + \dots$$

$$p \sim e^{-\frac{E_1}{k_B T}} \Omega_2$$

$$p = \frac{g \cdot e^{-\frac{E_1}{k_B T}}}{Z} \qquad Z = \begin{cases} \text{kl.} & \int \frac{d^f p \, d^f q}{h^f N!} e^{-\beta \mathcal{H}(p,q)} \\ \text{kv.} & \sum_n e^{-\beta E_n} \end{cases}$$

$$\int_{E_0}^{\infty} e^{-\beta E} \omega(E) \, dE$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \qquad \Delta E^2 = \overline{E^2} - \bar{E}^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = -\underbrace{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta}}_{\frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \beta}} = c_V k_B T^2$$

$$\ln Z = -\beta \bar{E} + \ln(\omega(\bar{E}) \Delta E) + \mathcal{O}(\ln N)$$

Gauss-közelítésből

$$-\frac{1}{\beta} \ln Z = \bar{E} - \underbrace{k_B T \ln(\omega(\bar{E}) \Delta E)}_{TS} = F$$

$$F = -k_B T \ln Z$$

$$F = E - TS$$

$$dF = -S dT - p dV + \mu dN$$

ft. rendszerek állapotösszege $Z = Z_A \cdot Z_B$

pl. id. g. $Z_1, Z_N, F, E, S, \mu, p$

kv. Z, E, c

Nagykanonikus sokaság

$$E_1 + E_2 = E \qquad S_2(E_2, N_2) =$$

$$N_1 + N_2 = N$$

$$= S_2(E, N) + \underbrace{\frac{\partial S_2}{\partial E_2}}_{\frac{1}{T_2}}(-E_1) + \underbrace{\frac{\partial S_2}{\partial N_2}}_{-\frac{\mu_2}{T_2}}(-N_1)$$

$$P \sim e^{-\frac{E_1}{k_B T_2}} e^{+\frac{\mu_2}{k_B T_2} N_1} \Omega_1$$

$$P \sim \Omega(E, N) e^{-\beta E - \alpha N}$$

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \left(\sum_n e^{-\beta E_n - \alpha N} \right) = \sum_N e^{-\alpha N} Z_N$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \dots \qquad \frac{\partial Z}{\partial \alpha} = \dots \qquad \bar{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \qquad \bar{N} = k_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}$$

$$\Delta E^2 = -\frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta} \qquad \Delta N^2 = k_B T \frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu}$$

$$-k_B T \ln Z = E - \mu N - TS \qquad \phi = -k_B T \ln Z$$

$$d\phi = -S dT - p dV - N d\mu$$

pl. id. g. $\quad Z_1 \quad \mathcal{Z} = e^{Z_1 e^{\beta\mu}} \rightarrow \phi, N, p, S$

Stabilitásvizsgálatok

mikrokanonikus

a) $S_1(E_1) + S_2(E_2) = \max.$

szüks. $\quad \frac{\partial S_1}{\partial E_1} - \frac{\partial S_1}{\partial E_2} = 0 \qquad T_1 = T_2$

elégs. $\quad \frac{\partial^2 S_1}{\partial E_1^2} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial E_2^2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} = -\frac{1}{T^2 c_V} \qquad c_V > 0$

b) mech. kh. is

$$S_1(E_1, V_1) + S_2(E_2, V_2) = \max.$$

szüks.: $p_1 = p_2 \quad T_1 = T_2$

elégs.: $\underline{\underline{M}}$ negatív definit

$$\underbrace{\det \underline{\underline{M}}} > 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} < 0$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T}\right)}{\partial(E, V)} = \frac{\partial\left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T}\right)}{\partial(T, V)} \frac{\partial(T, V)}{\partial(E, V)} = -\frac{1}{T^3} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial V}\bigg|_T}_{<0} \cdot \frac{1}{C_V}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\kappa_T > 0}$$

$$\underbrace{C_V > 0}$$

<u>egyenlőtlenségek</u>

mikrokan. $\underbrace{\Delta S \geq 0}$

kan. $-\beta E + \frac{1}{k_B} S(E) = \max.$

$$\underbrace{\Delta F \leq 0}$$

$$\Delta S \geq \frac{Q}{T}$$

T-p-sok.

$$-\beta E - \beta p V + \frac{1}{k_B} S(E, V) = \max.$$

$$\underbrace{\Delta G \leq 0}$$

<u>Fluktuációk</u>

$\Delta A = A - \langle A \rangle$

$\langle \Delta A^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$

- pl. kanonikus: E

$\langle E \rangle ; \langle E^2 \rangle \Rightarrow \sqrt{\langle (\Delta E)^2 \rangle} = \Delta E \qquad \frac{\Delta E}{\langle E \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$

- nagykanonikus: N

$\langle N \rangle ; \langle N^2 \rangle \Rightarrow \Delta N \qquad \langle (\Delta N)^2 \rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) = -\frac{\partial \bar{N}}{\partial \alpha} \qquad \alpha = -\beta\mu$

$Z = \sum_N e^{-\alpha N} Z_N \qquad -\frac{\partial \ln Z}{\partial \alpha} = \langle N \rangle \qquad \langle N^2 \rangle = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha^2}$

$$\left.\frac{\partial N}{\partial \mu}\right|_{T,V} = \underbrace{\left.\frac{\partial N}{\partial p}\right|_{T,V}}\left.\frac{\partial p}{\partial \mu}\right|_{T,V}$$

$$-\frac{1}{V}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\right|_{T,V} = \frac{N}{V}$$

$$\frac{-\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_{T,N}}{\underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial N}\right|_{T,p}} = \underbrace{\left.\frac{\partial \mu}{\partial p}\right|_{T,N}}} \cdot \left.\frac{\partial p}{\partial \mu}\right|_{T,V} = \frac{\cancel{V}\cdot \kappa_T}{\frac{V}{N}} \cdot \frac{N}{\cancel{V}} = \frac{N^2}{V}\kappa_T$$

$\mu dN + V dp$

Maxwell

$$\frac{1}{N}\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{T,N} = \frac{V}{N}$$

- Fermi, Bose $\langle n_i \rangle$

$$\langle (\Delta n_i)^2 \rangle = k_B T \frac{\partial}{\partial \mu}\langle n_i \rangle = \ldots = \langle n_i \rangle (1 \mp \langle n_i \rangle)$$

- sűrűségfluktuációk

kétrészecske - sűrűségfv.

homogén r. $\Rightarrow$ párkorrelációs fv.

szerkezeti tényező + $\underbrace{}$ kapcs.

mérhető!

- fluktuáció - disszipáció tétel

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{B} F$$

$$\chi_{AB} = \frac{\partial \langle A \rangle}{\partial F} \qquad \langle \hat{A} \rangle = Tr(\hat{\varrho}\hat{A}) = Tr\,\frac{e^{-\beta \hat{H}}\hat{A}}{\underbrace{Z}_{Tr(e^{-\beta \hat{H}})}}$$

itt $\langle \hat{A} \rangle = \ldots$

$$\chi_{AB} = \beta\big[\underbrace{\langle AB \rangle_0 - \langle A \rangle_0 \langle B_0 \rangle}_{G_{AB}}\big]$$

G_{AB} korrelációs mx.

flukt.

$$G_{AB} = k_B T \cdot \chi_{AB}$$

válasz

itt még példákat meg spec eseteket megnézni

Maxwell-f. sebességeloszlás

$$P(p, d^3p) = \frac{e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} d^3p}{\int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} d^3p} = \frac{e^{-\beta \frac{m^2 v^2}{2m}} d^3p}{(2m\pi k_B T)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\underline{p} = m\underline{v} \qquad d^3\underline{p} = m^3 d^3\underline{v}$$

$$P(\underline{v}, d^3\underline{v}) = \underbrace{\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2}}_{F(v)} dv$$

$$\int_0^\infty F(v)\, dv = 1 !$$

$v^* =$

$\overline{v^2} =$

$\bar{v} > v^*$ széles eloszl.

$F(\epsilon) \rightarrow \epsilon^*, \bar{\epsilon}$

15. Kvantumstatisztikák

túl nagy sűrűség egy fázíscellában ⇒ klassz. elromlik

$N_{cella} = \dfrac{V p_T^3}{h^3}$ $\quad \varrho = \dfrac{N}{N_{cella}} \begin{cases} \ll 1 & \text{klassz. g.} \\ \gtrsim 1 & \text{kvantumg.} \end{cases}$

elfajulási hőm. $T_c \sim \left(\dfrac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(\varrho = 1)$

ideális kv. gáz

$|i\rangle,\ \varepsilon_i,\ n_i$ + nagykanonikus

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n_i} e^{-\beta\left(\overbrace{\sum_i \varepsilon_i n_i}^{E} - \mu \overbrace{\sum_i n_i}^{N}\right)} = \sum_{n_1, n_2, \dots}^{n_{max}} \prod_i e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu) n_i}$$

$$Z = \prod_i \sum_{n_i=0}^{n_{max}} e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu) n_i}$$

$n_{max} \begin{cases} f: & 0/1 \\ b: & 0, 1, 2, \dots \end{cases}$ $\quad \sum \begin{cases} 1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} \\ \dfrac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}} \end{cases}$

$\prod_i \downarrow$

$$\phi = \mp k_B T \sum_i \ln\left(1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}\right)$$

$$N = -\left.\frac{\partial \phi}{\partial \mu}\right|_{T,V} = \dots = \sum_i \underbrace{\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} \pm 1}}_{\langle n_i \rangle}$$

$+ : f$ Fermi-Dirac

$- : b$ Bose-Einstein

állapotsűrűség $\varrho(\varepsilon)$

$$N = \int_0^{\infty} \varrho(\varepsilon) f(\varepsilon)\, d\varepsilon \longrightarrow \mu(T, V, N)$$

$$E = \int_0^{\infty} \varepsilon \varrho(\varepsilon) f(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad \swarrow \text{ beírjuk}$$

klasszikus határeset

$$f(\varepsilon) \approx C e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} \qquad \text{Boltzmann-statisztika}$$

Ideális Bose-gáz, kondenzáció

$T=0$-n mindenki ε_0 alapállapotban

1 áll. betöltöttsége makr.

$\frac{N}{V}$ = áll. kell, hogy legyen

$$\frac{N}{V} = \frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty \frac{p^2\,dp}{e^{\beta\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)}-1}$$

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \qquad g(\varepsilon) = \left(\frac{4\pi}{3}\sqrt{2m\varepsilon}^{3}\right)' = \frac{2}{\cancel{4}}\pi\frac{2mE}{\cancel{2}\sqrt{2mE}} = 2\pi\sqrt{2m}\sqrt{E}$$

$$|p| < \sqrt{2mE}$$

$$2m\,d\varepsilon = 2p\,dp$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\,d\varepsilon = \sqrt{\frac{2mE}{\varepsilon}}\,dp$$

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$$

$$\Omega(E) = \frac{4\pi}{3}(2mE)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{V}{h^3}$$

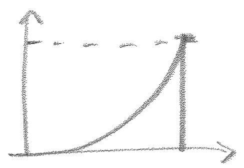
$$g(\varepsilon) = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\pi}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(2m\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\cdot 2m\frac{V}{h^3} = 2\pi(2m)^{\frac{3}{2}}\underbrace{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}_{p\cdot\cancel{(2m)^{-\frac{1}{2}}}}\frac{V}{h^3}$$

$$2m\,d\varepsilon = 2p\,dp$$

$$d\varepsilon = \frac{2p}{2m}dp \qquad \frac{1}{V}\int_0^\infty f(\varepsilon)g(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{4\pi}{h^3}\int\frac{p^2\,dp}{\ldots}$$

$$x = \frac{\beta p^2}{2m} \qquad \alpha = -\beta\mu \quad\Rightarrow\quad \frac{N}{V} = \ldots\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{x+\alpha}-1}$$

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda_T^3}\cdot g_{\frac{3}{2}}(z) \qquad z = e^{\beta\mu} \qquad e^{\alpha} := \frac{1}{z}$$



$T\to 0 \Rightarrow \lambda_T$ nő $\Rightarrow g$ csökk.

$\Downarrow$

az integrálnak nőnie kell

$T > T_c \Rightarrow$ elkezd csökk. a r. száma!

$$N_0 = \frac{1}{e^{(\varepsilon_0-\mu)\beta}-1}$$ nagyon nagy lehet!

$T < T_c$

$$N = N_0 + 2\pi V\left(\frac{2mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}\,dx}{e^x-1}$$

$\alpha = 0$-n

$$N_0 = N\left(1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

Hőmérsékleti sugárzás

$\varepsilon = c|p| \qquad g(\varepsilon) = g \frac{4\pi}{(hc)^3} V \varepsilon^2$

$\mu = 0$

$$-\Phi = -pV = +k_B T \int_0^\infty g(\varepsilon) \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon}) \, d\varepsilon = \dots$$

$$= -AV(k_B T)^4 \frac{1}{3} \frac{\pi^4}{15} = -\frac{1}{3} E$$

$$E = \sigma T^4$$

$$-\ u(\omega) = \frac{d(E/V)}{d\omega} = \hbar \frac{d(E/V)}{d\varepsilon} = \hbar A \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon}-1} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

$\lambda_{max} T = \text{áll.}$

Fermi-Dirac-eloszlás

$T = 0 \qquad f(\varepsilon) \to \varepsilon_F$

$T \neq 0 \qquad f(\varepsilon) \qquad f(\varepsilon = \mu) = \frac{1}{2} \qquad \mu(T) \qquad N \to \mu$ rögz.

BSS:

$$\int_0^\infty \varphi(\varepsilon) f(\varepsilon) \, d\varepsilon \approx \int_0^\mu \varphi(\varepsilon) \, d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \varphi'(\mu) + \dots$$

pl. elektrongáz

$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \qquad g(\varepsilon) \qquad N = \dots \to \mu = \dots$

$E = \dots + \mu(T) \dots \Rightarrow c_V \sim T$! fajhő

Fononok

hőm. sug. hoz hasonlóan, csak A más $\Rightarrow$

$c_V \sim T^3$ fononfajhő

véges sok módus: nincs a rácsállandónál

kisebb hullámhossz $\Rightarrow$ véges sok módus

kis frekvenciákon $\varepsilon \sim k$ közelítés

Debye-hőmérsékletig!

$$kT_D = \hbar \omega_{max} \approx \hbar \frac{c}{a} \rightarrow 10^3 \frac{m}{s} \text{ hangseb.}$$

$\Downarrow$

$T \ll T_D$-en $\omega = ck$ diszp. rel.

végtelenig int. ható módusok!

$$\frac{3}{c_{eff}^3} = \frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_{tr}^3} \Rightarrow \parallel \text{ hőm. sug.}$$

$T \gg T_D \Rightarrow \varepsilon \ll kT \Rightarrow e^{\beta\varepsilon} - 1 \approx \beta\varepsilon$

$$E = \int_{k \in Bz} \varepsilon \, g(\varepsilon) \underbrace{f(\varepsilon)}_{\approx \frac{1}{\beta\varepsilon}} d\varepsilon \approx 3 k_B T N$$

?

16. Mágneses rendszerek

Ising-modell

spinek rácsban - miért rendeződnek?

dipól-dipól kh. túl kicsi

kicserélődési kh. domináł

⇓

Heisenberg-modell: $\mathcal{H} = -\sum_{\underbrace{\langle i,j \rangle}_{\text{első szomszédokra}}} J_{ij} \underline{\hat{S}}_i \underline{\hat{S}}_j - g_e \mu_B \underline{B} \sum_i \underline{\hat{S}}_i$

∅ másodszomszéd kh.

Ising:

- a spinek z-komp. csatolódik csak
- J $\forall$ $\langle i,j \rangle$ párra ua.

$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - H \sum_i S_i$ (z irányú $\underline{B}$ tér)

erősen mágneses anyagok

$J > 0$	ferromágnes	$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$
$J < 0$	antiferromágnes	$\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$
+	ferrimágnes	$\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$

gyengén mágneses anyagok

paramágn. $\underline{B}$ $\uparrow\uparrow$ $\parallel$

diamágn. $\underline{B}$ $\uparrow\downarrow$ ellentétes } beállás

az Ising-modell alkalmazásai

1. átlagtérközelítés

$$M = \left\langle \sum_i S_i \right\rangle \qquad m = \langle S_i \rangle$$

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \underbrace{S_i S_j} - H \sum_i S_i$$

$$\underbrace{(S_i - m + m)(S_j - m + m)} \approx -m^2 + m S_i + m S_j$$

fluktuációk négyzetét elhagyjuk

$$\mathcal{H} = +J m^2 \underbrace{N \frac{q}{2}}_{\text{párok száma}} - J m \frac{q}{2} \sum_i S_i - J m \frac{q}{2} \sum_i S_i - H \sum_i S_i$$

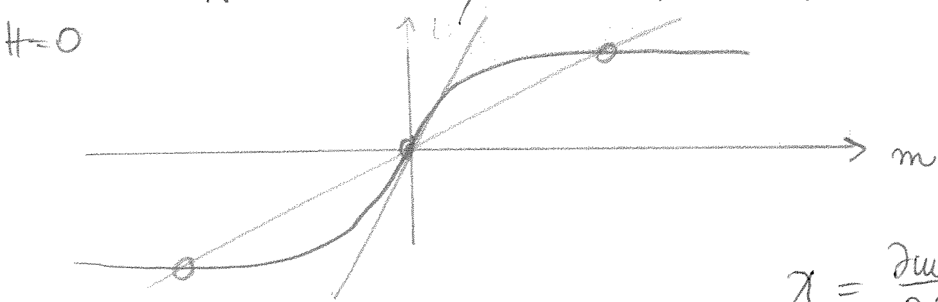
q: koord. szám

$$\mathcal{H} = J m^2 N \frac{q}{2} - (\underbrace{J m q + H}_{H_{eff}}) \sum_i S_i$$

$$Z = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta \mathcal{H}} = e^{-\beta J m^2 N \frac{q}{2}} \prod_{i=1}^{N} \mathrm{ch}(\beta H_{eff})^N$$

$$\langle M \rangle = \left\langle \sum_i S_i \right\rangle = \frac{\partial \ln Z}{\partial (\beta H_{eff})} = N \cdot \mathrm{th}(\beta H_{eff})$$

$$m = \frac{M}{N} = \mathrm{th}\left(\beta (J m q + H)\right)$$

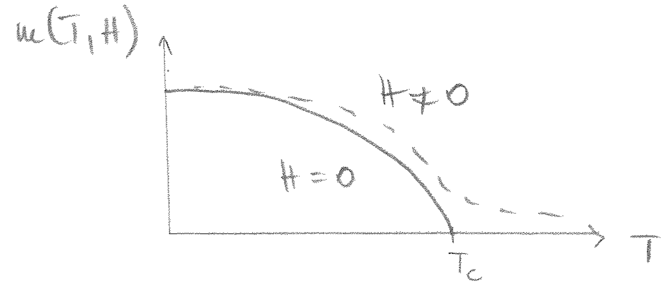


$T < T_c \Rightarrow m = 0$ inst.

$m = \pm m_0$ st.

$T > T_c \Rightarrow m = 0$ st.

$$\chi = \left.\frac{\partial m}{\partial h}\right|_{h=0} = ?$$



2. Ising-modell transzfermátrixszal [1D]

$$\mathcal{H} = -J \sum_i S_i S_{i+1} - H \sum_i S_i \underset{\uparrow}{=} \sum_i \left(-J S_i S_{i+1} - \frac{H}{2}(S_i + S_{i+1}) \right)$$

cikl. HF!

$$Z = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta \mathcal{H}} = \sum_{\{S_i\}} e^{K \sum_i S_i S_{i+1} + \frac{h}{2} \sum_i (S_i + S_{i+1})} =$$

$$= \sum_{\{S_i\}} \prod_{i=1}^{N} \underbrace{e^{K S_i S_{i+1} + \frac{h}{2}(S_i + S_{i+1})}}_{f(S_i, S_{i+1}) = \langle S_i | \underline{\underline{T}} | S_i \rangle}$$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} ++ & +- \\ -+ & -- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{K+h} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{-K-h} \end{bmatrix}$$

$$Z = \sum_{S_1, S_2, \dots, S_N = \pm 1} \langle S_1 | \underline{\underline{T}} | S_2 \rangle \langle S_2 | \underline{\underline{T}} | S_3 \rangle \dots \langle S_N | \underline{\underline{T}} | S_1 \rangle =$$

$$= \mathrm{Tr}\, \underline{\underline{T}}^N = \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

$\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow$ termodin. limesz $N \to \infty$

$$Z = \lambda_1^N \left(1 + \cancel{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N} \right) \approx \lambda_1^N$$

T-p sokaság

$p - M$

$V - H$

$$G = -k_B T \ln Z$$

$$M = -\frac{\partial G}{\partial H}$$

Atomi paramágnesség

$$E = -g\mu_B \underset{\substack{\uparrow \\ J_z \text{ s.é.}}}{m_j} B$$

$$M = n g\mu_B \frac{\sum_m m e^{-\beta E} \; \frac{x}{j} m}{\sum_m e^{-\beta E} \; \frac{x}{j} m} \qquad x: \text{új vált.}$$

$$M = j \cdot n g \mu_B \underbrace{\frac{\partial \ln Z}{\partial x}}$$

$$B_j(x) = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \operatorname{cth}\left\{x\left(1+\frac{1}{2j}\right)\right\} - \frac{1}{2j} \operatorname{cth}\left\{\left(\frac{1}{2j}\right)x\right\}$$

$$B(\infty) = 1 \qquad j = \frac{1}{2} \quad \operatorname{th} x$$

$$B(0) = 0 \qquad j \to \infty$$

$$x \ll 1 \quad \operatorname{cth} \simeq \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$B_j(x) \simeq \frac{x}{3} \frac{j+1}{j} \quad \text{lin. indul!}$$

$$\chi = \frac{C}{T} \quad \text{Curie-tv.!!}$$

nagy T / kis B-re!

Atomi diamágnesség

$$m \omega_0^2 \varrho = F \quad + \text{Lorentz-e.}$$

$$m \underbrace{(\omega_0 + \Delta\omega)^2}_{\cancel{\omega_0^2} + 2\omega_0 \Delta\omega} \cancel{\varrho} = \cancel{F} + \underset{\substack{\shortparallel \\ \omega_0 \cancel{\varrho}}}{ev} B$$

$$\Delta\omega = \frac{eB}{2m}$$

$$1\,e^-: \quad \mu_1 = -\underbrace{e\frac{\omega}{2\pi}}_{I} \cdot \underbrace{\varrho^2 \pi}_{A} \Rightarrow Z \text{ db}: \mu_z = -Ze\frac{\omega}{2}\overbrace{\langle \varrho^2 \rangle}^{\frac{2}{3}\langle r^2 \rangle}$$

$$\chi = n\frac{\Delta\mu_z}{\underset{B}{\underbrace{\Delta B}}} = \frac{-Ze\,\frac{e\cancel{B}}{2m}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\langle r^2\rangle}{\cancel{B}} = -\frac{nZe^2}{6m}\langle r^2\rangle$$

Pauli-szuszceptibilitás

$$\underline{B} = (0,0,B) \qquad \mu = g_e\mu_B\frac{S}{\hbar}$$

$$H^1 = -\mu\underline{B} = -\mu_B B\sigma_z$$

$$T=0 \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{p^2}{2m}, \quad \rho(\varepsilon) = AV\sqrt{\varepsilon} \qquad N = \int_0^{\varepsilon_F}\rho(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{2}{3}AV\varepsilon_F^{\frac{3}{2}}$$

$$T\neq 0 \Rightarrow \quad \varepsilon(p,\sigma_z) = \frac{p^2}{2m} - \mu_B B\sigma_z$$

$$M = \mu_B(N_\uparrow - N_\downarrow) = \mu_B\int_0^\infty\frac{\rho(\varepsilon+\mu_B B)}{2}f(\varepsilon)\,d\varepsilon - $$

$$-\int_0^\infty\frac{\rho(\varepsilon-\mu_B B)}{2}f(\varepsilon)\,d\varepsilon \approx$$

$$\approx \cancel{\tfrac{1}{2}}\mu_B(\cancel{2}\mu_B B)\underbrace{\int_0^\infty\rho'(\varepsilon)f(\varepsilon)\,d\varepsilon} = \frac{\mu_B^2 B\,3N}{2\varepsilon_F}$$

$$\approx\int_0^{\varepsilon_F}\rho'(\varepsilon)\,d\varepsilon = AV\sqrt{\varepsilon_F} = \frac{3N}{2\varepsilon_F}$$

$$\underline{\underline{\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{\mu_B^2\,3N}{2\varepsilon_F}}}$$

Landau-diamágnesség

$$\underline{B} = (0,0,B) \qquad \underline{A} = \begin{pmatrix}0\\ xB\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot}\underline{A} = 0$$

$$E = \frac{(p - eA)^2}{2m}$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2 + (p_y - exB)^2 + p_z^2}{2m}$$

$$Z = \int e^{-\beta\mathcal{H}} \, d^3p \, d^3r \qquad \tilde{p} = p - eA \qquad \tilde{r} = r \qquad \frac{\partial(\tilde{p}, \tilde{r})}{\partial(p, r)} = 1 \; !$$

klasszikusan nincs

kvantumosan

$$\Psi(x, y, z) = e^{i(k_y y + k_z z)} \varphi(x)$$

$$\hat{H}\Psi = \left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} - \underbrace{\underbrace{\frac{(eB)^2}{2m}}_{\frac{m\omega^2}{2}} \underbrace{\left(x - \frac{\hbar k_y}{eB}\right)^2}_{(x - x_0)^2}}_{\text{eltolt harm. osc.}} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right) \Psi = E\Psi$$

$$(\text{osc.})\,\varphi(x) = \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right)\varphi(x)$$

$$E(\cancel{k_y}, k_z, n) = \text{osc.} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

$\downarrow$ degenerált !

$$E = 2 \cdot \sum_{k_y, k_z, n} \left(E(k_y, k_z, n) - E_F \right) = \ldots$$

$$M = \frac{1}{V} \frac{\partial E}{\partial B} = \ldots$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \ldots$$

hiszterézis : M – H görbe

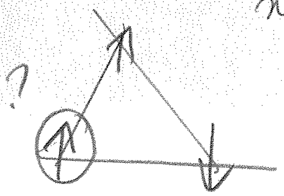
Curie–Weiss–tv. ?

$$M = f(\underbrace{H + \lambda M}_{x}) \qquad \chi_p = \frac{C}{T} \quad \text{lin. közelítés}$$

$$\cancel{\frac{\partial M}{\partial H} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(1 + \lambda \frac{\partial M}{\partial H}\right)} \rightarrow M = \chi_p \cdot (H + \lambda M)$$

$$M = \frac{C}{T - T_c} \cdot H$$

spinüveg



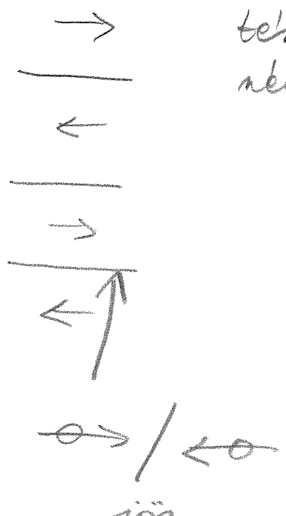
nem tudja, hova rendeződjön

spinszelep

Cu–Co multilayer

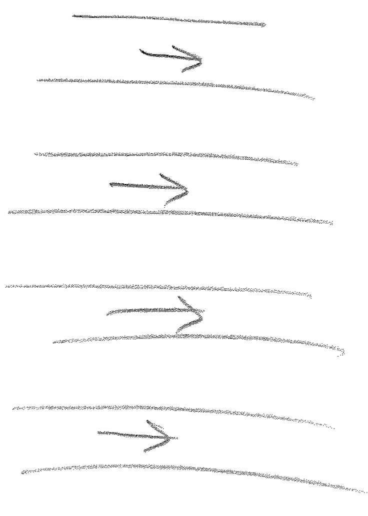
minden 2. mágneseztt

tér nélkül



jön

térrel



megnő adott spinre az ellenállás

(16.) Mágneses rendszerek.

(Mágnesség statisztikus elmélete: Ising-modell, Atomi paramágnesség, atomi diamágnesség, Pauli-szuszceptibilitás, ~~Landau-diamágnesség~~, Ferro-, antiferro-, ferrimágneses anyagok, ferromágneses domének, hiszterézis. Curie-Weiss-tv., Speciális anyagok: spinüveg, mágneses ellenállás, szupravezetés.)

Ising-modell

- atomi mágneses dipólmom.-ok között : dipól-dipól kch. ~ meV
  kicserélődési kch. ← sokkal erősebb!

→ Heisenberg-modell:

$$\hat{\mathcal{H}} = -\sum_{\langle i,j\rangle}' J_{ij}\,\underline{\hat{S}}_i \underline{\hat{S}}_j - g_e \mu_B \cdot \underline{B} \sum_i \underline{\hat{S}}_i$$

(első szomszéd)

kicserélődési kch. + külső tér hatása

Kristályban többnyire erős anizotrópia van

$$\underline{S}_i \underline{S}_j = S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + \Delta S_i^z S_j^z$$

$\Delta > 1$: S^z komponens erősen csatolt a $\underline{B}$ térhez

$\Delta < 1$: S^x, S^y komponensek csatolódnak a $\underline{B}$ térhez

Ising-modell: szélsőséges eset: csak az S^z komponens csatolódik

$$\mathcal{H}_{Ising} = -J \sum_{\langle i,j\rangle}' S_i S_j - H \sum_i S_i$$

$J > 0$: ferromágnes ↑↑↑↑ ↓↓↓↓

$J < 0$: antiferromágnes ↑↓↑↓ ↓↑↓↑

$T < T_c$: rendezett

$T > T_c$: rendezetlen

Nézzük meg, hogy alkalmazható az Ising-modell!

→ használjuk az ún. átlagtér közelítést!

mágnesezettség: $M = \langle \sum_i' S_i \rangle \qquad m = \langle S_i \rangle$

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle}' S_i S_j - H \sum_i' S_i$$

$$S_i S_j = (\underbrace{S_i - m} + m)(\underbrace{S_j - m} + m) =$$

$$= (S_i - m)\cdot m + (S_j - m) m + m^2 + \underbrace{\cancel{(S_i - m)(S_j - m)}}$$

átlagtól való eltérés négyzete
→ fluktuációk szorzata...
⇒ ezt elhagyjuk

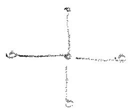
$$S_i S_j = -m^2 + m S_i + m S_j$$

$$\mathcal{H} \simeq J m^2 \frac{q}{2} N - \underbrace{J m \sum_{\langle i,j \rangle}' S_i} - \underbrace{J m \sum_{\langle i,j \rangle}' S_j} - H \sum_i' S_i$$

$$\to -Jm \cdot \frac{q}{2} \sum_i' S_i$$

q: koordinációs szám

(ennyi szomszédja van...



q = 4

$\cdot \frac{1}{2}$, hogy ne számoljunk egy párt kétszer...)

$$= J m^2 \frac{q}{2} N - \underbrace{\left(J m \frac{q}{2} + H\right)}_{H_{eff}} \sum_i' S_i$$

H_{eff}: átlagtér

⇒ állapotösszeg

$$Z = \sum_{\{S_i\}}' e^{-\beta \mathcal{H}} = \sum_{S_i}' e^{-\frac{1}{2}\beta J m^2 q N} \cdot e^{\beta H_{eff} \sum_i' S_i} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\beta J m^2 q N} \cdot \prod^{N} \sum' e^{\beta H_{eff} S_i} = e^{-\frac{1}{2}\beta J m^2 q N} \cdot \prod^{N} \left(e^{\beta H_{eff}\cdot 1} + e^{\beta H_{eff}\cdot(-1)}\right) =$$

$$\ldots = e^{-\frac{1}{2}Jm^2qN} \prod_i^N \left(2\,\mathrm{ch}(\beta H_{eff})\right) = e^{-\frac{1}{2}Jm^2qN} \cdot \left[2\,\mathrm{ch}(\beta H_{eff})\right]^N$$

$$\ln Z = N\left\{-\frac{1}{2}Jm^2q + \ln 2 + \ln \mathrm{ch}(\beta H_{eff})\right\}$$

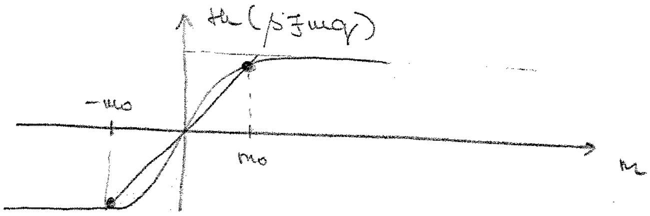
$$M = \langle \sum_i' S_i \rangle = \frac{\sum_i' S_i\, e^{-\beta \mathcal{H}}}{\sum_{\{S_i\}}' e^{-\beta \mathcal{H}}} = \frac{1}{Z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial(\beta H_{eff})} = \frac{\partial \ln Z}{\partial(\beta H_{eff})} =$$

$$= N\cdot\frac{\mathrm{sh}(\beta H_{eff})}{\mathrm{ch}(\beta H_{eff})} = N\cdot \mathrm{th}(\beta H_{eff})$$

$$m = \frac{M}{N} = \mathrm{th}(\beta H_{eff}) = \mathrm{th}\left[\beta(Jmq + H)\right]$$

a) legyen $H=0$:

$$m = \mathrm{th}(\beta Jmq)$$



$T=T_c$ ahol $m=0$-ban éppen 1 a meredekség

$$\frac{\partial(\mathrm{th}(\beta Jmq))}{\partial m} = \frac{\overset{1}{\mathrm{ch}^2(\beta Jmq)} - \overset{0}{\mathrm{sh}^2(\beta Jmq)}}{\underset{1}{\mathrm{ch}^2(\beta Jmq)}}\cdot\beta Jq \overset{m=0}{=} \beta Jq \overset{!}{=} 1$$

$$\frac{Jq}{k_B T_c} \overset{!}{=} 1$$

$T<T_c$: → meredekség nagyobb

→ van metszéspont az m egyenessel $\quad T_c = \frac{Jq}{k_B}$

$m=0$ instabil

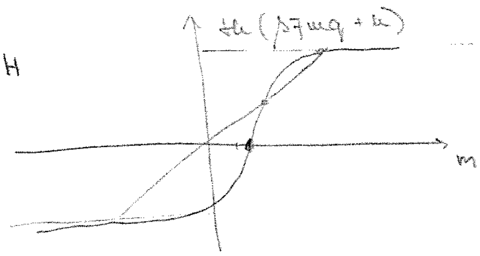
$m=\pm m_0$ stabil

$T>T_c$: $m=0$ stabil

?

b) $H\neq 0$: $m = \mathrm{th}\left[\beta(Jmq+H)\right] \quad h=\beta H$

$$m = \mathrm{th}(\beta Jmq + h)$$



rögzített H mellett:

→ szuszceptibilitás:

$$\chi(T) = \frac{\partial m}{\partial h}\Big|_{h=0} = ? \qquad m = \text{th}\left(\frac{T_c}{T} m + h\right)$$

↑

állapotegyenletből: $k_B T_c = Jq$

$$\frac{\partial m}{\partial h} = \frac{1}{\text{ch}^2\left(\frac{T_c}{T} m + h\right)} \left(\frac{T_c}{T}\frac{\partial m}{\partial h} + 1\right) \xrightarrow[h \to 0]{} \underbrace{(1-m^2)}_{A} \cdot \left(\frac{T_c}{T}\frac{\partial m}{\partial h}\Big|_{h=0} + 1\right)$$

$\left(1 - m^2\left(\frac{T_c}{T}\right)^2\right)$ ↑

???

és szerintem rossz...

mert $\frac{1}{\text{ch}^2} \simeq 1 - x^2$

$$\text{ch}^2 x \simeq 1 + \underbrace{2\,\text{ch}\,x \cdot \text{sh}\,x}_{0} \cdot x + (\underbrace{\text{sh}^2 x}_{0} + \underbrace{\text{ch}^2 x}_{1})\, x^2$$

$$\frac{1}{\text{ch}^2 x} \simeq 1 - x^2$$

$$x = A\left(\frac{T_c}{T} x + 1\right) = A\frac{T_c}{T} x + A$$

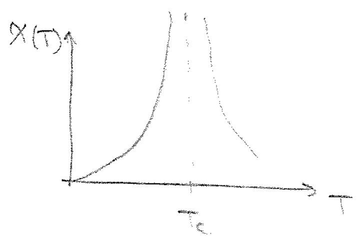
$$x = \frac{A}{1 - A\frac{T_c}{T}} = \frac{A}{\frac{1}{A} - \frac{T_c}{T}}$$

$$\chi(T) = \frac{\partial m}{\partial h}\Big|_{h=0} = \frac{1}{\frac{1}{1-m^2} - \frac{T_c}{T}}$$

?

$T = T_c \to m = 0 \Rightarrow \chi \to \infty$

T_c-nél χ szinguláris...



$T > T_c$: $m = 0$

$$\chi(T) = \frac{1}{1 - \frac{T_c}{T}}$$

átlagtérelméletben a fluktuációkat elhagytuk,

pedig $\chi(T \to T_c) \to \infty$ épp a fluktuációk ∞-be tartását jelenti

↳ átlagtérelm. T_c körül inkonzisztens...

Ising-modell transzfermátrixszal: (1D)

$$\mathcal{H} = -J\sum_{i=1}^{N} S_i S_{i+1} - H\sum_{i=1}^{N} S_i = \sum_{i=1}^{N}{}' \left[-J S_i S_{i+1} - \frac{H}{2}(S_i + S_{i+1})\right]$$

↑

ciklikus ... : $S_{N+1} = S_1$

$$Z = \sum_{\{S_i\}}' e^{-\beta \mathcal{H}} = \sum_{\{S_i\}}' e^{K\sum_{i=1}^{N} S_i S_{i+1} + \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}(S_i + S_{i+1})}$$

$$K = \beta J \qquad h = \beta H$$

$$Z = \sum_{\{S_i\}}' \prod_{i=1}^{N} \underbrace{e^{K S_i S_{i+1} + \frac{h}{2}(S_i + S_{i+1})}}$$

$$f(S_i, S_{i+1}) \equiv \langle S_i | \underline{\underline{T}} | S_{i+1} \rangle$$

→ értelemszerűen így

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} f(++) & f(+-) \\ f(-+) & f(--) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{K+h} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-h} \end{bmatrix}$$

$$Z = \sum_{S_1, S_2, \dots S_N = \pm 1}' \langle S_1 | \underline{\underline{T}} | S_2 \rangle \langle S_2 | \underline{\underline{T}} | S_3 \rangle \dots \langle S_N | \underline{\underline{T}} | S_1 \rangle = \mathrm{Tr}\, \underline{\underline{T}}^N = \lambda_1^N + \lambda_2^N,$$

← ez így van, ezt mondja a Kiti is...

ahol λ_1 és λ_2 $\underline{\underline{T}}$ sajátértékei

sajátértékek:

$$(e^{K+h} - \lambda)(e^{K-h} - \lambda) - e^{-2K} = 0$$

$$\lambda^2 - e^K 2\,\mathrm{ch}\,h \cdot \lambda + \overbrace{e^{2K} - e^{-2K}}^{2\,\mathrm{sh}(2K)} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\cancel{2} e^K \mathrm{ch}\,h \pm \sqrt{\cancel{4} e^{2K} \mathrm{ch}^2 h - \cancel{8}\,\mathrm{sh}(2K)}}{\cancel{2}} = e^K \mathrm{ch}\,h \pm \sqrt{e^{2K}\mathrm{ch}^2 h - 2\,\mathrm{sh}(2K)}$$

mivel $\lambda_1 > \lambda_2$ → termodin. lim. $N \to \infty$

$$Z = \lambda_1^N + \lambda_2^N = \lambda_1^N \left[1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N \right] \xrightarrow[N \to \infty]{} \lambda_1^N$$

↳ T-p sokaság ???

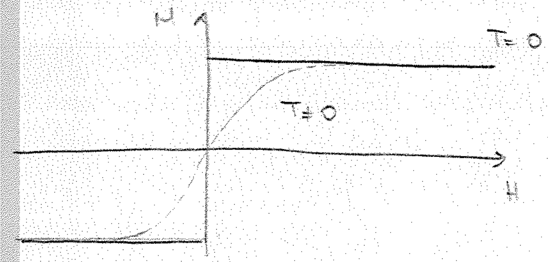
V helyett H
P helyett M ?

$$G = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln \lambda_1$$

$$\langle \sum^{N} S_i \rangle = M = -\frac{\partial G}{\dots}$$ N részecskés mágnesezettség

$M \sim \frac{\partial(\ln \mathrm{ch}\, h)}{\partial h}$ ← ami elején...

$\sim \mathrm{th}(h)$ $\qquad h = \beta H \quad \beta \to \infty \to h \to \infty$



$T \neq 0$ esetén nincs spontán mágnesezettség 1D-s Ising-modellben

→ nincs fázisátmenet

$T_c = 0$

$S > \frac{1}{2}$-nél is egzaktul megadható a transzfermátrix

2D Ising-modell négyzetrácson megoldható, de bonyolult (Onsager)

Atomi paramágnesség (másnogy...)

- pályaimpulzus-mom. $\quad \langle L^2 \rangle = \hbar l(l+1)$
  $\langle L_z \rangle = \hbar m \qquad -l < m < l$

- spin $\quad \langle S^2 \rangle = \hbar s(s+1)$
  $\langle S_z \rangle = \hbar m \qquad -s < m < s$

→ összimpulzus $\quad \langle J^2 \rangle = \hbar j(j+1)$
$\langle J_z \rangle = \hbar m \qquad -j < m < j$

- Bohr-magneton : $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$

- mágneses mom. : $\underline{m} = (\underline{L} + 2\underline{S}) \cdot \frac{\mu_B}{\hbar}$
  $g = 1 \qquad g = 2$

→ energia : $E = -\underline{m}\,\underline{B} = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \underline{J} \cdot \underline{B} = -g \mu_B m B$

giromágneses faktor $\qquad$ ($\underline{B}$ z irányú)

paramágneses anyagok : a mágneses momentumot nem hatnak egymással

→ mágnesezettség

$$\frac{M}{V} = n g \mu_B \frac{\sum_{m=-j}^{j} m\, e^{\frac{g\mu_B m B}{k_B T}}}{\sum_{-j}^{j} e^{\frac{g\mu_B m B}{k_B T}}} = n g\mu_B \frac{\sum m\, e^{x\frac{m}{j}}}{\sum e^{x\frac{m}{j}}} = \qquad x = \frac{g\mu_B B j}{k_B T}$$

$$n = \frac{N}{V}$$

$$= n g\mu_B \cdot \frac{\partial \ln Z}{\partial x}\cdot j$$

$$Z = \sum_{m=-j}^{j} e^{x\frac{m}{j}} = e^{-x}\,\frac{e^{\frac{2j+1}{j}x}-1}{e^{\frac{x}{j}}-1} =$$

geometriai sorozat

$$\sum \to \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \qquad a_1 = e^{-x} \qquad n = 2j+1 \qquad q = e^{\frac{x}{j}}$$

$$= \frac{e^{x(1+\frac{1}{j})} - e^{-x}}{e^{\frac{x}{j}}-1} = \frac{e^{x(1+\frac{1}{2j})} - e^{-x(1+\frac{1}{2j})}}{e^{\frac{x}{2j}} - e^{-\frac{x}{2j}}} = \frac{\mathrm{sh}\left[x\left(1+\frac{1}{2j}\right)\right]}{\mathrm{sh}\left[\frac{x}{2j}\right]}$$

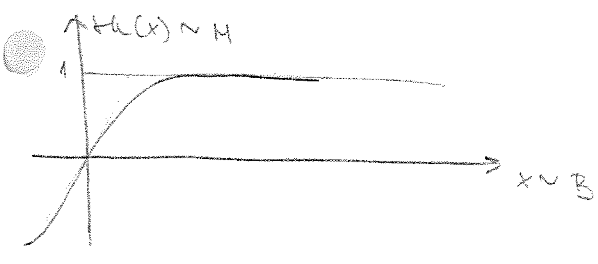
$B_j(x) = \frac{d}{dx}\ln Z$ Brillouin-fv.

$$= \frac{\cancel{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2j}\right)}}{\mathrm{sh}\left(x\left(1+\frac{1}{2j}\right)\right)}\cdot \frac{\mathrm{ch}\left(x\left(1+\frac{1}{2j}\right)\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2j}\right)\cdot \mathrm{sh}\left(\frac{x}{2j}\right) - \mathrm{sh}\left(x\left(1+\frac{1}{2j}\right)\right)\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2j}\right)\frac{1}{2j}}{\mathrm{sh}^{\cancel{2}}\left(\frac{x}{2j}\right)} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{2j}\right)\mathrm{cth}\left(x\left(1+\frac{1}{2j}\right)\right) - \frac{1}{2j}\,\mathrm{cth}\left(\frac{x}{2j}\right)$$

1.) $j = \frac{1}{2}$ ← legkisebb spin

$$B_{1/2}(x) = 2\cdot \mathrm{cth}(2x) - \mathrm{cth}(x) = \cancel{2}\cdot\frac{\overbrace{\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x}^{\mathrm{ch}(2x)}}{\underbrace{\cancel{2}\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x}_{\mathrm{sh}(2x)}} - \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \mathrm{th}(x)$$



B nő → mágnesezettség telítődik

2.) $j \to \infty$ (klasszikus határeset)

$$B_\infty(x) = \text{cth}\, x - \frac{1}{x}$$

Langevin-fv.

$B_\infty(0) = 0$

$B_\infty(\infty) = 1$

→ jellegében ugyanaz, mint $j = \frac{1}{2}$-nél...

$\text{cth}(x) = ?$ $= \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \ldots$

$$\text{cth}(x) = \frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x} \simeq$$

$$\text{ch}(x) \simeq 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\text{sh}(x) \simeq x + \frac{x^3}{6} = x\left(1 + \frac{x^2}{6}\right)$$

$$\to \text{cth}\, x \simeq \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{x}{2} - \ldots \simeq \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$$

YEAH!

3.) általánosan

$$\lim_{x \to \infty} B_j(x) = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) - \frac{1}{2j} = 1$$

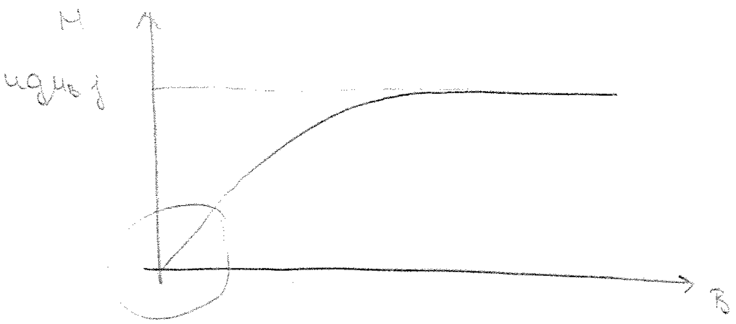
$x \ll 1$: $\text{cth}\, x \simeq \dfrac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x} \simeq \dfrac{1 + \frac{x^2}{2}}{x + \frac{x^3}{6}} \simeq \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{3} + \mathcal{O}(x^3)$

$x \ll 1$: $B_j(x) = \cancel{\left(1 + \frac{1}{2j}\right) \dfrac{1}{x\left(1 + \frac{1}{2j}\right)}} + \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \dfrac{x\left(1 + \frac{1}{2j}\right)}{3} -$

$$- \cancel{\frac{1}{2j} \cdot \frac{2j}{x}} - \frac{1}{2j} \cdot \frac{x}{2j \cdot 3} = \frac{x}{3}\left[\left(1 + \frac{1}{2j}\right)^2 - \left(\frac{1}{2j}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{x}{3}\left[1 + \frac{1}{j}\right] = \frac{x}{3} \cdot \frac{j+1}{j}$$

$$M = n g \mu_B \cdot B_j\left(\frac{g \mu_B j B}{k_B T}\right) \cdot j$$



$$M = \frac{n (g \mu_B)^2}{3 k_B T} \cdot j(j+1) \mu_0 H$$

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{n (g \mu_B)^2}{3 k_B T} \cdot j(j+1) \mu_0 = \frac{C}{T}$$

Curie-tv.

↳ $x \ll 1 \Rightarrow$ nagy T vagy kis B

~ lineárisan indul : $M = \dfrac{n (g \mu_B)^2 B}{3 k_B T} \cdot (j+1) \cdot j$

• atomi diamágnesség

x-y síkban való körmozgásnál ← ez mi? ezt miért feltételezzük?

$$m\omega_0^2 \varrho = F$$

→ külső mágneses térrel $(B \parallel z)$: + Lorentz-erő

→ ω_0 megváltozik

$$m(\omega_0+\Delta\omega)^2\varrho = F + \underbrace{e\omega_0\varrho B}_{e(\underline{v}\times\underline{B}) \text{ és } \underline{v}\perp\underline{B}}$$

$\Delta\omega$ kicsi → csak vezető rendben hagyjuk meg

$$(\omega_0+\Delta\omega)^2 = \omega_0^2 + 2\omega_0\Delta\omega + \cancel{\Delta\omega^2}$$

↳ ezt megöli F

$$2m\cancel{\omega_0}\Delta\omega\cancel{\varrho} = e\cancel{\omega_0}\cancel{\varrho}B$$

$$\Delta\omega = \frac{eB}{2m}$$

• 1 elektron esetén a mágneses momentum a Lenz-tv.-ből számolható

$$\mu_1 = -e\underbrace{\frac{\omega}{2\pi}}_{\substack{Q/t \\ \text{áram}}} \cdot \underbrace{\varrho^2\pi}_{\text{felület}}$$

$m = IS$

• Z db. elektronnál

$$\boxed{\mu_Z} = -Ze\frac{\omega}{2}\underbrace{\langle\varrho^2\rangle}_{\substack{\text{átlag,} \\ \text{mert minden} \\ \text{elektronra más} \\ \text{a } \varrho}} = -Ze\frac{\omega}{2}\frac{2}{3}\langle r^2\rangle = -Ze\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{eB}{2m}\langle r^2\rangle = \boxed{-\frac{Ze^2}{6m}B\langle r^2\rangle}$$

gömbszimmetrikus eset

↓

$$\langle\varrho^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle = \frac{2}{3}(\langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle + \langle z^2\rangle) = \frac{2}{3}\langle r^2\rangle$$

→ mágnesezettség (atomokra összegzés)

$$M = -\frac{nZe^2}{6m}\langle r^2\rangle \cdot B$$

$$\chi = \frac{M}{H} = -\frac{nZe^2}{6m}\langle r^2\rangle \cdot \mu_0$$

Gyengén mágneses anyagok:

→ külső mágneses tér nélkül nincs eredő mágneses momentumuk

∘ paramágneses: külső tér vonzza ← azonos irányú teret kelt

∘ diamágneses: külső tér taszítja ← ellentétes irányú teret kelt

→ atomi paramágnesség, diamágnesség: zárt héjon több elektronok mágneses tulajdonságai

→ Pauli-szuszceptibilitás, Landau-diamágnesség: szabad elektron mágneses tulajdonságai
→ fémekben ez van!

Pauli-szuszceptibilitás

$\underline{B} = (0,0,B)$ $\quad \underline{\mu} = g_e \mu_B \cdot \frac{\underline{S}}{\hbar}$ $\quad \underline{S} = \frac{\hbar}{2}\underline{\sigma}$ ← Pauli-mátrixokból álló vektor

$$\hat{H} = \underline{\mu}\,\underline{B} = g_e \mu_B \frac{\underline{S}}{\hbar}\underline{B} = -\mu_B B \sigma_z$$

$T=0$: fermionok $\quad \varepsilon = \frac{p^2}{2m} \to \Omega_0(\varepsilon) = \frac{Vg}{h^3}\cdot\frac{4\pi}{3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{3/2} \to \rho(\varepsilon) = \frac{Vg2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}$

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} \rho(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2}{3}\cdot\underbrace{\frac{Vg2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}}_{A}\cdot\varepsilon_F^{3/2} = \frac{2}{3}AV\cdot\varepsilon_F^{3/2}$$

→ $T \neq 0$: $\quad \varepsilon(p,\sigma_z) = \frac{p^2}{2m} - \mu_B B \sigma_z \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$$\varepsilon(p,\uparrow) = \frac{p^2}{2m} - B\mu_B \qquad \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(p,\downarrow) = \frac{p^2}{2m} + B\mu_B \qquad \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} N_\uparrow &= AV\cdot\frac{2}{3}(\varepsilon - B\mu_B)^{3/2}\cdot\frac{1}{2} \\ N_\downarrow &= AV\cdot\frac{2}{3}(\varepsilon + B\mu_B)^{3/2}\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}$$ Ez mi ???

?

mágnesezettség:

ez miért nem $\varepsilon + \mu_B B$? a μ_B

$$M = \mu_B(N_\uparrow - N_\downarrow) = \mu_B\left[\int^{\infty} \rho(\varepsilon + \mu_B B)\,\ldots - \int^{\infty}\rho(\varepsilon - \mu_B B)\,\ldots\right]$$

$\mu_B B$ kicsi
$\longrightarrow$

$$= \mu_B (2\mu_B B) \frac{1}{2} \int_0^\infty \underbrace{\rho'(\varepsilon)}_{\frac{AV}{2\sqrt{\varepsilon}}} f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{\mu_B^2 B}{2} AV \int_0^\infty \varepsilon^{-1/2} f(\varepsilon)\, d\varepsilon =$$

B-S, de nagyon módon... μ helyett rögtön ε_F... $T \ll T_F$

$$\simeq \frac{\mu_B^2 B}{2} AV \left[2\sqrt{\varepsilon_F} + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left(-\frac{1}{2}\right) \varepsilon_F^{-3/2} \right] =$$

$$= \mu_B^2 B \cdot \underbrace{AV\sqrt{\varepsilon_F}}_{\frac{3}{2}\frac{N}{\varepsilon_F}} \left[1 - \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2 \right] = \mu_B^2 B \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F} \left[1 - \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2 \right]$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = \chi_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2 \right], \text{ ahol } \chi_0 = \mu_B^2 \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F}$$

- $T \gg T_F$ ~ klasszikus

$$M = \mu_B \int_0^\infty \frac{\rho(\varepsilon)}{2} \left[f(\varepsilon - \mu_B B) - f(\varepsilon + \mu_B B) \right] d\varepsilon \qquad f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = -\mu_B^2 \int_0^\infty \rho(\varepsilon) \frac{df}{d\varepsilon}\, d\varepsilon$$

$$\frac{df}{d\varepsilon} \simeq - \frac{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \cdot \beta}{\left(e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1\right)^2} \simeq -\beta e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} \;?$$

? ez az egész nevetséges... ?

$T \to \infty$ β kicsi

mi a fene alapján fejt ez sorba...? nem hiszem el...

$$\frac{1}{(e^x+1)^2} \simeq \underbrace{\frac{1}{4}}_{\frac{1}{4}} - \frac{2e^x}{(e^x+1)^3} \cdot x$$

$$-\beta e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\beta(\varepsilon - \mu) \right)$$

Landau-diamágnesség

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \mathrm{rot}\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vektorpotenciál}}}{\underline{A}} \xrightarrow{\text{ahhoz, hogy } B \text{ ilyen alakú legyen}} \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ xB \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\, \underline{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & xB & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{p_x^2 + (p_y - e x B)^2 + p_z^2}{2m}$$

$$H = \frac{(\underline{p} - e\underline{A})^2}{2m}$$

$$Z = \int e^{-\frac{H(p,r)}{k_BT}} d^3p\, d^3r \qquad F = k_BT \ln Z \qquad M = \frac{\partial F}{\partial B}$$

$$= \int e^{-\frac{(p - eA(r))^2}{2m}} d^3p\, d^3r$$

legyen $\tilde{p} = p - eA \quad \tilde{r} = r$

↳ Jacobi-det.:

$$\frac{\partial(\tilde{p}, \tilde{r})}{\partial(p, r)} = \begin{array}{cc} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array}\right) & \\ \frac{\partial \tilde{r}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{r}}{\partial r} \end{array} \Rightarrow \det = 1$$

$$Z = \int e^{-\frac{(p-eA)^2}{2m}} d^3p\, d^3r = \int e^{-\frac{\tilde{p}^2}{2m}} d^3\tilde{p}\, d^3\tilde{r}$$ ← ebben már A nincs benne

⇒ klasszikusan a B térnek nem lesz hatása!

→ kvantumosan viszont van!

$$H = \frac{p_x^2 + \overbrace{(p_y - exB)^2}^{\frac{p_y^2 - 2p_y \cdot exB + (exB)^2}{2m}} + p_z^2}{2m} \qquad = \frac{(eB)^2}{2m}\left[\frac{\hbar^2 k_y^2}{(eB)^2} - \frac{2x(\hbar k_y)}{eB} + x^2\right]$$

$H\Psi = E\Psi$

$$\hat{p} = +\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

keressük a hullámfv.-t $\Psi(x,y,z) = e^{i(k_y y + k_z z)}\varphi(x)$ alakban!

↳ ehhez ötlet kell, ezzel feloldjuk az x-y szimmetriát!

ez még operátor

ezeket már hattatjuk

$$H\Psi = \left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} - \underbrace{\frac{(eB)^2}{2m}\left(x - \frac{\hbar k_y}{eB}\right)^2}_{\frac{x^2(eB)^2}{2m} - \frac{2\hbar k_y x(eB)}{2m}\ \checkmark} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right) e^{i(k_y y + k_z z)}\varphi(x) = E e^{i(k_y y + k_z z)}\varphi(x)$$

legyen $\omega = \frac{eB}{m} \quad x_0 = \frac{\hbar k_y}{eB}$ ← olyan lesz, mint egy lin. osc. x_0 körül

$$\Rightarrow \left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 (x - x_0)^2\right)\varphi(x) = \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{\ldots}\right)\varphi(x)$$

$$E(k_y,k_z,n) = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

oszcilláció kvantumszáma

k_y-tól nem függ!

$\Rightarrow$ k_y-ban degenerált az állapot!

Számoljuk ki a teljes energiát a Fermi-energiához képest!

($\to$ negatív lesz)

$$2\cdot\sum_{k_y,k_z,n}{}' \left(E(k_y,k_z,n) - E_F\right) = \overset{\text{azt keressük}}{\downarrow}{E} = 2\sum_{k_z,n}{}'\left(E(k_z,n)-E_F\right)\cdot \underbrace{\sum_{k_y}{}' 1}_{①}$$

① periodikus határfeltétel: $0 < x_0 < L_x$

$$\Rightarrow 0 < k_y < \frac{eB}{\hbar}L_x$$

$$\to \sum_{k_y}{}' 1 = \frac{L_y}{2\pi}\int_0^{\frac{eBL_x}{\hbar}} 1\, dk_y = \frac{L_xL_y}{2\pi}\cdot\frac{eB}{\hbar}$$

$$\sum_{k_z}{}'\left(E(k_y,k_z,n)-E_F\right) = \frac{L_z}{2\pi}\int\left(\frac{\hbar^2k_z^2}{2m} + \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - E_F\right)dk_z = \ldots$$

határok: $\frac{\hbar^2k_z^2}{2m} + \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \le E_F$

$$\frac{\hbar^2k_z^2}{2m} + \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) = E_F$$

$\hookrightarrow$ másodfokú egyenlet k_z-re: $\nearrow -k_1$, $\searrow k_1$

$$= \ldots = \frac{L_z}{2\pi}\int_{-k_1}^{k_1}\left(\frac{\hbar^2k_z^2}{2m} + \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - E_F\right)dk_z = \frac{L_z}{2\pi}\left[\frac{\hbar^2k_1^3}{3m} + \underbrace{\underbrace{\left(\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)-E_F\right)}_{-\frac{\hbar^2k_1^2}{2m}}\cdot 2k_1}_{-\frac{\hbar^2k_1^3}{m}}\right] =$$

$$= -\frac{L_z}{2\pi}\cdot\frac{2}{3}\frac{\hbar^2k_1^3}{m}$$

$$E = -\cancel{2}\cdot\frac{L_z}{\cancel{2\pi}}\,\frac{\cancel{2}}{3}\,\frac{\hbar^{\cancel{2}}}{m}\sum_n{}' k_1^3\cdot\frac{L_y L_x eB}{\cancel{2\pi}\cancel{\hbar}} = -\frac{1}{3\pi^2}V\hbar\cdot\underbrace{\frac{eB}{m}}_{\omega}\cdot\sum_n{}' k_1^3 =$$

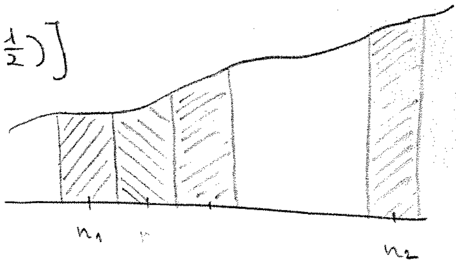
$$L_x L_y L_z = V$$

$$= -\frac{1}{3\pi^2}\hbar V\cdot\omega\cdot\underbrace{\sum_n{}' k_1^3}$$

ezt valahogy ki kéne számolni, nem egyszerű...

Szummázáshoz:

$$\sum_{n=n_1}^{n_2}{}' f(n) = \int_{n_1-\frac12}^{n_2+\frac12} f(x)\,dx - \frac{1}{24}\left[f'\left(n_2+\tfrac12\right) - f'\left(n_1-\tfrac12\right)\right]$$



Biz.:

$$\int_{n_1-\frac12}^{n_2+\frac12} f(x)\,dx = \sum_{n=n_1}^{n_2}\int_{n-\frac12}^{n+\frac12} f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=n_1}^{n_2}\int_{n-\frac12}^{n+\frac12}\Big[\underbrace{f(n)}_{1.} + \underbrace{f'(n)(x-n)}_{2.} + \underbrace{\tfrac12 f''(n)(x-n)^2}_{3.}\Big]dx = \dots$$

1. $\displaystyle\int_{n-\frac12}^{n+\frac12} f(n)\,dx = \left[f(n)\cdot x\right]_{n-\frac12}^{n+\frac12} = f(n)$

2. $\displaystyle\int_{n-\frac12}^{n+\frac12} f'(n)(x-n)\,dx = \frac{f'(n)}{2}\left[(x-n)^2\right]_{n-\frac12}^{n+\frac12} = 0$

3. $\displaystyle\frac12 f''(n)\int_{n-\frac12}^{n+\frac12}(x-n)^2\,dx = \frac12 f''(n)\left[\frac{(x-n)^3}{3}\right]_{n-\frac12}^{n+\frac12} = \frac12 f''(n)\cdot\frac13\underbrace{\left(\frac18+\frac18\right)}^{\frac14} =$

$$= \frac{1}{24}f''(n)$$

$$\dots = \sum_{n=n_1}^{n_2}\left(f(n) + \frac{1}{24}f''(n)\right) = \sum_{n=n_1}^{n_2} f(n) + \frac{1}{24}\sum_{n=n_1}^{n_2} f''(n) =$$

$$= \sum_{n=n_1}^{n_2} f(n) + \frac{1}{24}\int_{n_1-\frac12}^{n_2+\frac12} f''(x)\,dx \overset{?}{} = \sum_{n=n_1}^{n_2} f(n) + \frac{1}{24}\left[f'\left(n_2+\tfrac12\right) - f'\left(n_1-\tfrac12\right)\right]$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(E_F - \hbar\omega\left(n+\frac12\right)\right)^{1/2}$$

Szummázás határai: $n_1 = 0 \to n_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$$n_{max} + \frac{1}{2} = \frac{E_F}{\hbar\omega}$$

$\to \sum_n' k_1^3$

$$\sum_{n=n_1}^{n_2}{}' f(n) = \int_{n_1-\frac{1}{2}}^{n_2+\frac{1}{2}} f(x)\,dx - \frac{1}{24}\left[f'\left(n_2+\tfrac{1}{2}\right) - f'\left(n_1 - \tfrac{1}{2}\right)\right]$$

1.)

$$\int_{n_1-\frac{1}{2}}^{n_2+\frac{1}{2}} k_1^3\,dx = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_{n_1-\frac{1}{2}}^{n_2+\frac{1}{2}} \left(E_F - \hbar\omega\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right)^{3/2} dx =$$

$$= -\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \left[\frac{2}{5}\left(E_F - \hbar\omega\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right)^{5/2} \cdot \frac{1}{\hbar\omega}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{E_F}{\hbar\omega}} \simeq$$

$$\simeq \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{5} \cdot E_F^{5/2} \cdot \frac{1}{\hbar\omega}$$

← felső határnál $\frac{1}{2}$-el nem foglalkozunk → az egész ott 0.

← alsó határnál $-\hbar\omega(\ldots) = 0$

$$E_{szabad} = -\frac{1}{3\pi^2} V \cancel{\hbar\omega} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{5} E_F^{5/2} \cdot \frac{1}{\cancel{\hbar\omega}} = -\frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{2}{5} E_F^{5/2}$$

$A = \frac{4\pi}{h^3}$ ez viszonylag jól ki is jön...

$$\frac{1}{3\pi^2} \cdot \frac{1}{\hbar^3} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\frac{1}{3\pi^2} \cdot \frac{(2\pi)^3}{h^3} = \frac{8\pi}{3h^3}$$

→ szabad e^--modellt visszaadja

2.) $f(x) = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \left(E_F - \hbar\omega\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^{3/2}$

$$\to f'(x) = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \frac{3}{2}\left(E_F - \hbar\omega\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right)^{1/2} \cdot (-\hbar\omega)$$

$$f'\left(n_2 + \tfrac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{E_F}{\hbar\omega}\right) \simeq 0$$

$$f'\left(n_1 - \tfrac{1}{2}\right) = f'\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \frac{3}{2}\hbar\omega\, E_F^{1/2}$$

$$E = E_{sz} - \frac{1}{\cancel{3}\pi^2} V \hbar\omega \cdot \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \frac{\cancel{3}}{2}\hbar\omega \cdot E_F^{1/2} = E_{sz} - \frac{V}{48\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot E_F^{1/2} \cdot (\hbar\omega)^2 =$$

$\ldots$ rB

$$E = E_{f2} - \frac{V}{48\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E_F^{1/2} \cdot \frac{\hbar^2 c^2 B^2}{m^2}$$

$$\underline{M} = \frac{1}{V}\frac{\partial E}{\partial B} = -\frac{1}{24\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E_F^{1/2} \frac{\hbar^2 c^2}{m^2} B$$

$$\chi = \frac{M}{H} = -\frac{1}{24\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E_F^{1/2} \frac{\hbar^2 c^2}{m^2}\mu_0$$

Állandó mágneses momentummal rendelkező anyagok

- ferromágnes $\Uparrow\Uparrow\Uparrow\Uparrow\Uparrow$ (mágneses mom.-ok egy irányba)

  vas → iránytű

- antiferromágnes $\Uparrow\Downarrow\Uparrow\Downarrow\Uparrow$ (mágneses mom.-ok váltakoznak)

  vanádium, króm

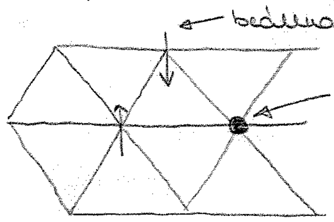
- ferrimágnes $\Uparrow\downarrow\Uparrow\downarrow\Uparrow\downarrow$ (nagy spin - kis spin váltakozva)

  ötvözetek (vasoxidok, alumínium, kobalt)

- spinüveg ~ amorf szerkezetű (→ ezért „üveg")

  spinek össze-vissza állnak, de rögzítettek

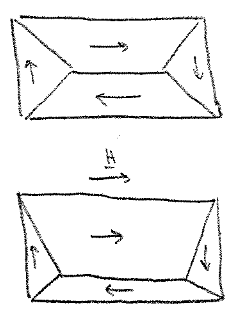
  (egymáshoz képest állnak be, csak bután)



Ferromágnes

- egy kritikus hőmérsékleten elveszti a mágnesezettségét: T_C: Curie-pont
- kívülről nulla mágnesezettségűnek látjuk

  ← spinek domainekbe rendeződnek



→ ráadunk egy $\underline{H}$ teret

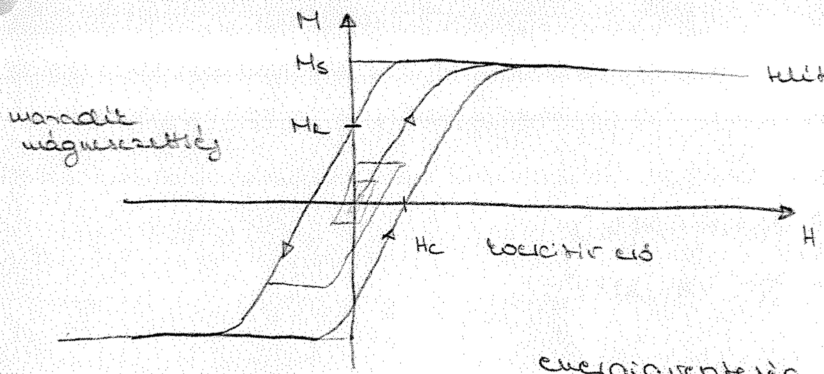
→ eltolódnak a domainek

(nem folyamatosan

→ hiszterézisgörbe emiatt rücskös)

(~ Barkhausen-zaj)

hiszterézis: tér kikapcsolása után is van mágnesezettség, domainek nem térülnek vissza energiaminimumba



lemágnesezés: be kell tekerni a nullába

energiaveszteség arányos a területtel

$$\underline{B} = \mu_0(\underline{H}+\underline{M})$$

Weiss-féle belső tér közelítés (~ átlagtérelmélet?)

$$M = f(H)$$

$$M = f(\underbrace{H+\lambda M})$$

külső és belső tér együtt állítja be az atomokat

$$M = f(x) \qquad x = H + \lambda M$$

paramágneses állapot:

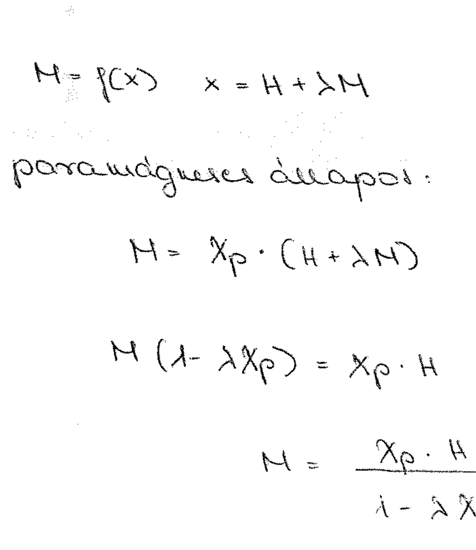
$$M = \chi_p \cdot (H + \lambda M) \qquad \chi_p = \frac{C}{T} \text{ Curie-tv.} \leftarrow T=0\text{-nál elszáll}$$

$$M(1-\lambda\chi_p) = \chi_p \cdot H$$

$$M = \frac{\chi_p \cdot H}{1-\lambda\chi_p} = \kappa H$$

$$\kappa = \frac{\chi_p}{1-\lambda\chi_p} = \frac{\frac{C}{T}}{1-\lambda\frac{C}{T}} = \frac{C}{T-\lambda C} = \frac{C}{T-T_{Curie}} \quad \text{Curie-Weiss-tv.}$$

Csertinél érthetőbb!



Spinek közti kicserélődési kcsh. → Heisenberg-Hamilton-op. (ez már egyszerűsítés...)

$$H = -\sum_{i,j} J_{ij}\underline{S}_i\underline{S}_j \qquad J_{ij}: \text{csatolás} \oplus \rightarrow \text{ferromágnes}$$

↳ ezt még jobban

• Antiferromágnesek

~ két alrács egymásba ágyazva

$$M_\uparrow = f(H+\lambda M_\downarrow)$$
$$M_\downarrow = f(-H+\lambda M_\uparrow)$$

paramágneses áll.: $M_\uparrow = \chi_p(H+\lambda M_\downarrow)$

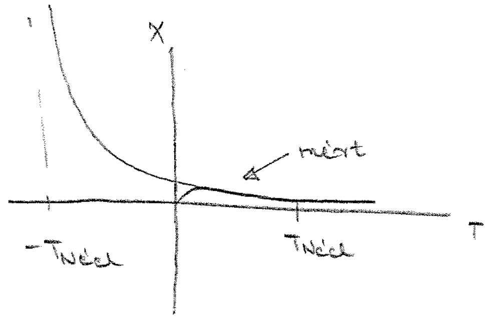
$M_\downarrow = \chi_p(-H+\lambda M_\uparrow)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda\chi_p \\ -\lambda\chi_p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_\uparrow \\ M_\downarrow \end{pmatrix} = \chi_p H \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_\uparrow \\ M_\downarrow \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\underbrace{1-(\lambda\chi_p)^2}_{\text{det}}}\begin{pmatrix} 1 & \lambda\chi_p \\ \lambda\chi_p & 1 \end{pmatrix}}_{\text{inverz}} \chi_p H \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\chi_p H}{1-(\lambda\chi_p)^2}\begin{pmatrix} 1-\chi_p\lambda \\ \lambda\chi_p - 1 \end{pmatrix}$$

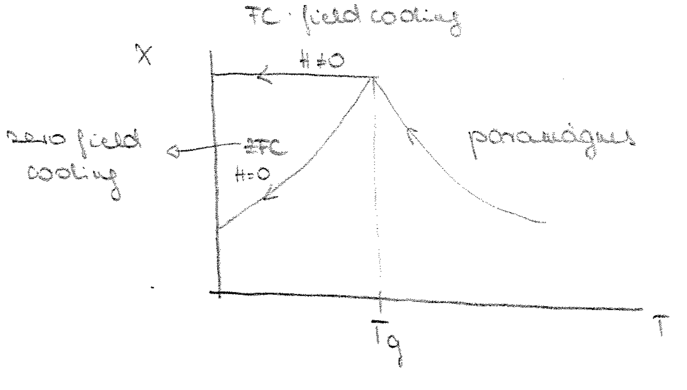
$$\begin{pmatrix} M_\uparrow \\ M_\downarrow \end{pmatrix} = \frac{\chi_p H}{1+\lambda\chi_p}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad M_\uparrow - M_\downarrow = \frac{2\chi_p H}{1+\lambda\chi_p} \qquad \chi_p = \frac{C}{T}$$

$$\chi_{AF} = \frac{M}{H} = \frac{2\frac{C}{T}}{1+\frac{\lambda C}{T}} = \frac{2C}{T+\underbrace{\lambda C}_{T_{Néel}}}$$



Spinüveg

T_g felett paramágnes, alatta spinüveg



?

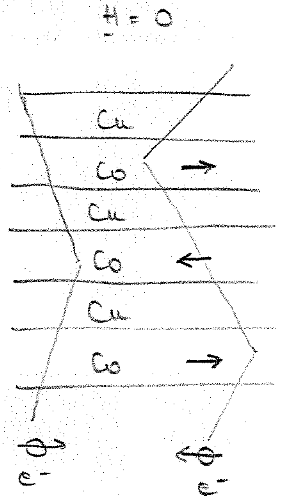
16/19.

Spinszelep

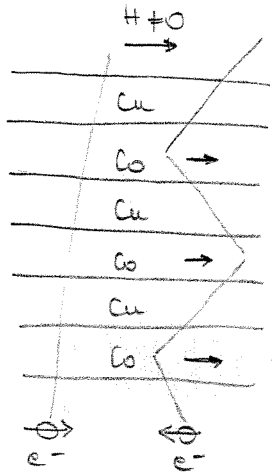
óriás mágneses ellenállás

giant magnetic resistance

→ nano-multiréteg 2nm



(ellentétes megpofozza; azonos nem változtat az irányán)



az $\ominus_{e^-}$ -ra akár 70%-kal lecsökkenhet az ellenállás

17. Kristályos anyagok fizikája

Rácsrezgések termikus hatásai

fononok: kváziészecskék, kvantált e^--szintek, módusok

$$E = \sum_i \hbar\omega\left(n_i + \frac{1}{2}\right) \qquad \langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_B T}} - 1} \qquad \mu = 0 \ !$$

bozonok

$$\langle E \rangle = \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2} \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega_i}{2k_B T}\right)$$

$$T \to \infty \Rightarrow \operatorname{cth} x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3} \qquad E = 3Nk_B T$$

$c_V = 3Nk_B$ Dulong-Petit

$T \ll 1 \qquad \operatorname{cth} x \to 1 \qquad c_V = 0\ ! \qquad ?$

$$\langle E \rangle \doteq \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2} + \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_B T}} - 1} = E_0 + \int \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} D(\omega)\, d\omega$$

módussűrűség

|| Fermi-e.

$$D_D(\omega) = \begin{cases} \frac{V}{2\pi^2}\frac{3}{c^3}\omega^2 & \text{ha } \omega < \omega_D \\ 0 & \text{ha } \omega > \omega_D \end{cases}$$

$$\int_0^{\omega_D} D(\omega)\, d\omega = 3N$$

$$\omega_D = \ldots$$

$$\hbar\omega_D = k_B T_D \Rightarrow T_D = \ldots$$

$T \ll 1$

$$\left.\begin{aligned} E &= E_0 + CT^4 \\ c_V &\sim T^3 \end{aligned}\right\} \text{fonongáz}$$

hőtágulás

hővezetés - fononszórás

Adiabatikus szétcsatolás, Bloch-tétel

$\underbrace{m_p \approx m_n}_{} \approx 1800\, m_e$

atommagok sokkal nehezebbek

ionok: $\underline{R}_I$, $\underline{\hat{P}}_I$, M_I e^--ok: $\underline{r}_i$, m, $\hat{\underline{p}}$

$$\hat{H} = -\sum_I \frac{\hbar^2}{2M_I}\Delta_I + V_{I,I}(\underline{R}_I) -$$ ionok, ion-ion-kh.

$$-\sum_i \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i + V_{e,e}(\underline{r}_i) +$$ e^-, e^--e^--kh.

$$+ V_{e,I}(\underline{r}_i, \underline{R}_I)$$ e^--I kh.

adiab. szétcsat.: keressük a mo.-t

$$\Psi(\underline{r}_i, \underline{R}_I) = \phi(\underline{R}_I)\,\varphi(\underline{R}_I, \underline{r}_i)$$ alakban!

[ionokra nem hatnak az e^--ok]

$\hat{H}\Psi = \ldots$ be

1.) $\boxed{e^- \text{- probléma}}$

fix rács, $\underline{R}_I$ paraméter $E(\underline{R}_I)$

2.) rácsprobléma

előző E-t beírva

3.) kettő kh.: perturbációszámítás

Adott $\underline{R}_I$-re e^--probléma mo.

ha a $\hat{H}$ eltolásinvariáns bizonyos eltolásokra

$\equiv$ periodikus potenciál

$\psi(\underline{r})$ sfv. $\Rightarrow$ $\psi(\underline{r} + \underline{R}_n)$ is !

$\psi(\underline{r} + \underline{R}_n) = c_n \psi(\underline{r}) \qquad |c_n|^2 = 1$

$\psi(\underline{r} + \underline{a}_1)$ per. HF

$\vdots \qquad c_1^{N_1} = 1 \qquad c_2^{N_2} = 1 \qquad c_3^{N_3} = 1$

$$\psi(\underline{r} + \underbrace{n_1 \underline{a}_1 + n_2 \underline{a}_2 + n_3 \underline{a}_3}_{\underline{R}_n}) = e^{i 2\pi \left(\frac{p_1 n_1}{N_1} + \frac{p_2 n_2}{N_2} + \frac{p_3 n_3}{N_3}\right)} \cdot \psi(\underline{r})$$

$$\underline{\psi(\underline{r} + \underline{R}_n) = e^{i \underline{k} \underline{R}_n} \psi(\underline{r})} \qquad \text{Bloch-fv.}$$

$$\underline{k} = \frac{p_1}{N_1} \underline{b}_1 + \frac{p_2}{N_2} \underline{b}_2 + \frac{p_3}{N_3} \underline{b}_3$$

Sávszerkezet

- numerikusan jól számolható
- analitikusan

1, kváziszabad e^- modell

2, TBA

(1.) $\psi = e^{i \underline{k}_T r} = e^{i \underline{K}_n \underline{r}} \cdot e^{i \underline{k} \underline{r}}$ — $\underline{K}_n$: reciprokrács-v., $\underline{k} \in Bz$

periodikus hf.

szabad $e^- \Rightarrow \psi(\underline{k})$

$+$ rácsper. pot. $\Rightarrow \psi = c_0 \psi_0 + c_1 \psi_1$, $\psi_0 = e^{i \underline{k} \underline{r}}$, $\psi_1 = e^{i \underline{K}_1 \underline{r}} e^{i \underline{k} \underline{r}}$

egy rácsponttal arrébb!

behely., int. $\Rightarrow$ lin. er. $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$-re $\Rightarrow$ det $= 0$

$E(k)$ diszp. rel.

V_1 miatt tiltott sáv!

(17.) Kristályos anyagok fizikája.

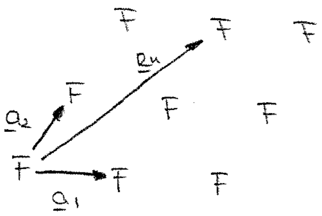
(Szimmetriák, pontcsoportok, Bravais-rácsok. Diffrakció, kinematikus elmélet. Elektron és röntgendiffrakció. Elektronoptika, elektronmikroszkóp. Rácsrezgések termikus hatásai, Bloch-tétel, adiabatikus szétcsatolás. Sávszerkezet.)

Kristályos anyag: rendezett, periodikus szerk.: általában szilárd
(folyadékkristály is lehet)

amorf anyag: hosszútávú rend nincs (szil., foly., gáz)

Rácsszerkezet:

- rácsvektor = transzlációs vektor
  (ezzel eltolva a rácsot, nem változik meg)
  pl. $\underline{R}_n$



- elemi rácsvektor: $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$
  (a legrövidebb rácsvektorok a tér három különböző irányában)

$$\underline{R}_n = n_1\underline{a}_1 + n_2\underline{a}_2 + n_3\underline{a}_3 \qquad n_i \in \mathbb{Z}$$

- elemi cella: az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok által definiált parallelepipedon
  (primitív cella: ha csak a csúcsaiban tartalmaz rácspontot)
- pontrács: a periodikusan ismétlődő ekvivalens egységek (F) által kirajzolt térbeli mintázat
- rács: pontrács + bázis
  ↳ fenti F (egy vagy több atom)
- Wigner-Seitz-cella: azon pontok halmaza, melyek egy adott rácsponthoz közelebb vannak, mint bármely másik rácsponthoz
  (→ felezősíkok határolják)

határegyenlet: $\underline{r}\underline{R}_n = \frac{|\underline{R}_n|}{2}$

Szimmetriák

1) transzlációs szimm.

generátorelemei: $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ (elemi transzlációs vektor)

2) forgatás

1-szeres

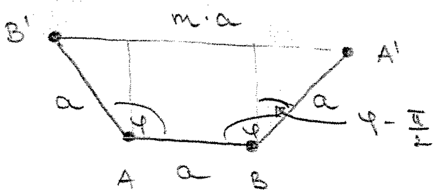
2-szeres (180°-os) → digir

3-szoros (120°-os) → trigir

4-szeres (90°-os) → tetragir

6-szoros (60°-os) → hexagir

Kristályos anyagban többféle nem lehet!



A és B szomszédos rácspontok

Tfh. van φ fokos forgatási szimm.
→ akkor A' és B' is rácspontok, tehát lévő távolság ma m∈Z

$$ma = a + 2\cdot a\cdot \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}_{\cos\varphi} = 1 - m$$

$$\cos\varphi = \frac{1-m}{2}$$ } egész vagy félegész

→ $\cos\varphi = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$

m	-1	0	1	2	3
φ	$0, 2\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
n	1	6	4	3	2

← hányszoros forgatás

3) inverzió: $\underline{r} \to -\underline{r}$ (térbeli tükrözés egy pontra)

tükrözés: 180°-os forgatás térben

4) inverziós tengely

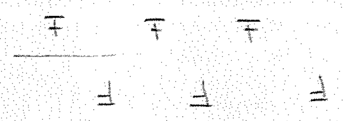
$\bar{1}$ $\bar{2}$ $\cancel{\bar{3}}$ $\bar{4}$ $\bar{6}$

sima inverzió

síkra való tükrözés

nincs

5) csúszósík



6) csavarsík : elforgatás, majd eltolás

Több generátorelem nem létezhet!

230-féle tércsoport

32-féle pontcsoport

pontrácsnak lehet más a szimmetriája, mint az igazi rácsnak

→ 14-féle Bravais-rács !

(7 kristályosztály)

Reciprokrács (pontrács!!!)

def. szerint $\underline{R}_n G_h = 2\pi \cdot \text{egész}$ reciprokrácsvektor

ha ez minden $\underline{R}_n$-re igaz, G_h reciprokrácsot alkot

$$\underline{R}_n = n_1 \underline{a}_1 + n_2 \underline{a}_2 + n_3 \underline{a}_3$$

$$G_h = h_1 \underline{b}_1 + h_2 \underline{b}_2 + h_3 \underline{b}_3 \qquad n_i, h_i \in \mathbb{Z}$$

$$a_i b_j = 2\pi \delta_{ij}$$

$$\underline{b}_1 = 2\pi \cdot \frac{\underline{a}_2 \times \underline{a}_3}{\underbrace{\underline{a}_1 \cdot (\underline{a}_2 \times \underline{a}_3)}_{\text{elemi cella térfogata}}} \qquad \underline{a}_1 = 2\pi \frac{\underline{b}_2 \times \underline{b}_3}{\underline{b}_1 (\underline{b}_2 \times \underline{b}_3)}$$

$$\underline{a}_1 (\underline{a}_2 \times \underline{a}_3) = V_{cella} = V_{WS}$$

$$\underline{b}_1 (\underline{b}_2 \times \underline{b}_3) = V_{RC} = V_{BZ}$$ ← Brillouin-zóna: a reciprokrács WS cellája

$$V_c \cdot V_{RC} = (2\pi)^3$$

$$\underline{R}_n G_h = 2\pi \underbrace{(n_1 h_1 + n_2 h_2 + n_3 h_3)}_{\text{egész}}$$

További kristályszerkezetek:

1) egyszerű köbös: SC

- elemi cella, WS-cella: kocka
- reciprokrács: SC
- pl. polónium (egyatomos bázis) v. bonyolult bázisok

2) lapcentrált köbös: FCC

(elemi rácsvekt.-ok: sarokból a lapok közepére)

- $V_c = \frac{a^3}{4}$ ← egy kockában 4 rácspont
- WS-cella: rombododekaéder (12 egybevágó rombusz)
- reciprokrács: BCC
- pl. Cu, Au, Al

3) tércentrált köbös: BCC

(középről három sarokba)

- $V_c = \frac{a^3}{2}$
- WS-cella: csonkolt oktaéder (négyzetek + szabályos hatszögek)
- reciprokrács: FCC
- pl. Fe, W, K, ..

4) gyémántszerkezet

~ FCC rács → 8 kiskocka → váltva egy-egy atom közepén

- 8 atom/nagy kocka
- tetraéderes szert. a kiskockában
- a pontrács: FCC → WS: rombododekaéder
- reciprokrács: BCC → BZ: csonkolt oktaéder

5) NaCl szerk

- FCC kétatomos bázissal

6) hexagonális szoros illeszkedésű szerk.

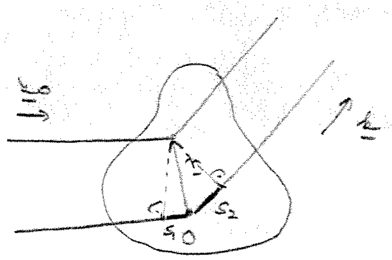
+ vannak kristályhibák (vakancia, intersticiális atom, szenny. atom, diszlokáció, szemcsehatár, kiválások, üregek)

+ amorf anyagok

+ folyadékkristályok

A szórás kinematikus elmélete

(~Fraunhofer-féle elhajlás)

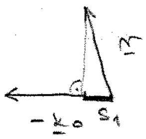


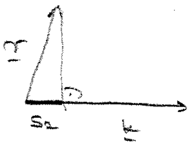
gyenge

rugalmas és koherens szórás!

$|\underline{k}_0| = |\underline{k}|$ mindenki egy irányba szór

$|\underline{k}_0| = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\quad |\underline{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\quad \Delta S = S_1 + S_2$





$$S_1 = -\frac{\underline{k}_0 \underline{r}}{|\underline{k}_0|} \qquad S_2 = \frac{\underline{k}\,\underline{r}}{|\underline{k}|}$$

$$\Delta S = \frac{\lambda}{2\pi}(\underline{k} - \underline{k}_0)\underline{r}$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{\Delta S}{\lambda} = (\underline{k} - \underline{k}_0)\underline{r} = \underline{K}\,\underline{r}$$

szórási vektor: $\underline{K} = \underline{k} - \underline{k}_0$

szóródás egyetlen szórócentrumon: $A_1(\underline{K}) \sim e^{i\Delta\varphi}$

folytonos tömeg szórócentrumainál:

$$A(\underline{K}) \sim \int \rho(\underline{r}) e^{i\Delta\varphi} d^3r = \int \rho(r) e^{i\underline{K}\underline{r}} d^3r$$

$$I(\underline{K}) = |A(\underline{K})|^2 = \left|\int \rho(r) e^{i\underline{K}\underline{r}} d^3r\right|^2 = \iint \rho(\underline{r}_1)\rho(\underline{r}_2) e^{i\underline{K}\underline{r}_1} e^{-i\underline{K}\underline{r}_2} d^3r_1 d^3r_2 =$$

$$= \iint \rho(\underline{r}_1)\rho(\underline{r}_2) e^{i\underline{K}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)} d^3r_1 d^3r_2 =$$

$$\underline{R} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$$

$$= \iint \rho(\underline{r}_2 + \underline{R})\rho(\underline{r}_2) e^{i\underline{K}\underline{R}} d^3r_2 d^3R =$$

$$= \int \Big[\underbrace{\int \rho(\underline{r}_2 + \underline{R})\rho(\underline{r}_2) d^3r_2}\Big] e^{i\underline{K}\underline{R}} d^3R = \int P(\underline{R}) e^{i\underline{K}\underline{R}} d^3R$$

$P(\underline{R})$: autokorrelációs fv.

⇒ az intenzitás az autokorrelációs fv. Fourier-transzformáltja!

(amorf anyagoknál szóráskísérletből $P(\underline{R})$-t lehet meghatározni)

Kristályos anyagok esetén $\rho(\underline{r})$ periodikus!

$$A(\underline{k}) = \int \rho(\underline{r}) e^{i\underline{k}\underline{r}} \, d^3\underline{r}$$

$$\rho(\underline{r}) = \rho(\underline{r} + \underline{R}_n) \qquad \underline{R}_n: \text{rácsvektor}$$

$$A(\underline{k}) = \int \rho(\underline{r} + \underline{R}_n) e^{i\underline{k}\underline{r}} \, d^3\underline{r} = \int \rho(\underline{r}') e^{i\underline{k}(\underline{r}' - \underline{R}_n)} \, d^3\underline{r}' =$$

$$\underline{r} + \underline{R}_n = \underline{r}'$$

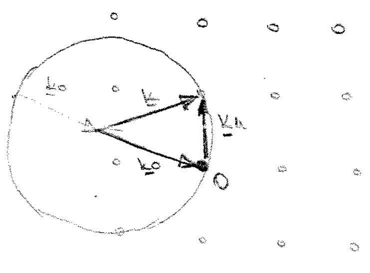
$$= \underbrace{e^{-i\underline{k}\underline{R}_n}}_{\stackrel{!}{=} 1} \underbrace{\int \rho(\underline{r}') \cdot e^{i\underline{k}\underline{r}'} \, d^3\underline{r}'}_{A(\underline{k})}$$

$$e^{-i\underline{k}\underline{R}_n} \stackrel{!}{=} 1 \rightarrow \underline{k}\underline{R}_n = 2\pi \cdot m \qquad m \in \mathbb{Z}$$

ezt definíció szerint a reciprokrácsvektorok tudják kielégíteni

$$\underline{k} = \underline{K}_n \rightarrow \underline{k} - \underline{k}_0 = \underline{K}_n \qquad \text{Bragg-feltétel!}$$

Ewald-szerkesztés: Bragg-feltétel geometriai ábrázolása



1, $\underline{k}_0$ az origóba (reciprokrács)

2, $|\underline{k}_0| = |\underline{k}|$ sugarú gömb $\underline{k}_0$ talppontjából

→ Ewald-gömb

3, lehetséges $\underline{k}$ vektorok a gömb sugarai

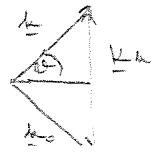
4, Bragg-feltétel miatt $\underline{k}$ rácspontba mutat az origóból

→ ebben az irányban lesz intenzitásmax.

- forgatás → egyre több rácspont esik a gömbre
- ha λ túl nagy → $|\underline{k}_0|$ túl kicsi → semmilyik rácspont nem esik a gömbre

+ Miller-indexek

$$d = \frac{2\pi}{|\underline{K}_n|} \qquad \frac{2\pi}{d} = |\underline{K}_n| \qquad |\underline{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$



$$\sin\vartheta = \frac{|\underline{K}_n|}{2|\underline{k}|} = \frac{2\pi \cdot \lambda}{2 \cdot d\, 2\pi} = \frac{\lambda}{2d}$$

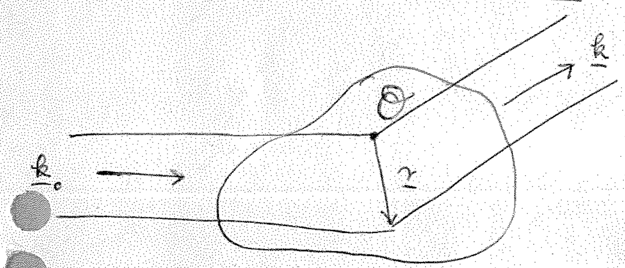
$$\rightarrow 2d_n \cdot \sin\vartheta = \lambda$$

Transzmissziós elektronmikroszkópia (EC szemináriumi előadás)

szórás (ϕ kh. a r és az anyag között)

- gyenge
- koherens
- rugalmas

kinematikus szórás



$$|\underline{k}_0| = |\underline{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Delta l = s_1 + s_2 = \frac{\underline{k}_0}{|\underline{k}_0|}\underline{r} - \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}\underline{r}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta l = \underline{k}_0\underline{r} - \underline{k}\underline{r} = -\Delta\underline{k}\,\underline{r}$$

2 szórócentrum: összeadás

folytonos anyageloszlás: összeintegrálás

$$A(\underline{k}) = \int_V \rho(\underline{r})\, e^{-i\Delta\underline{k}\,\underline{r}}\, d^3\underline{r}$$ Fourier-transzf.

periodikus rácsra

$$\rho(\underline{r}) = \rho(\underline{r} + \underline{R}_n)$$

rácsvektor

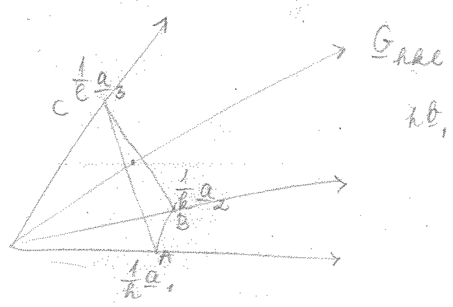
transzlációs szimmetria: $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ $\underline{R}_n$

reciprok rácsvektorok: $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ $\underline{G}_n$

párhuzamos síkseregek jelölése

(1.) $\underline{G}_{hkl} \perp (hkl)$

(2.) $|\underline{G}_{hkl}| = \frac{2\pi}{d_{hkl}}$



(1.) $(\vec{OA} - \vec{OB})\cdot \underline{G}_{hkl} = 0$ (2.) $\vec{OA}\cdot\frac{\underline{G}_{hkl}}{|\underline{G}_{hkl}|} = d_{hkl}$

$\vec{AC}\cdot \underline{G}_{hkl} = 0$

$$A(\underline{k}) = \int_V \rho(\underline{r})\, e^{-i\Delta\underline{k}\,\underline{r}}\, d^3\underline{r} = \int_V \rho(\underbrace{\underline{r}+\underline{R}_n}_{\underline{r}'})\, e^{-i\Delta\underline{k}\,\underline{r}}\, d^3\underline{r} =$$

$$d^3\underline{r}' = d^3\underline{r}$$

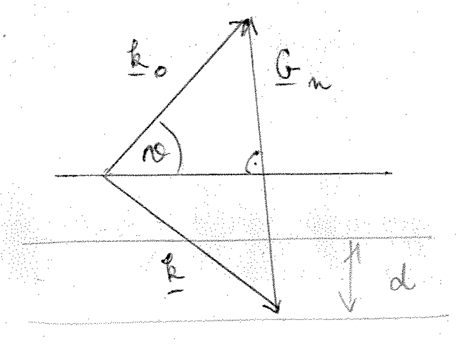
$$\underline{r} = \underline{r}' - \underline{R}_n$$

$$= \left[\int_{V'} \rho(\underline{r}')\, e^{-i\Delta\underline{k}\,\underline{r}'}\, d^3\underline{r}'\right] e^{i\Delta\underline{k}\,\underline{R}_n}$$

$$A(\underline{k})\left(1-\underbrace{e^{i\Delta\underline{k}\,\underline{R}_n}}_{0}\right) = 0$$

$$\Delta\underline{k}\,\underline{R}_n = 2\pi\, n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\Delta\underline{k} = \underline{G}_n$$

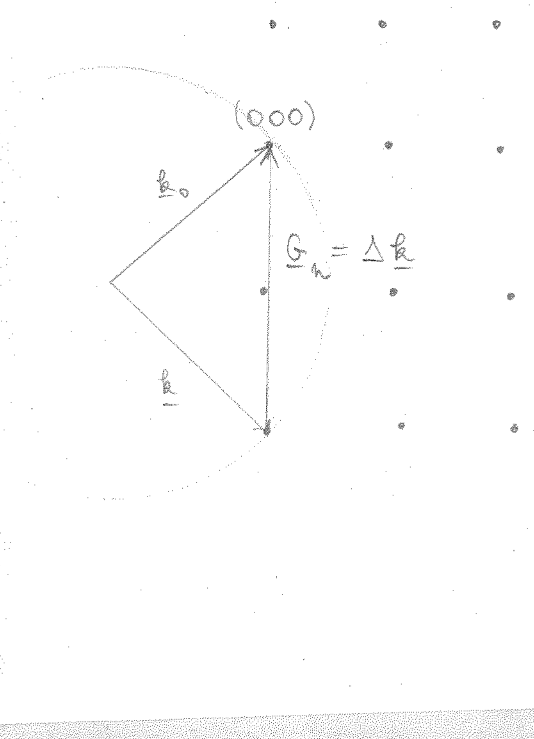


$$\underset{\displaystyle \frac{2\pi}{\lambda}}{\underset{\shortparallel}{2k}}\sin\vartheta = |\underline{G}| = \frac{2\pi}{d}$$

$$\boxed{2d\cdot\sin\vartheta = n\lambda}$$

Bragg-feltétel

Ewald-szerkesztés

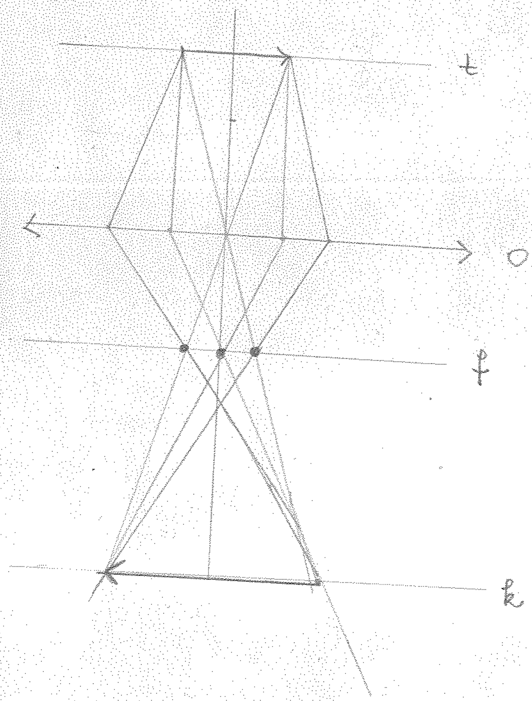


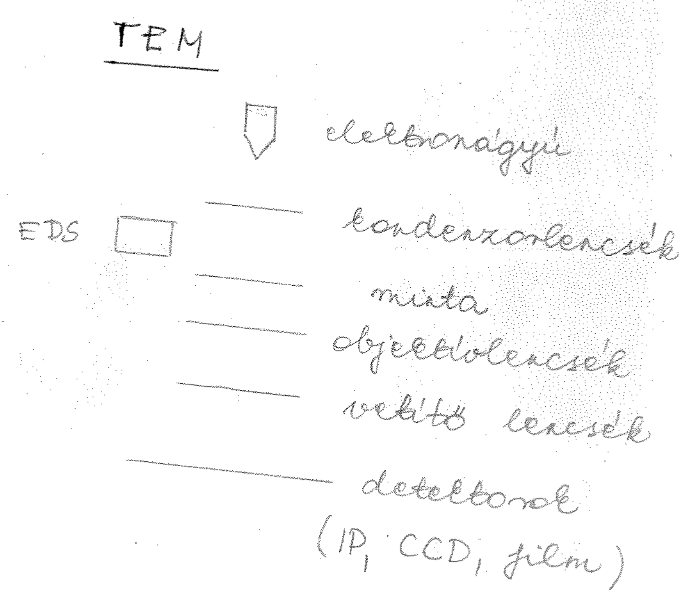
de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \approx 10^{-2}\,\text{Å} \quad \Big\} \text{ nagyságrendben}$$

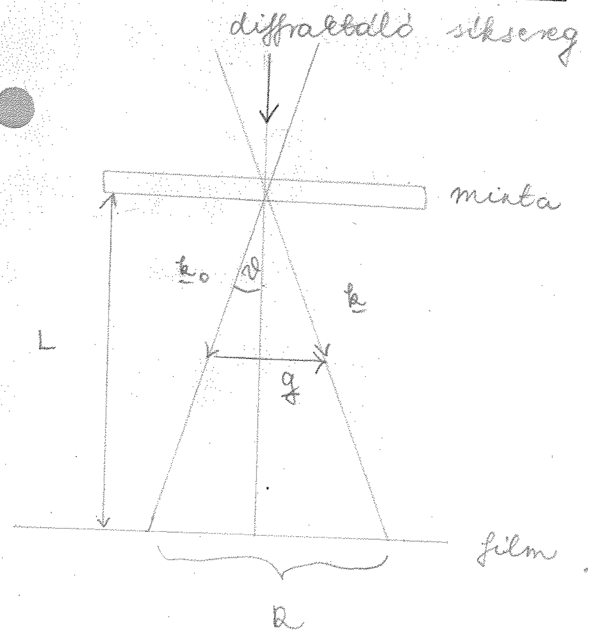
$$\text{rácsállandók} \approx 1\,\text{Å}$$

gyűjtőlencse képalkotása





diffrakció kiértékelése

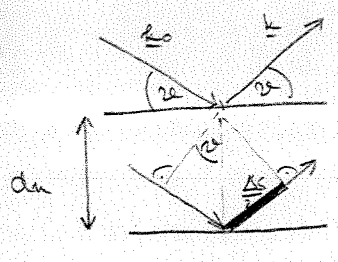


$$\sin\vartheta \approx \operatorname{tg}\vartheta$$

$$\frac{R}{L} = \frac{|\underline{g}|}{|\underline{k}|} = \frac{\lambda}{d_{hkl}}$$

$$R \cdot d_{hkl} = \text{const.}$$

Bragg-modell



$$\frac{\Delta s}{2} = d_n \cdot \sin\vartheta$$

$$\Delta s = 2 d_n \cdot \sin\vartheta \overset{!}{=} n\lambda \quad \text{(Bragg-feltétel alapján)}$$

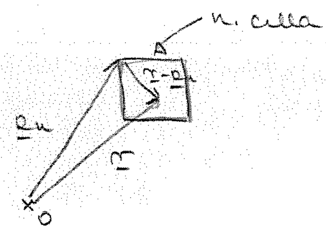
$$2 \cdot \underbrace{\frac{d_n}{n}} \cdot \sin\vartheta = \lambda$$

valódi rácssíkok + felosztottjaik

Intenzitások nagysága:

$$A(\underline{k}) = A(\underline{K}) = \int \varrho(\underline{r}) e^{i\underline{K}\underline{r}} d^3 r$$

$$\varrho(\underline{r}) = \sum_n{}' \varrho_c(\underline{r} - \underline{R}_n)$$



$$A(\underline{K}) = \sum_n{}' \int \varrho_c(\underbrace{\underline{r} - \underline{R}_n}_{\underline{r}'}) e^{i\underline{K}\underline{r}} d^3 r = \sum_n{}' \left[\int \varrho_c(\underline{r}') e^{i\underline{K}\underline{r}'} d^3\underline{r}'\right] \underbrace{e^{i\underline{K}\underline{R}_n}}_{1}$$

$$A(\underline{K}) = N_c \cdot \int \varrho_c(\underline{r}) e^{i\underline{K}_n\underline{r}} d^3 r \quad \leftarrow \text{cellákra már fel van összegezve}$$

$$\varrho_c(\underline{r}) = \sum_{\underline{r}_p}{}' \varrho_p(\underline{r} - \underline{r}_p) \quad \leftarrow \text{ez közepesen korrekt...}$$

(kov. köt.-nél az elektronok megoszlanak)

↑ p. atom helye a cellában

$$= \underbrace{N_c \sum_{\underline{r}_p}{}' e^{i\underline{K}_n\underline{r}_p} \underbrace{\int \varrho_p(\underline{r}') e^{i\underline{K}_n\underline{r}'} d^3 r'}_{f_p(\underline{K}_n)}}_{F(\underline{K}_n)}$$

$f_p(\underline{K}_n)$: atomic formfactor (rendszámtól függ)

$F(\underline{K}_n)$: structure factor (cellában milyen atomok ülnek)

$$I \sim N_c^2 \, |F(\underline{K}_n)|^2$$

Szerkezetvizsgálat

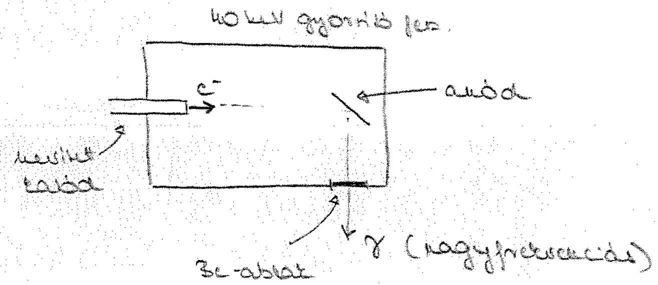
→ diffrakciós módszerek

- röntgenszórás
- elektronszórás
- neutronszórás

① röntgensugárzás

- előállítás

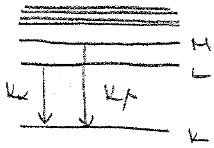
a) hagyományos röntgencső

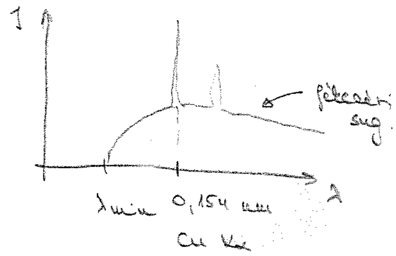


- anódnál: fékezési sug.

karakterisztikus rtg.-sug.

↳ anyagra jellemző





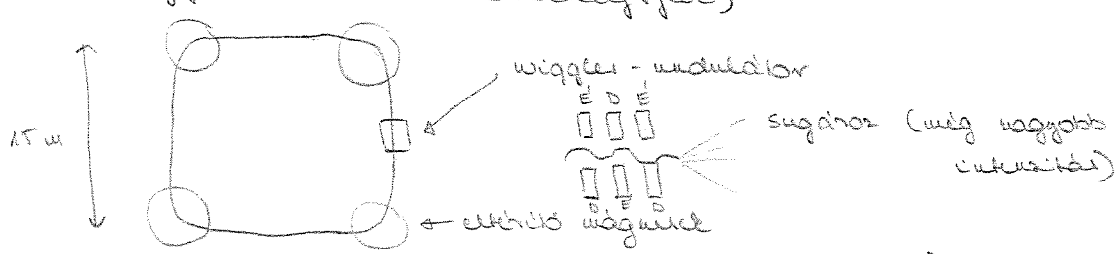
$eU = h\nu_{korlát} =$

$= hc \cdot k_{korlát} = \frac{hc}{\lambda_{min}}$

$\lambda_{min} = 0{,}03$ nm (40 keV-nél)

b) modern: szinkrotron

(gyorsító, e^--okat körbehajtják)



→ e^- sugároz (mert gyorsul)

⇒ széles spektrum

- előnye: széles spektrum

→ monokromátorral kiválasztható a szükséges frekvencia

nagy intenzitás

- hátránya: nagyméretű

- anyaggal való kölcs.
  - megrezgeti az elektronokat
    - → elektronsűrűséget lehet vele mérni (→ atomhelyek)
  - rugalmas szórás (Compton)
- detektálás
  - klasszikus: fotolemez
  - manapság: számlálócsövek
    imaging plate
    CCD

(2.) elektronszórás

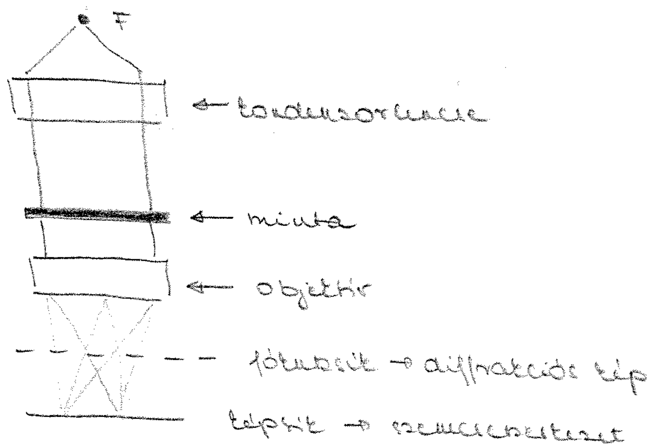
- előállítás: elektronmikroszkóp

hullámhossz: $\left.\begin{array}{l} \lambda = \frac{h}{p} \\ E = \frac{p^2}{2m} \end{array}\right\} \lambda[\text{Å}] = \frac{12{,}2}{\sqrt{E[eV]}}$

- TEM: transzmissziós elektronmikroszkóp

  $E \sim 200$ eV → $\lambda \sim 0{,}027$ Å (kicsi, jó!)

  elektronmikroszkóp



- hátránya: nehéz a mintát preparálni (vékony kell ~ 10nm)
- előnye: jól használható

HREM, SEM

- detektálás: visszaszórt elektronokat
  másodlagos elektronokat
  karakterisztikus röntgensug.-t

Rácsrezgések termikus hatásai

fononok: kvázirészecskék, kvantált energiaszintek, módusok

~ fotonokra hasonlít az analógia → fononok bozonok!

rácsrezgések energiája: $E = \sum_i' \hbar\omega\left(n_i + \frac{1}{2}\right)$

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_BT}} - 1}$$ $\mu = 0$ → kvázirészecskék, értelmetlen

$$\langle E \rangle = \sum_i' \hbar\omega_i \left(\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_BT}} - 1} + \frac{1}{2} \right) = \sum_i' \frac{\hbar\omega_i}{2} \frac{e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_BT}} + 1}{e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_BT}} - 1} =$$

$$= \sum_i' \frac{\hbar\omega_i}{2} \frac{e^{\frac{\hbar\omega_i}{2k_BT}} + e^{-\frac{\hbar\omega_i}{2k_BT}}}{e^{\frac{\hbar\omega_i}{2k_BT}} - e^{-\frac{\hbar\omega_i}{2k_BT}}} = \sum_i' \frac{\hbar\omega_i}{2} \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega_i}{2k_BT}\right)$$

$\boxed{T \to \infty}$ $\operatorname{cth} x \simeq \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \dots$

$$\langle E \rangle = \sum_i' \frac{\cancel{\hbar\omega_i}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}k_BT}{\cancel{\hbar\omega_i}} = 3 \cdot Nk_BT$$ ← Dulong-Petit-szabály

↑ összes módusra $\sum'$ → 3N szab. fok...?

$$c_V = \frac{\partial E}{\partial T} = 3Nk_B$$ általános ekvipartíció: $\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \rangle = k_BT\delta_{ij}$

$\boxed{T \ll 1}$ $\operatorname{cth} x \xrightarrow{x\to\infty} 1$ → nincs T-függés → $c_V = 0$! szabadsági fokok befagyása

ez oké, de ennél vmi pontosabbat akarunk...

($c_V \xrightarrow[0]{T} 0$ nem elég!)

Első formula:

$$\langle E \rangle = \sum_i' \frac{\hbar\omega_i}{2} + \sum_i' \frac{\hbar\omega_i}{e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_BT}} - 1} = E_0 + \int \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}} - 1} \underbrace{D(\omega)}_{\text{módussűrűség}} d\omega$$

(állapotsűrűséggel teljesen azonos analógia..)

Debye-modell:

$$D_D(\omega) = \begin{cases} \frac{V}{2\pi^2}\frac{3}{c^3}\cdot\omega^2 & \text{ha } \omega < \omega_D \\ 0 & \text{ha } \omega > \omega_D \end{cases}$$ def.!

~ olyan, mint a Fermi-cs... ω_D-ig ugyanolyan sűrűséggel betöltik a módusok, nyilván ekkor $\int_0^{\omega_0} D(\omega)\,d\omega = 3\cdot N$ ← összes módus száma

→ ebből ω_0 megvan

$$\int_0^{\omega_0} D(\omega)\,d\omega = \int_0^{\omega_0} \frac{V}{2\pi^2}\frac{3}{c^3}\omega^2\,d\omega = \frac{V}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{c^3}\cdot\omega_0^3 \overset{!}{=} 3N$$

$$\omega_0 = \left(\frac{2\pi^2}{V}\cdot 3Nc^3\right)^{1/3}$$

emellett $\hbar\omega_0 = k_B T_D$ Debye-hőmérséklet

$$T_D = \frac{\hbar}{k_B}\left(\frac{2\pi^2}{V}3N\right)^{1/3}\cdot c$$

• akkor értelmes a modell, ha nagy T-re itt is kijön a Dulong-Petit szabály

$T \to \infty$

$$E = E_0 + \int_0^{\omega_0}\frac{\hbar\omega}{1+\frac{\hbar\omega}{k_BT}-1}D(\omega)\,d\omega = E_0 + 3Nk_BT \quad ✓$$

$$e^x \simeq 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$$

• kis T-re:

$$E = E_0 + \int_0^{\omega_0}\frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}}-1}\frac{V}{2\pi^2}\frac{3}{c^3}\omega^2\,d\omega =$$

(kis T) $\frac{\hbar\omega_0}{k_BT} \to \infty$

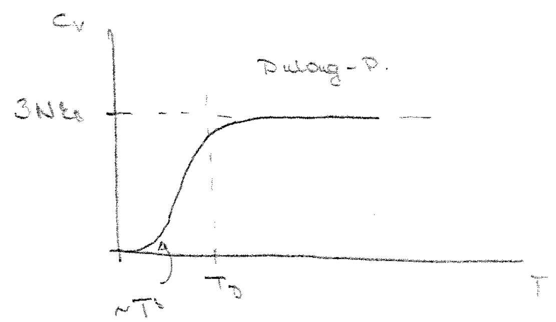
$$= E_0 + \frac{3V\hbar}{2\pi^2c^3}\underbrace{\int_0^{\omega_0}\frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}}-1}\,d\omega} = E_0 + \frac{3V\hbar}{\cancel{2}\pi^{\cancel{2}}c^3}\left(\frac{k_BT}{\hbar}\right)^4\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x-1}\,dx}_{\frac{\pi^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{15}\,5}} =$$

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_BT} \to \left(\frac{k_BT}{\hbar}\right)^3$$

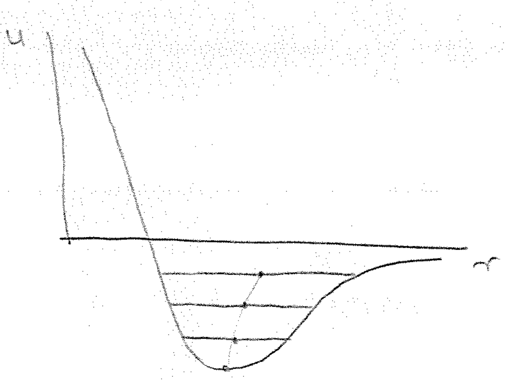
$$d\omega = \frac{k_BT}{\hbar}\,dx$$

$$= E_0 + \frac{V\pi^2}{10c^3\hbar^3}k_B^4T^4$$

$$\to C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{V2\pi^2}{5c^3\hbar^3}k_B^4T^3 \qquad C_V \sim T^3$$



Hőtágulás



ezt nem a fononok okozzák, fononoknál harmonikus rezgőmozg.-t feltételeztünk (lin. erőtv.)

→ szimmetrikus pot.

valójában a pot. aszimmetrikus

→ eltolódik a rezgés középpontja

- jobbra → hőtágulás
- balra → pl. gumi

- kvarc: erősen lineáris
  → alig van hőtágulás
- invar ötvözet: nincs hőtágulás (kompenzálják egymást)
- kovar ötvözetek: együtt tágul az üveg a fémmel pl.

\+ hőmérők zérd depressziója (amorf anyagok hőtágulása lassú)

Hővezetés

$$\frac{\partial q}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q = \sigma (T_2^4 - T_1^4) A$$

$$\dot{q} = 4\sigma T^3 \Delta T \cdot A = k A \frac{\Delta T}{\ell}$$

vákuumban!

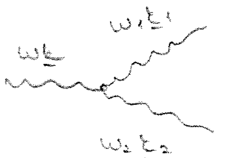
$k = 4\sigma T^3 \ell$ a hővezetési együttható

$\ell \to 0 \quad k \to 0$
$\ell \to \infty \quad k \to \infty$ } a vákuum rövid távon rossz, hosszú távon jó hővezető

b) nem vákuumban

- ideális kristályrács $k \to \infty$
- a nem ∞ hővezetést a fononok okozzák

→ fonon-fonon kcsh. (~ szóródnak egymáson)



energiamegm.: $\hbar\omega = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2$

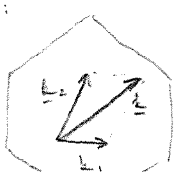
kvázi-impulzus-megm.:

$$\hbar\underline{k} = \hbar\underline{k}_1 + \hbar\underline{k}_2 + \hbar\underline{K}_n$$

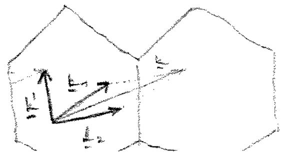
imp. egy reciprokrácsvekt. erejéig marad meg

direkt:

benne van a BZ-ban



umklapp:



$\underline{k}' = \underline{k} + \underline{K}_n$

végül hővezetést az umklapp foly.-ok

Adiabatikus szétcsatolás, Bloch-tétel

adiabatikus szétcsatolás azért tehető meg, mert $m_p = m_n \simeq 1800 \cdot m_e$

→ atommagok még sokkal nehezebbek

anyag: ionok + elektronok

↳ sokkal-sokkal gyorsabbak

→ ionok az elektronokból csak egy felhőt látnak

→ elektronoknak az ionok állni látszanak

→ nyilván a teljes megó.-hoz fel kell írni a közös Hamilton-op.-t és ezzel megoldani a Schrödinger-egy.-et

ionok: $\underline{R}_J$; $\underline{P} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \underline{R}_J}$ $\quad$ e⁻-ok: $\underline{r}_i$, $\underline{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \underline{r}_i}$

M_J $\quad$ m

teljes Hamilton-op.:

$$H = \underbrace{-\sum_J{}' \frac{\hbar^2}{2M_i}\frac{\partial^2}{\partial \underline{R}_J^2}}_{\text{szabad mag kin. E}} + \underbrace{V_{J,J}(\underline{R}_J)}_{\text{magok közti kch.}} \underbrace{- \sum_i{}' \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \underline{r}_i^2}}_{\text{szabad e}^-\text{ kin. E}} + \underbrace{V_{e,e}(\underline{r}_i)}_{\text{e}^-\text{-e}^-\text{ kch. Coulomb-tasz.}} + \underbrace{V_{e,J}(\underline{r}_i, \underline{R}_i)}_{\text{e}^-\text{-ok és magok közti kch. vonzó}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon}\sum_{i,j}{}' \frac{1}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} \qquad \sum_{i,J}{}' \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Ze^2}{|\underline{r}_i - \underline{R}_J|}$$

⇒ adiabatikus szétcsatolás: keressük a megó.-t

$$\Psi(\underline{r}_i, \underline{R}_J) = \Phi(\underline{R}_J)\varphi(\underline{R}_J, \underline{r}_i) \text{ alakban!}$$

⇒ az elektronok nem hatnak a magokra..

$H\Psi = E\Psi$

$H\Phi\varphi = E\Phi\varphi$

$$\frac{\partial^2}{\partial \underline{R}_J^2}(\Phi\varphi) = \frac{\partial}{\partial \underline{R}_J}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{R}_J}\varphi + \Phi\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{R}_J}\right) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial \underline{R}_J^2}\varphi + 2\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{R}_J}\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{R}_J} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \underline{R}_J^2}\Phi$$

$V_{JJ}\Phi \cdot \varphi$

$$\Rightarrow \left[-\sum_J{}' \frac{\hbar^2}{2M_J}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial \underline{R}_J^2} + V_{JJ}\Phi\right]\varphi + \left[-\sum_J{}' \frac{\hbar^2}{2M_J}\cdot\left(2\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{R}_J}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{R}_J} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \underline{R}_J^2}\cdot\Phi\right)\right] +$$

$$+ \left[-\sum_i{}' \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial \underline{r}_i^2} + V_{ee}\varphi + V_{eJ}\varphi\right]\Phi = E\Phi\varphi$$

teljes Schrödinger-egy.

1.) elektron probléma

→ a rácsot fixen tartjuk, $\underline{R}_J$ csak paraméterként szerepel az egyenletben → $\frac{\partial}{\partial \underline{R}_J}$ -t mindenhol kiesnek

$$-\sum_i{}' \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \underline{r}_i^2} + V_{ee}\varphi + V_{eJ}\varphi = \underbrace{E(\underline{R}_J)}\varphi$$

az energiában R_J szerepel paraméterként

2.) rácsprobléma

→ előző felhasználva

$$-\sum_J{}' \frac{\hbar^2}{2M_J} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{R}_J^2} + V_{JJ}\Phi + E(\underline{R}_J)\cdot \Phi = E\Phi$$

(ebben már csak a rácskoordináták szerepelnek)

3.) kettő kölcsönhatását (elektron-fonon kch.) perturbációszámítással vesszük figyelembe

Most: megoldjuk az elektron-problémát egy adott R_J elrendezés mellett

mivel a rács periodikus:

$$H\varphi = E\varphi \qquad \underline{r} \to \underline{r} + \underline{R}_n \quad \Rightarrow \quad H(\underline{r}) = H(\underline{r} + \underline{R}_n)$$

$$H(\underline{r})\varphi(\underline{r}) = E\varphi(\underline{r})$$
$$H(\underline{r}+\underline{R}_n)\varphi(\underline{r}+\underline{R}_n) = E\varphi(\underline{r}+\underline{R}_n)$$
$$H(\underline{r})\varphi(\underline{r}+\underline{R}_n) = E\varphi(\underline{r}+\underline{R}_n)$$

ha $\varphi(\underline{r})$ sajátfv. volt, akkor $\varphi(\underline{r}+\underline{R}_n)$ is az!

→ vagyis $\boxed{\varphi(\underline{r}+\underline{R}_n) = c_n \cdot \varphi(\underline{r})}$

másképp:

$T(\underline{R}_n)\varphi(\underline{r}) = \varphi(\underline{r}+\underline{R}_n)$ T def. (eltolás)

$T^{-1}(\underline{R}_n)\varphi(\underline{r}) = \varphi(\underline{r}-\underline{R}_n)$

$HT\varphi = ET\varphi$ $\qquad T^{-1}HT = H$

$\underbrace{T^{-1}HT}_{\stackrel{!}{=}}\varphi = E\varphi$ $\qquad HT = TH \to [H,T]=0$

→ H invariáns az eltolásra

$\psi(\underline{r}+\underline{R}_n) = c_n \psi(\underline{r}) \qquad |c_n|^2 = 1$ (normálás)

$$\left.\begin{aligned}\psi(\underline{r}+\underline{a}_1) &= c_1\psi(\underline{r})\\ \psi(\underline{r}+\underline{a}_2) &= c_2\psi(\underline{r})\\ \psi(\underline{r}+\underline{a}_3) &= c_3\psi(\underline{r})\end{aligned}\right\}$$

periodikus hat. felt.:

$$c_1^{N_1} = 1 \quad c_2^{N_2} = 1 \quad c_3^{N_3} = 1$$

$$c_1 = e^{i2\pi \frac{p_1}{N_1}} \quad c_2 = e^{i2\pi\frac{p_2}{N_2}} \quad c_3 = e^{i2\pi\frac{p_3}{N_3}}$$

$$\psi(\underline{r} + \underbrace{n_1\underline{a}_1 + n_2\underline{a}_2 + n_3\underline{a}_3}_{\underline{R}_n}) = e^{i2\pi\left(\frac{p_1 n_1}{N_1} + \frac{p_2 n_2}{N_2} + \frac{p_3 n_3}{N_3}\right)}\psi(\underline{r})$$

$$\boxed{\psi(\underline{r}+\underline{R}_n) = e^{i\underline{k}\underline{R}_n}\cdot\psi(\underline{r})}$$

ahol $\underline{k} = \frac{p_1}{N_1}\underline{b}_1 + \frac{p_2}{N_2}\underline{b}_2 + \frac{p_3}{N_3}\underline{b}_3$

degenerált eset: $H\psi_1 = E\psi_1 \quad H\psi_2 = E\psi_2$

$$\left.\begin{aligned}T\psi_1 &= \lambda_{11}\psi_1 + \lambda_{12}\psi_2\\ T\psi_2 &= \lambda_{21}\psi_1 + \lambda_{22}\psi_2\end{aligned}\right\} \text{ főtengely transz.}$$

$$\left.\begin{aligned}T\psi_A &= \lambda_A\psi_A\\ T\psi_B &= \lambda_B\psi_B\end{aligned}\right\} \rightarrow \text{ innen ugyanaz...}$$

1.) különböző $\underline{k}$-hoz tartozó Bloch-fv-ek merőlegesek

2.) a Bloch-fv-ek teljes rsz-t alkotnak

Sávszerkezet

- numerikusan viszonylag jól számolható
- analitikusan két módszer
  1) szabad elektronok + rácsperiodikus pot. → kvázi-szabad e⁻-ok
  2) tight binding approximation (TBA)

→ ① szabad elektron modell

$$\psi = e^{i\underline{k}_T\underline{r}} = \underbrace{e^{i\underline{K}_n\underline{r}}}\, e^{i\underline{k}\underline{r}} \qquad E = \frac{\hbar^2 \underline{k}_T^2}{2m}$$

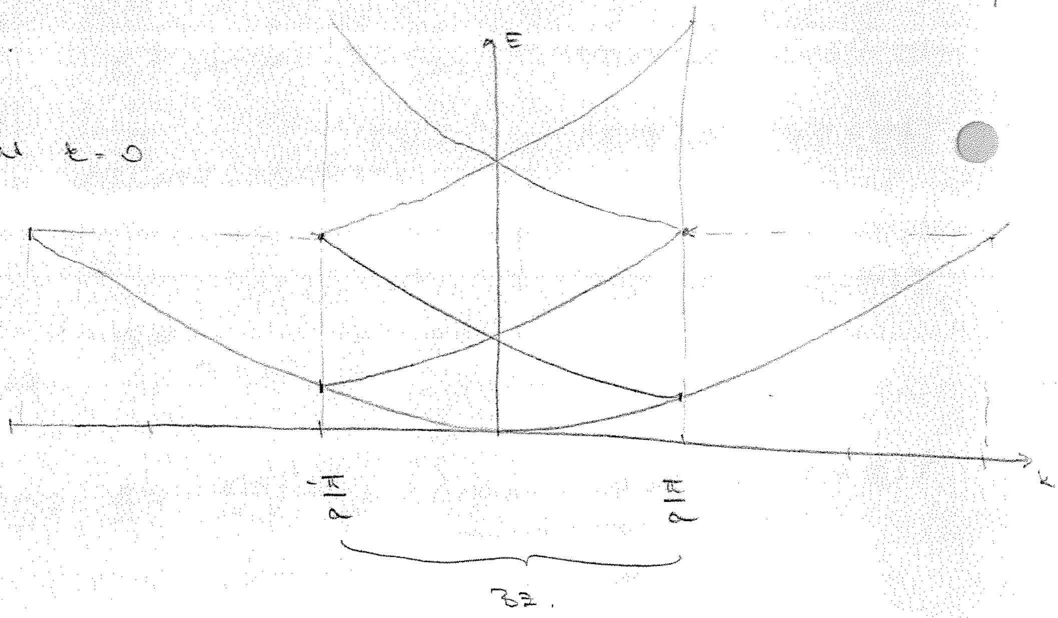
↑ síkhullám alakban keressük

→ ez a rész rácsperiodikus

→ $\underline{k}_T$ felbontható: $\underline{k}_T = \underline{K}_n + \underline{k}$ ← reciprok r. v. ; $\underline{k}$ ← $\in$ BZ

+ periodikus hat. felt.

$k = -\frac{2\pi}{a}$ ua. mint $k = 0$



→ szabad e^- hullámfv.-e:

$\varphi = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikr}$ + periodikus hat. felt.

$\varphi(0) = \varphi(L) = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad e^{ik_x L_x} = 1 \ldots$

$k_x = \frac{2\pi}{L_x} p_x \quad k_y = \frac{2\pi}{L_y} p_y \quad k_z = \frac{2\pi}{L_z} p_z$

$p_i \in \mathbb{Z}$

állapotsűrűség:

$D(E)dE = dN$

$$D(E)dE = 2 \cdot \sum_{\substack{k \\ E<E(k)<E+dE}} 1 = 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \int 1 \, d^3k = 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk$$

$dE = \frac{\hbar^2 k}{m} dk \qquad dk = \frac{m}{\hbar^2 k} dE \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

$$D(E)dE = \cancel{2} \cdot \frac{V}{(\cancel{2}\pi)^3_2} \cancel{4\pi} \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{1/2} \cdot \frac{m}{\hbar^2} \cdot \cancel{\left(\frac{\hbar^2}{2mE}\right)^{1/2}} dE =$$

$$= \frac{Vm}{\pi^2 \hbar^3} (2m)^{1/2} \sqrt{E}\, dE \sim \sqrt{E},\ m^{3/2}$$

$\mathcal{N}_0(E) = \frac{Vg}{h^3} \frac{4}{3}\pi (2m)^{3/2} \cdot E^{3/2} \quad \to \quad \boxed{g(E) = \frac{Vg 2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \cdot \sqrt{E}}$

$\frac{8\pi}{h^3} =$

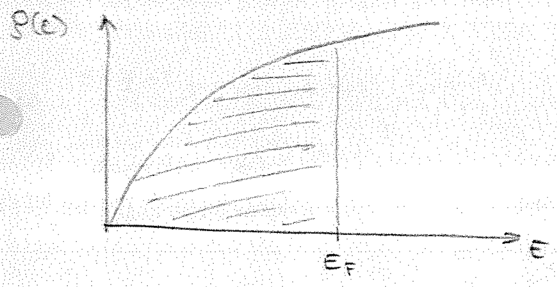
$h = 2\pi\hbar$

$= \frac{8\pi}{8\pi^3 \hbar^3}$

$g = 2$

$= \frac{V \cdot 4\pi}{h^3} \cdot 2m \cdot (2m)^{1/2} \cdot \sqrt{E}$

EZ UGYANAZ !!! YEAH !!!



T=0-n eddig van betöltve

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} \rho(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_F} \frac{V4\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\cdot\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon = \frac{V8\pi}{3h^3}(2m)^{3/2}\,\varepsilon_F^{3/2}$$

$$\langle E\rangle = \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon\,\rho(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{V8\pi}{5h^3}(2m)^{3/2}\,\varepsilon_F^{5/2} = \frac{3}{5}\cdot N\cdot\varepsilon_F$$

1. → kvázi szabad elektron modell
+ rácsperiodikus potenciál

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2\Delta}{2m} + \underbrace{U(\underline{r})}_{\text{rácsper.}}$$

$\hat{H}\varphi = E\varphi$ → keressük a mego.-t $\varphi = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1$ alakban,

ahol $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\underline{k}\underline{r}}$

$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{-i\underline{K}_1\underline{r}}e^{i\underline{k}\underline{r}}$

→ síkhullám közelítés

φ_1-ben egy rácsponttal odébb toljuk a cuccot

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[c_0\underline{k}^2\cancel{e^{i\underline{k}\underline{r}}} + c_1(\underline{k}-\underline{K}_1)^2e^{-i\underline{K}_1\underline{r}}\cancel{e^{i\underline{k}\underline{r}}}\right] + U(\underline{r})\left[c_0\cancel{e^{i\underline{k}\underline{r}}} + c_1e^{-i\underline{K}_1\underline{r}}\cancel{e^{i\underline{k}\underline{r}}}\right] =$$

$$= E\left[c_0\cancel{e^{i\underline{k}\underline{r}}} + c_1e^{-i\underline{K}_1\underline{r}}\cancel{e^{i\underline{k}}}\right]$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[c_0\underline{k}^2 + c_1(\underline{k}-\underline{K}_1)^2e^{-i\underline{K}_1\underline{r}}\right] + U(\underline{r})\left[c_0 + c_1e^{-i\underline{K}_1\underline{r}}\right] = E\left[c_0 + c_1e^{-i\underline{K}_1\underline{r}}\right]$$

integráljuk az egészet a cellára, majd osszuk el V_{cella}-val

→ $\frac{1}{V_{cella}}\int_{cella}\dots d^3r$ → jelölések: $V_0 = \frac{1}{V_{cella}}\int_{cella}U(\underline{r})\,d^3\underline{r}$

$V_1 = \frac{1}{V_{cella}}\int_{cella}U(r)\,e^{-i\underline{K}_1\underline{r}}\,d^3r$

$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} c_0 \underline{k}^2 + c_0 V_0 + V_1 c_1 = E c_0$

ahol belül az $e^{\pm i \underline{K}_1 \underline{r}}$-s részek eltűnnek integráláskor

b) beszorzás $e^{i \underline{K}_1 \underline{r}}$-rel, majd ugyanígy int.

$$\frac{1}{V_{cella}} \int_{cella} \dots \cdot e^{i \underline{K}_1 \underline{r}} \, d^3 r$$

$$\to \frac{\hbar^2}{2m} c_1 (\underline{k} - \underline{K}_1)^2 + V_1^* \cdot c_0 + c_1 V_0 = E c_1$$

legyen $V_0 = \frac{1}{V_{cella}} \int_{cella} U(\underline{r}) \, d^3 r \overset{!}{=} 0$ (így választjuk az energia nullpontját)

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &\frac{\hbar^2}{2m} c_0 \underline{k}^2 + V_1 c_1 = E c_0 \\ &\frac{\hbar^2}{2m} c_1 (\underline{k} - \underline{K}_1)^2 + V_1^* c_0 = E c_1 \end{aligned}\right\} \text{ lin. egy. rsz.}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\hbar^2}{2m} \underline{k}^2 & V_1 \\ V_1^* & \frac{\hbar^2}{2m} (\underline{k} - \underline{K}_1)^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

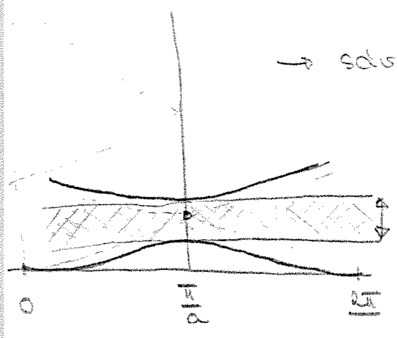
$$\begin{bmatrix} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E & V_1 \\ V_1^* & \frac{\hbar^2 (\underline{k} - \underline{K}_1)^2}{2m} - E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \to \det = 0$$

$$E^2 - E \frac{\hbar^2}{2m} \left(k^2 + (\underline{k} - \underline{K}_1)^2\right) + \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2 \underline{k}^2 (\underline{k} - \underline{K}_1)^2 - |V_1|^2 = 0$$

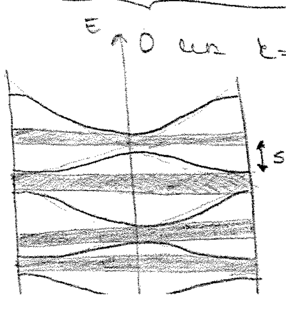
$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(k^2 + (\underline{k} - \underline{K}_1)^2\right) \cdot \frac{1}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2 \frac{\left(k^2 - (\underline{k} - \underline{K}_1)^2\right)^2}{4}} + |V_1|^2}$$

$\to$ sávszerkezet

$E \uparrow 0$ ha $k = \frac{\pi}{a}$-ban $\quad K_1 = \frac{2\pi}{a} \leftarrow$ fix



$2|V_1| \to$ tiltott sáv



$\updownarrow$ sáv

$\updownarrow$ tiltott sáv

E_F sávban $\to$ fém

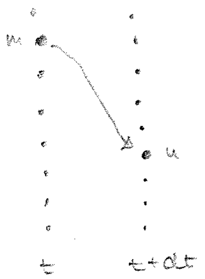
E_F tiltott sávban $\to$ szigetelő

(18) Nemegyensúlyi folyamatok leírása

(Irreverzibilis folyamatok, Master-egyenlet, részletes egyensúly, ingadozási jelenségek, Brown-mozgás, diffúzió, Langevin-egy., Brown-mozgás potenciálban, Drude-modell, vezetési jelenségek)

- Irreverzibilis folyamatok
  - → energiaveszteséggel járnak (súrlódás pl.)
  - entrópia nő → spontán nem fog az eredeti állapotba visszaállni ?

    irrev: energia hozzáadásával se?
  - ha egy foly. irrev → nem egyensúlyi
  - ha nem egyensúlyi → biztos, hogy irrev.
- diszkrét leírás Master-egyenlet



Annak a valószínűsége, hogy m áll. dt idő alatt n-be megy át:

$$W_{nm}\cdot dt + \mathcal{O}(dt)$$

→ helybenmaradás valószínűsége

$$1-\sum_{\substack{n \\ n\neq m}}' W_{nm}\, dt$$

→ annak a valószínűsége, hogy t+dt pillanatban n. helyen lesz:

$$p(n,t+dt) = p(n,t)\left(1-\sum_{n\neq m}' W_{mn}\, dt\right) + \sum_{\substack{m \\ m\neq n}}' p(m,t)\cdot W_{nm}\, dt$$

sorfejt.:

$$p(n,t+dt) = p(n,t) + \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \sum_m' \left[W_{nm}\, p(m,t) - W_{mn}\, p(n,t) \right]$$ Master-egyenlet diszkrét állapotokra

(feltettük, hogy Markov-foly.: csak az előző időpillanat számít)

- stacionárius állapot: $\frac{\partial p(n,t)}{\partial t} = 0$

  ~ szemléletesen: n. dobozban mindig ugyanannyi golyó van.
  MINDEGY, hogy honnan jön és hova megy

⇒ részletes egyensúly: $W_{nm}\, p(m,t) = W_{mn}\, p(n,t)$

→ részletes egyensúlyban tetszőleges n-m dobozok között ugyanannyi golyó cserélődik ki (nem mindegy, honnan hova mennek)

például kanonikusan, T hőmérsékletű környezetben:

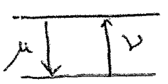
$$p_{stac}(n) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$$

⇒ emiatt $\quad w_{nm} e^{-\beta E_m} = w_{mn} e^{-\beta E_n}$

az átmeneti valószínűségeknek ezt teljesíteni kell!

Például:

- bináris állapotok : összesen 2 állapot
  - 1/2 spin $\underline{B}$ mágneses térben, T hőmérséklet



$+\mu_B B \quad \downarrow \quad p_+(t)$

$-\mu_B B \quad \uparrow \quad p_-(t)$

Master-egy.:
$$\dot{p}_+(t) = p_-(t)\cdot\nu - p_+(t)\mu$$
$$\dot{p}_-(t) = p_+(t)\cdot\mu - p_-(t)\nu = -\dot{p}_+(t)$$

(*) $p_+(t) + p_-(t) = 1$

stacionárius megο.: $p_{s-}\nu = p_{s+}\mu$

$$\frac{p_{s+}}{p_{s-}} = \frac{\nu}{\mu} = \frac{e^{-\beta\mu_B B}}{e^{\beta\mu_B B}}$$

$$\frac{\nu}{\mu} = e^{-2\beta\mu_B B}$$ -nek teljesülnie kell!

$$\dot{p}_+(t) = \nu(\overbrace{1-p_+}^{(*)}) - \mu p_+ = \nu - (\nu+\mu)p_+$$

Ld általános megο. $\quad p_+(t) = A e^{-(\nu+\mu)t} + \frac{\nu}{\nu+\mu}$ ✓

$\dot{x} = A - Bx$

hom. $\dot{x} = -Bx \quad x = Ce^{-Bt} \quad x = C(t)e^{-Bt}$

inhom. $\dot{C}e^{-Bt} - C\cancel{B}e^{-Bt} = A - BC\cancel{e^{-Bt}}$

$\dot{C} = Ae^{Bt} \qquad x = \frac{A}{B} + De^{-Bt}$

$dC = Ae^{Bt}\,dt \qquad x = p_+ \quad A = \nu \quad B = \nu+\mu$

→ ebből

$$\frac{\nu}{\mu+\nu} = \frac{\nu/\mu}{1+\nu/\mu} = \frac{e^{-2\beta\mu_B B}}{1+e^{-2\beta\mu_B B}} = \frac{e^{-\beta\mu_B B}}{e^{\beta\mu_B B}+e^{-\beta\mu_B B}}$$

• legyen a kezdeti feltétel : $t=0:\ p_+(0) = A + \frac{\nu}{\mu+\nu}$

$$\Rightarrow A = p_+(0) - \frac{\nu}{\mu+\nu}$$

$$\Rightarrow p_+(t) = \left(p_+(0) - \frac{\nu}{\mu+\nu}\right) e^{-(\nu+\mu)t} + \frac{\nu}{\mu+\nu}$$

• Mennyi lesz így a mágnesezettség?

$$M = \mu_B \underbrace{p_-}_{1-p_+} - \mu_B p_+ = \mu_B (1-2p_+)$$

$$\to 1 - 2\cdot\frac{e^{-\beta\mu_B B}}{e^{\beta\mu_B B}+e^{-\beta\mu_B B}} = \text{th}(\beta\mu_B B)$$

$$M = \underbrace{\mu_B\left(1-\frac{2\nu}{\mu+\nu}\right)}_{\text{konstans}} \underbrace{- 2\mu_B\left(p_+(0) - \frac{\nu}{\mu+\nu}\right)e^{-(\nu+\mu)t}}_{\text{exponenciálisan lecseng}}$$

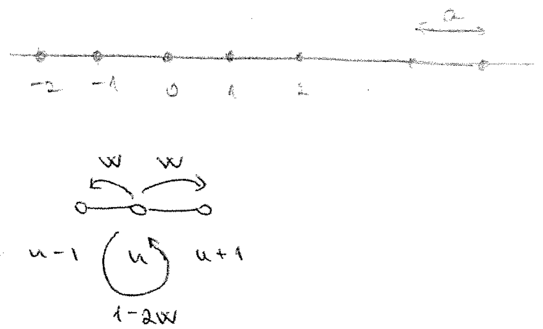
$$M = \underbrace{\mu_B \cdot \text{th}(\beta\mu_B B)}_{\text{ezt nagy } t\text{-re visszakapjuk!} \to \text{relaxáció}} - 2\mu_B\left(p_+(0) - \frac{\nu}{\mu+\nu}\right)e^{-(\nu+\mu)t}$$

lecseng

Bolyongási probléma, Brown-mozgás

• bolyongás láncon 1D

• diszkrét idő és helyváltozó



$p(n,N) \leftarrow$ mekkora valószínűséggel vagyunk az n. pontban N lépés után

$$p(n,N+1) = w\,p(n+1,N) + w\,p(n-1,N) + (1-2w)\,p(n,N) =$$

$$= p(n,N) + 2w\left(\frac{p(n+1,N)+p(n-1,N)}{2} - p(n,N)\right)$$

rekurzív összefüggés

Várhatóan hol tartózkodik a részecske N lépés után?

$$\bar{n}(N) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \, n\, p(n,N)$$

$$\bar{n}(N+1) = \sum{}' n\, p(n,N+1) = \sum_n{}' n\left(w p(n+1,N) + w p(n-1,N) + (1-2w) p(n,N)\right) =$$

$$n = n+1-1$$

$$\sum{}'(n+1-1)p(n+1,N) = \underbrace{\sum{}'(n+1)p(n+1,N)}_{\bar{n}(N)} - \underbrace{\sum{}' p(n+1,N)}_{1 \text{ (normálás)}}$$

$$= w\left(\bar{n}(N) - \cancel{1} + \bar{n}(N) + \cancel{1}\right) + (1-2w)\,\bar{n}(N) = \bar{n}(N)$$

$\bar{n}(N+1) = \bar{n}(N) = \dots \bar{n}(0)$ a részecske átlagosan nem mozdul el (nagyon hihető)

$$\overline{n^2}(N) = \sum_n{}' n^2 p(n,N)$$

$$\overline{n^2}(N+1) = \sum{}' n^2 p(n,N+1) = \sum{}' n^2 \left(w p(n+1,N) + w p(n-1,N) + (1-2w) p(n,N)\right) =$$

$$n^2 = (n+1-1)^2 = (n+1)^2 - 2(n+1) + 1 \rightarrow \sum : \overline{n^2}(N) - 2\bar{n}(N) + 1$$

$$= \underbrace{(w + w + 1 - 2w)}_{1} \cdot \overline{n^2}(N) + \bar{n}(N)\underbrace{(-2+2)}_{0} w + 2w$$

$$\overline{n^2}(N+1) = \overline{n^2}(N) + 2w$$

$$= \overline{n^2}(N-1) + 2w + 2w = \overline{n^2}(0) + 2w(N+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{n}(N) = \bar{n}(0) \\ \overline{n^2}(N) = \overline{n^2}(0) + 2wN \end{array}\right\} \quad (\Delta n)^2 = \overline{n^2}(N) - \bar{n}^2(N) = 2wN + \overline{n^2}(0) - \bar{n}^2(0)$$

→ folytonos leírás: $x = na$

$t = N\tau$ $\quad \tau$: egy lépés ideje

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(0)$$

$$\overline{x^2}(t) = a^2 \overline{n^2}\left(\frac{t}{\tau}\right) = a^2 \cdot \overline{x^2}(0) + a^2 \cdot 2 \cdot w \cdot \frac{t}{\tau}$$

$\rightarrow \quad wa^2$ [illegible]

diffúzió 1D-ben : speciálisan $w = \frac{1}{2}$

$$p_{t+1}(x) = \frac{1}{2} p_t(x-1) + \frac{1}{2} p_t(x+1)$$

$x+1 \to x+\Delta x$

$t+1 \to t+\Delta t$

$- p_t(x)$, majd $\frac{1}{\Delta t}$

$$\frac{p_{t+\Delta t}(x) - p_t(x)}{\Delta t} = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{p_t(x+\Delta x) + p_t(x-\Delta x) - 2p_t(x)}{(\Delta x)^2}$$

$\Delta x, \Delta t \to 0$

de $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$ véges

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \qquad D = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta \tau}$$

Fick. II. tv.-e : $\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c$ koncentráció ~ valószínűség

1D-ben mego. : $c(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2Dt}}$

ahol a kezdeti feltétel $t = 0$: $c(x,0) = \delta(x)$

$\sigma^2 = 2Dt \to \sigma = \sqrt{2Dt}$

Általánosítás : diffúziónál nincs várakozási idő és csak egyet lehet lépni

↳ nulla annak a valószínűsége, hogy helyben maradunk

↳ $w(l)$: l szakaszhosszúságú ugrás valószínűsége

normálás $\sum_{l=-\infty}^{\infty} w(l) = 1$

$\sum_l l\, w(l) = 0$

kezdeti fell. : részecske az origóban

→ később milyen valószínűséggel lesz egyik-másik rácspontban?

i. lépés → l_i szakaszhossz

N lépés után $n(N) = \sum_{i=1}^{N} l_i$ itt lesz a részecske

$$\overline{n}(N) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\overline{l_i}}_{0} = 0$$

$$\overline{n^2}(N) = \overline{\sum_{i=1}^{N} l_i \sum_{j=1}^{N} l_j} = \sum \overline{l_i l_j} = \sum \overline{l_i^2} + \sum \underbrace{\overline{l_i l_j}}_{0 \text{ (független)}} = N\,\overline{l^2}$$

$\overline{n^2}(N) \sim \overline{\ell^2}$ lépésszámmal arányos

$\overline{x^2} = \frac{a\overline{\ell^2}}{\tau} t$ $D = \frac{a\overline{\ell^2}}{2\tau}$ $\overline{\ell^2}$ véges   anomális diffúzió

$\overline{n^2}(N) \sim N$ diffúzió

$\overline{n^2}(N) \sim N^\gamma$ → $\gamma > 1$ szuperdiffúzió

$\gamma = 1$ diffúzió

$\gamma < 1$ szubdiffúzió

$\sum_\ell \ell^2 w(\ell)$ mindenképp véges kell, hogy legyen (→ akkor normálható)

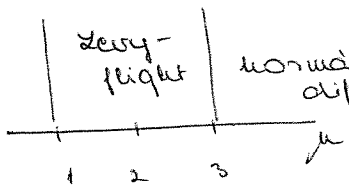
pl. $w(\ell) \sim \ell^{-\mu}$ $\ell^2 w(\ell) \sim \ell^{2-\mu}$

→ $\frac{1}{\ell}$-nél gyorsabban kell lecsengenie

$\mu > 3$: véges

$\mu < 3$: Lévy-flight (ugrások) → szuperdiff.

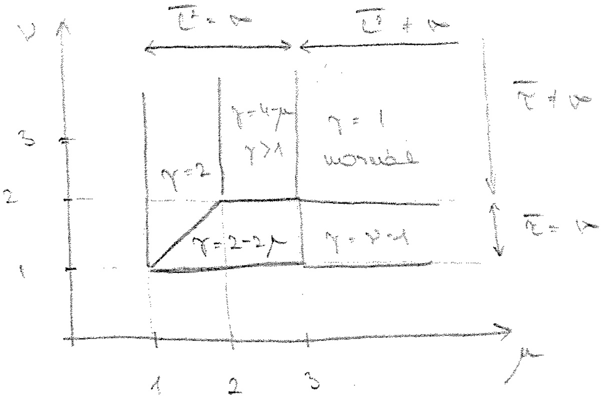
DE! $\sum_\ell w(\ell) \overset{!}{=} 1$ ⇒ $\mu > 1$



várakozási idő: τ $\left.\begin{array}{l}\overline{\tau} \text{ véges} \\ \tau\ \infty\end{array}\right\}$ $\nu(\tau)$ valószínűségeloszlás az időre

$\nu(\tau) \sim \tau^{-\nu}$ $\nu > 1$ → normálható

$\nu > 2$ → véges



18. Nemegyensúlyi statisztikus fizika

Irrev. folyamatok

energiaveszteség

entrópianövekedés

Master-egyenlet

Markov-folyamat

$t \rightarrow t + dt$

$m \rightarrow n$ dt alatt vsz.: $w_{nm} \cdot dt + \mathcal{O}(dt)$

$$\underbrace{p(n, t+dt)}_{p(n,t) + \frac{\partial p}{\partial t} dt} = p(n,t) \cdot \Big(1 - \sum_{n \neq m} w_{mn}\, dt\Big) + \sum_{\substack{m \\ m \neq n}} p(m,t) \cdot w_{nm}\, dt$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -p(n,t) \cdot \sum_{n \neq m} w_{mn} + \sum_{m} p(m,t)\, w_{nm} =$$

$$= \sum_{m} \big(p(m,t)\, w_{nm} - p(n,t)\, w_{mn} \big)$$

stac. állapot – részletes es.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad p(m,t)\, w_{nm} = p(n,t)\, w_{mn}$$

pl. bináris atomok

$\mu \downarrow \; \uparrow \nu$ $\quad +\mu_B B \quad p_+(t)$

$\quad -\mu_B B \quad p_-(t)$

$\Big\}$ Master-e.: $\dot{p}_+ = p_- \nu - p_+ \mu$

$\dot{p}_- = p_+ \mu - p_- \nu$

$+ \quad p_+ + p_- = 1$

stac. mo. $\dfrac{p_+}{p_-} = \dfrac{\nu}{\mu} = \dfrac{e^{-\beta \mu_B B}}{e^{\beta \mu_B B}} = e^{-2\beta\mu_B B}$

$$\dot{p}_+ = \nu(1 - p_+) - \mu p_+ = \nu - (\nu + \mu) p_+ \Rightarrow \text{dlt. mo.} + \text{KF}$$

$$M = \mu_B p_- - \mu_B p_+ = \mu_B(1-2p_+)$$

$$M = \underbrace{\mu_B \,\mathrm{th}(\beta \mu_B B)} - 2\mu_B\left(p_+(0) - \frac{\nu}{\mu+\nu}\right)e^{-(\nu+\mu)t}$$

hosszú távon ez marad

lecseng!

Brown-mozgás

$$j_d = -D\frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_d}{dx} = +D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

$$j_K = n\cdot v_\infty = \frac{nK}{m\gamma}$$ állandó erő

hosszú idő után

$$j = j_D + j_K = \frac{nK}{m\gamma} - D\frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{nK}{m\gamma}\right) + \frac{\partial}{\partial x}D\frac{\partial n}{\partial x}$$

$$+D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

részletes egyensúlyban

$$n(x) = n(x_0)\,e^{\frac{K(x-x_0)}{kT}}$$

$n'(x)$, $n''(x)$ beírva $\Rightarrow$ $\dfrac{D}{kT} = \dfrac{1}{m\gamma} = \mu$

$$\underline{D = \mu k_B T}$$

Legyen $n(x,0) = \delta(x)$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \Rightarrow \sigma^2 = 2Dt$$

lehet k_B-t mérni!

18. Nemegyensúlyi statisztikus fizika

Langevin-egyenlet

$$m\frac{du}{dt} = F \quad ME$$

$$F_{súrl} = -m\gamma u$$

$$m\frac{du}{dt} = -m\gamma u + \underbrace{R(t)}_{\substack{\text{Gauss-f.} \\ \text{fehérzaj}}} - \frac{\partial V}{\partial x}$$

fehérzaj $\Rightarrow$ $I_R(\omega) = I_R = \text{const.}$

$$i\omega m\tilde{u} = -m\gamma\tilde{u} + I_R - ik\tilde{V}$$

$$u(t) = u(t_0)e^{-\gamma(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-t')}\frac{R(t')}{m}\,dt'$$

$$\langle u(t)\rangle = u_0 e^{-\gamma(t-t_0)}$$

$$\langle x^2(t)\rangle = 2D\left(t - \frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}\right)$$

Langevin-egyenlet:

- teljesen más szemszögből írja le a mozgást
  - → valószínűségi leírás helyett konkrét részecskét követ nyomon

$$\boxed{m\dot{\underline{v}} = \underbrace{-m\gamma \underline{v}}_{\text{súrlódás}} + \underbrace{\xi(t)}_{\text{zaj!}}}$$

feltételezések: $\langle \xi(t) \rangle = 0$!

$\langle \xi(t)\,\xi(t') \rangle = Q\,\delta(t-t')$

fehérzaj!

(korrelálatlan)

↓ megoldás

$$v(t) = \underbrace{v_0 e^{-\gamma t}}_{\text{homogén megó.}} + \underbrace{\frac{e^{-\gamma t}}{m}\int_0^t dt'\, e^{\gamma t'} \xi(t')}_{\text{inhom. partikuláris (green-fv.-nyel)}}$$

(kijön, variálással!)

$\cancel{m}\dot{\underline{v}} = -\cancel{m}\gamma \underline{v}$ ← hom.

$\dot v = -\gamma v \to v(t) = C\cdot e^{-\gamma t} \to C(t)e^{-\gamma t}$

$$m\cdot \dot C e^{-\gamma t} - \cancel{m\gamma C e^{-\gamma t}} = -\cancel{m\gamma C e^{-\gamma t}} + \xi(t)$$

$$\dot C = \frac{e^{\gamma t}}{m}\xi(t)$$

$$C = \int \frac{e^{\gamma t'}}{m}\xi(t')\,dt' + A$$

$$v = Ae^{-\gamma t} + \frac{e^{-\gamma t}}{m}\int_0^t e^{\gamma t'}\xi(t')\,dt'$$

$\langle v \rangle = ?$

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\gamma t} + \frac{e^{-\gamma t}}{m}\int_0^t dt'\, e^{\gamma t'} \underbrace{\langle \xi(t') \rangle}_{0} = v_0 e^{-\gamma t}$$

↳ exponenciálisan csökken

$$\langle v^2(t) \rangle = v_0^2 e^{-2\gamma t} + \frac{2v_0 e^{-2\gamma t}}{m}\int_0^t dt'\, e^{\gamma t'} \underbrace{\langle \xi(t') \rangle}_{0} +$$

$$+ \frac{e^{-2\gamma t}}{m^2}\int_0^t dt' \int_0^t dt''\, e^{\gamma t'} e^{\gamma t''} \underbrace{\langle \xi(t')\xi(t'') \rangle}_{Q\delta(t'-t'')} =$$

$$= v_0^2 e^{-2\gamma t} + \frac{Q e^{-2\gamma t}}{m^2}\underbrace{\int_0^t dt'\, e^{2\gamma t'}}_{\left[\frac{e^{2\gamma t'}}{2\gamma}\right]_0^t} = v_0^2 e^{-2\gamma t} + \frac{Q}{2\gamma m^2} - \frac{Q e^{-2\gamma t}}{m^2 2\gamma} =$$

$$= v_0^2 e^{-2\gamma t} + \frac{Q}{2\gamma m^2}\left(1 - e^{-2\gamma t}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} \langle v^2 \rangle = \frac{Q}{2\gamma m^2}$$

$\Rightarrow$ nagy t-re v_0 nem fog számítani, csak a zaj Q erőssége

$\to$ Langevin-egy. + diffúzió

L.-e. $\cdot\, x \to \langle\,\rangle$

$$\underbrace{\langle x\dot v\rangle}_{} = -\gamma \underbrace{\langle x v\rangle}_{} + \cancel{\frac{1}{m}\underbrace{\langle \xi x\rangle}_{0 \text{ (korrelálatlanok)}}}$$

$$x\dot x = \frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt}$$

$$x\dot v = x\ddot x = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x^2}{2}\right) - \dot x^2$$

$$\to \frac{d^2}{dt^2}\frac{\langle x^2\rangle}{2} - \langle v^2\rangle = -\gamma\frac{d}{dt}\frac{\langle x^2\rangle}{2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle + \gamma \underbrace{\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle}_{y} = 2\langle v^2\rangle \simeq \frac{Q}{\gamma m^2} \quad \text{nagy } t\text{-re}$$

$$y' + \gamma y = \frac{Q}{\gamma m^2} \qquad y' = -\gamma y \qquad y = Ce^{-\gamma t} \to C(t)e^{-\gamma t}$$

$$\dot C e^{-\gamma t} - \gamma \cancel{C e^{-\gamma t}} + \gamma \cancel{C} e^{-\gamma t} = \frac{Q}{\gamma m^2} \qquad dC = \frac{Q}{\gamma m^2} e^{\gamma t}\, dt$$

$$C = \frac{Q}{\gamma^2 m^2} e^{\gamma t} + \frac{Q}{\gamma^2 m^2}$$

$$y = \frac{Q}{\gamma^2 m^2}\left(1 + e^{-\gamma t}\right) \Rightarrow y = \frac{d\langle x^2\rangle}{dt}$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{Q}{\gamma^2 m^2}\cdot t + \frac{Q}{\gamma^2 m^2}\cdot\frac{1}{-\gamma}\cdot\left(e^{-\gamma t} - 1\right) =$$

$$= \frac{Q}{\gamma^3 m^2}\left(\gamma t - e^{-\gamma t} + 1\right)$$

$$\langle x^2\rangle \xrightarrow[\infty]{t} \frac{Q}{\gamma^2 m^2} t = 2Dt \qquad D = \frac{Q}{2\gamma^2 m^2}$$

Brown-mozgás potenciálban

$$m\dot v = -m\gamma v + F(x) + \xi(t) \qquad F(x) = -\operatorname{grad} V(x)$$

legyen $F(x) = F$ és $\xi(t) \equiv 0 \Rightarrow m\dot v_0 = -m\gamma v_0 + F = 0 \qquad v_0 = \frac{F}{m\gamma}$

drift-sebesség : $t \to \infty$, állandósult

→ Fokker-Planck-egy.

$P(x,t)$ részecske megtalálási valószínűség

→ kont. egy. $\frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0$

$j = j_{v_D} + j_g$ diffúzió + zaj miatt

a) ha nincs zaj $j_{v_D} = v_D \cdot P(x,t)$

b) ha nincs erő :

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \overbrace{D \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial j_g(x,t)}{\partial x}}^{\text{kont. egy.}}$$

$$j_g = -D \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$j = v_D \cdot P - D\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{F}{\gamma m} P - \frac{Q}{2\gamma^2 m^2}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} \quad \text{kont. egy.}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial v_D P}{\partial x} + \frac{\partial^2 D P}{\partial x^2} \quad \text{ez a Fokker-Planck-egy.}$$

° Einstein-féle levezetés

$$p(x, t+\tau)dx = p(x,t)dx - \int_{-\infty}^{\infty} p(x,t)dx\, \phi(\Delta)d\Delta + \int_{-\infty}^{\infty} p(x-\Delta,t)dx\, \phi(\Delta)\, d\Delta$$

$$p(x,t+\tau) = p(x,t) - p(x,t)\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\Delta)d\Delta + \int_{-\infty}^{\infty} p(x-\Delta,t)\,\phi(\Delta)d\Delta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\Delta)\,d\Delta = 1 \qquad \phi(-\Delta) = \phi(\Delta) \quad \text{(szimmetrikus)}$$

$$\Rightarrow p(x,t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-\Delta,t)\,\phi(\Delta)\,d\Delta$$

sorfejtés :

$$p(x,t+\tau) = p(x,t) + \frac{\partial p}{\partial t}\tau + \dots$$

$$p(x-\Delta,t) = p(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x}\Delta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\Delta^2$$

$$p(x,t)+\frac{\partial p}{\partial t}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,t)\phi(\Delta)d\Delta-\frac{\partial p}{\partial x}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\phi(\Delta)d\Delta}_{\overline{\Delta}}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^2\phi(\Delta)d\Delta}_{\overline{\Delta^2}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}\tau=-\frac{\partial p}{\partial x}\overline{\Delta}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\overline{\Delta^2}$$

$=0$, mivel $\phi(\Delta)$ szimm.

$$\frac{\partial p}{\partial t}\tau=\frac{1}{2}\overline{\Delta^2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{2\tau}=D$$

+ potenciál $\phi(\Delta)\neq\phi(-\Delta)$ változtatja az átmeneti valószínűségeket

$$\overline{\Delta}\neq 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\overline{\Delta}}{\tau}\frac{\partial p}{\partial x}}+\frac{\overline{\Delta^2}}{2\tau}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

erre jó mego. $p(x,t)=p(x-vt)$ fv.-ek

$\rightarrow$ „utazó" hegyek

$\rightarrow$ csomag halad és terjed!

Drude-modell

~ elektromos vezetés

- elektromos tér gyorsít
- „közegellenállás" fékez

} hamar stacionárius

$$m\ddot{x}=eE-\gamma\dot{x}$$

drift sebesség: $v_0=\frac{eE}{\gamma}$ $\gamma=\frac{m}{\tau}$ τ: relaxációs idő

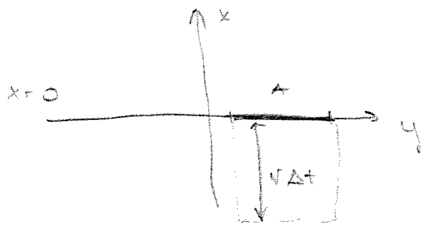
Adott felületen t idő alatt áthaladó elektronok:

$$N=v_0\cdot t\cdot A\cdot n \qquad Q=v_0 etAn \qquad I=\frac{Q}{t}=v_0 eAn$$

$$j=\frac{I}{A}=v_0 en=\frac{e^2E\tau n}{m} \qquad j=\sigma E \qquad \sigma=\frac{e^2\tau n}{m}$$ Ohm-tv.

Vezetési jelenségek, kereszteffektusok

° transzportált mennyiség: $\Psi(x)$



áthaladó részecskék száma:

$\bar v \Delta t \cdot A \cdot \frac{n}{6}$ ← minden irányba mozognak, ebb. harmada megy a ⊕ x irányba

atomonként a transzportált mennyiség: Ψ

$$\Psi(-\bar\ell) = \Psi(0) - \frac{\partial \Psi}{\partial x}(0)\cdot \bar\ell$$

sorfejtés

megkérdezni !!!

$\bar\ell$: szabad úthossz

↳ ütközések között megtett távolság

Δt idő alatt $z \cdot \Delta t$ db. ütközés

→ két ütközés között $\frac{1}{z}$ idő telik el

$$\bar\ell = \bar v \cdot \frac{1}{z}$$

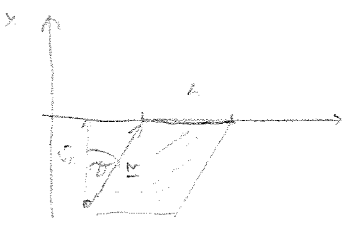
Teljes átvitt mennyiség:

$$\left[\left(\Psi(0) - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\bar\ell\right) - \left(\Psi(0) + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\bar\ell\right)\right] \bar v \cdot \Delta t \cdot A \cdot \frac{n}{6} =$$

$$= \Delta t \cdot A \left\{ \frac{n}{6}\cdot \bar v \cdot 2\bar\ell \left(-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\right\}$$

$$j_\Psi = \frac{\Psi}{\Delta t A} = \frac{1}{3} n \bar v \bar\ell \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Második levezetés



$$\underbrace{A\,\Delta t\, n\, f(v)\,d^3v}\cdot \Psi(-\bar\ell\cos\vartheta)$$

Δt idő alatt

A keresztmetszeten

v sebességgel

áthaladó atomok száma

(vimaget. $\bar\ell\cos\vartheta$-val)

Átvitt mennyiség:

$$A\,\Delta t \cdot n \int_{v_x>0} d^3v\, f(v) \underbrace{\left(\Psi(-\bar\ell\cos\vartheta) - \Psi(\bar\ell\cos\vartheta)\right)}_{-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\cdot 2\bar\ell\cos\vartheta} =$$

$$= A\cdot\Delta t\left\{-n\frac{\partial\psi}{\partial x}2\bar\tau\int_0^\infty dv\,v^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\vartheta\,\underbrace{\sin\vartheta}_{\text{int. miatt}}\cdot\underbrace{v\cdot\cos\vartheta}_{v_x}\cdot\cos\vartheta\, f(v)\right. \Rightarrow$$

$$j_\psi = A\cdot 2\pi\cdot n\cdot\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\cdot 2\bar\tau\underbrace{\int_0^{\pi/2}d\vartheta\,\sin\vartheta\cos^2\vartheta}_{\left[-\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}}\int_0^\infty dv\, f(v)\,v^3 =$$

$$= A\cdot n\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\cdot\bar\tau\cdot\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\int_0^\infty dv\,4\pi v^2\cdot f(v)}_{\bar v} = An\cdot\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\cdot\bar v\cdot\bar\tau\cdot\frac{1}{3}$$

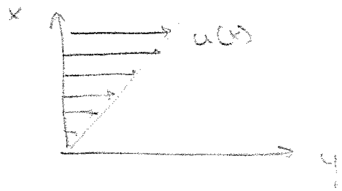
$$\boxed{j_\psi = -\frac{1}{3}n\bar\tau\bar v\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}}$$ ← ugyanaz, mint feljebb...

- hővezetés: $\psi=\varepsilon \rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x}=\underbrace{\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}}_{c_v}\frac{\partial T}{\partial x}=c_v\frac{\partial T}{\partial x}$

$$j_e = \frac{1}{3}c_v\cdot n\bar\tau\bar v\cdot\left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right) \qquad \lambda=\frac{1}{3}n\bar\tau\bar v c_v$$ ← hővezetési eh.

- viszkozitás ~ belső súrlódás → impulzustranszport

$\psi = m u(x)$



$j_{mu} = \frac{1}{3}n\bar\tau\bar v m\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right)$

$\eta = \frac{1}{3}n\bar\tau\bar v\cdot m$ viszkozitás

(adott hőmérsékleten nem függ a nyomástól)

+ kereszteffektusok

termofesz., stb.

kausztikák

$$F(x, y, p) = 0$$

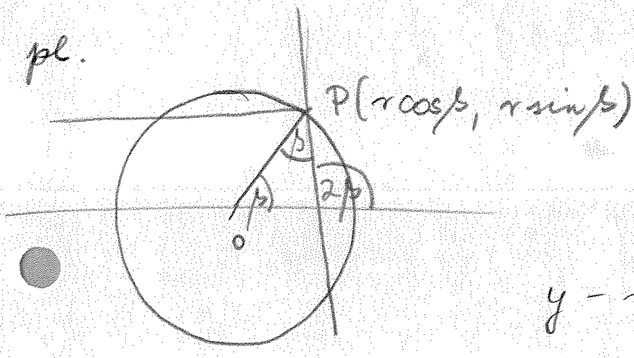
$$\frac{\partial F}{\partial p}(x, y, p) = 0$$

kiküszöböljük p-t

burkológörbe egyenlete!

(Clairut-f. diffe.)

pl.



$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \text{az e. egyenlete}$$

$$y - r\sin\beta = \mathrm{tg}\, 2\beta \cdot (x - r\cos\beta)$$

$$y\cos 2\beta - r\sin\beta\cos 2\beta = \sin 2\beta\,(x - r\cos\beta)$$

$$y\cos 2\beta - x\sin 2\beta = \underbrace{r\sin\beta\cos 2\beta - r\cos\beta\sin 2\beta}_{r\sin(-\beta) = -r\sin\beta}$$

$$\begin{cases} y\cos 2\beta - x\sin 2\beta + r\sin\beta = 0 & \Big|\ \frac{\partial}{\partial\beta} \\ -\cancel{2}y\sin 2\beta - \cancel{2}x\cos 2\beta + \frac{r}{2}\cos\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

paraméteresen könnyű megkapni

monopól/dipól tere

1) $\underline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{r}}{r^3} \qquad U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

$$\rho = \varepsilon_0\, \partial_i E_i = \ldots$$

2) $U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\underline{r}|} - \frac{1}{|\underline{r} + \underline{l}|}\right) \qquad \frac{1}{|\underline{r} + \underline{l}|} \approx \frac{1}{|\underline{r}|} - \frac{\underline{l}\,\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$

$$E = -\partial_i U \qquad \frac{1}{|\underline{r}+\underline{l}|} \approx \frac{1}{|\underline{r}|} + \underline{l}\left(\nabla \frac{1}{|\underline{r}+\underline{l}|}\right)\Big|_{\underline{l}=0}$$

multipól-sorfejtés

$$\underline{A}_\omega(x) = \frac{\mu}{4\pi}\int d^3\underline{x}' \frac{j(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

$$|\underline{x}-\underline{x}'| \sim r - \hat{r}\cdot\underline{x}'$$

$$\underline{A}_\omega(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3\underline{x}' \frac{j_\omega(\underline{x}')}{1-\frac{\hat{r}\underline{x}'}{r}} \underbrace{e^{-i\underline{k}\underline{x}'}}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\hat{r}\underline{x}'}{r}\right)^m \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-i\underline{k}\underline{x}')^n\cdot\frac{1}{n!}$$

$n=m=0$ → dipól el.

$n=1,\ m=0$ → dipól mágn. antiszimm. } részek

kvadrupól mágn. szimm.

kémiai potenciálok term. es.

$G = \mu^A n^A + \mu^B n^B$ egy komponens, két fázis

$g = \mu^A c^A + \mu^B(1-c^A)$

$dg = \mu^A dc - \mu^B dc$

$\frac{dg}{dc} = \mu_A - \mu_B \qquad g = \underbrace{g(c_0)}_{\mu_A c_0 + \mu_B(1-c_0)} + (\mu_A-\mu_B)(c-c_0)$

$g(0) = \mu_A$

$g(1) = \mu_B$

két komponens, két fázis

viriál-tétel

Euler-tétel: $f(x,y) = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\right) \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x,y)$

$K = \frac{p_i^2}{2m} \qquad 2\bar{K} = \sum_i q_i\frac{\partial H}{\partial q_i} = k\bar{V}$

$V(q_i) \Rightarrow$ k-adf.

négyesimpulzus

$\delta x|_a = 0$

$\delta x|_b = \text{változó}$

teljesül $\frac{du_i}{ds} = 0$

$$\left.\begin{aligned} \delta x|_a &= 0 \\ \delta x|_b &= \text{változó} \end{aligned}\right\} \quad \delta S = -mc\, u_\mu\, \delta x^\mu$$

$$p^\mu = -\frac{\partial S}{\partial x_\mu} = mc\, u^\mu$$

$$u_\mu u^\mu = 1$$

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$$ tömeghéj-egyenlet

variációszám

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot q, t)\, dt = 0$$

ezt nem variáljuk, csak a pályát!

kanonikus transzformáció

$$\dot Q_k = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_k} \qquad \dot P_k = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_k} \qquad W_1(q_i, Q_i, t)$$

$$p_i \dot q_i - H = P_i \dot Q_i - H' + \frac{dW_1}{dt}$$

$$\left(p_i - \frac{\partial W}{\partial q_i}\right)\dot q_i = \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i}\dot Q_i$$

$$= \left(P_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i}\right)\dot Q_i + H - H' + \frac{\partial W}{\partial t}$$

$$p_i = \frac{\partial W_1}{\partial q_i} \qquad P_i = -\frac{\partial W_1}{\partial Q_i} \qquad H' = H + \frac{\partial W_1}{\partial t}$$

+ Legendre-transzformáltak!

Friedman-egyenletek

homogén, izotróp Univ. (ha $T_{\mu\nu}$ hom. izotr.)

k: tér görbülete $+1$: pozitív görb.

adiabatikus tágulás -1: negatív görb. 0: euklideszi tér

kritikus sűrűség

állapotegyenlet

$p = w\varrho$ $\quad w_{rad} = \frac{1}{3}$ $\quad \varrho \sim$

$w_{matt} = 0$ $\quad \varrho \sim R^{-3}$

$w_{vac} = -1$ $\quad \varrho = \text{const.}$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\varrho + 3p)$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\varrho - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Ősrobbanás

kozmológiai elv: ∃ olyan KR, amelyben az Univ. homogén és izotróp

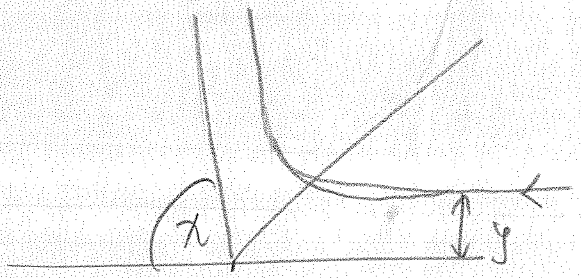
energiamegmaradás + tágulás

ált. rel. ⇒ robbanás

Bravais-cella

triklin	P	P – primitív
monoklin	P, B	I – tércentrált
rombos	P, I, F, C	F – lapc.
tetragonális	P, I	A, B, C – lappáron c.
romboéderes	R	
hexagonális	P	
köbös	P, I, F	

Rutherford-hkm.



$$dN = n\, 2\pi \rho\, d\rho \qquad d\rho = \left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\chi \longrightarrow d\Omega = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hengerszimm.}}}{2\pi} \sin\chi\, d\chi$$

$$d\sigma = \frac{dN}{n} = \frac{\rho}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\Omega$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} : \text{ diff. hkm.}$$

$$\left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\chi}{2}}\, d\Omega$$

$$r = \frac{p}{-1+e\cos\varphi} \qquad p \leftarrow \frac{L^2}{m\alpha} = \frac{m v_\infty^2 \rho^2}{\alpha} \qquad e = \sqrt{1+\left(\frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{m\rho v_\infty^2}{\alpha}\right)^2}$$

$$r \to \infty \Rightarrow \qquad e\cos\varphi = 1$$

$$\varphi_{1,2} = \pm\arccos\frac{1}{e}$$

$$\chi = \pi - (\phi_2 - \phi_1) = \pi - 2\phi_1 =$$

$$= \pi - 2\arccos\frac{1}{e}$$

$$\frac{\chi}{2} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{e} = \arcsin\frac{1}{e}$$

$$\sin\frac{\chi}{2} = \dots \to \rho(\chi) = \dots \operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}$$

$$\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin\frac{\chi}{2}}$$

$$-\frac{1}{2\sin^2\frac{\chi}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin\frac{\chi}{2}} \cdot \frac{1}{2\cancel{\cos}\frac{\chi}{2}\sin\frac{\chi}{2}} \qquad \frac{\overbrace{-\sin^2\frac{\chi}{2} - \cos^2\frac{\chi}{2}}^{-1}}{\sin^2\frac{\chi}{2}}$$

Frei Zsoltot tudjuk fejből
(jó esetben)