A Záróvizsga tételek kidolgozása

Utolsó módosítás: 2011. augusztus 23.

Üdvözlünk mindenkit, és gratulálunk azoknak, akik már eljutottak addig a pontig, hogy kezükbe vegyék e dokumentumot, s már a záróvizsgára készülnek.

Mivel úgy értesültünk, hogy a korábbi években megírt, a http://fizweb.elte.hu/, és a http://mafihe.hu/~wiki oldalakon található, kidolgozott tételek nem ölelik föl kellő mélységben a záróvizsgán elvárt anyagot, illetve megváltoztak a tételek, elhatároztuk, hogy bővítjük azokat, vagy teljesen újraírjuk őket. Döntően a mafihés tételeket bővítettük. Azért, hogy egy emberre kevesebb feladat háruljon, szétosztottuk egymás között a tételeket, így egy személyre általában egy vagy két tétel kidolgozása jutott. Álljék most itt azon emberek neve, akik az egyes tételek kidolgozását/bővítését magukra vállalták:

Somlai László Ábel:	1. A klasszikus mechanika alapjai.	
	2. A klasszikus mechanika elvei.	
Boschán Júlia:	3. Egzaktul megoldható fizikai problémák.	
Bertalan Dávid, Ábrók Levente:	5. Fenomenologikus termodinamika.	
	18. Nemegyensúlyi folyamatok leírása.	
Rudolf Ádám:	6. Elektro- és magnetosztatika, áramkörök.	
	9. Geometriai optika és alkalmazásai.	
Kőszegi Dorina:	7. Elektrodinamika.	
Bíró László:	8. Hullámegyenlet és hullámjelenségek.	
	16. Mágneses rendszerek.	
Almási Gábor:	10. A kvantumelmélet alapvető kísérletei.	
	12. Atom- és molekulaszerkezet.	
Kalmár Gergely:	13. A magfizika alapjai.	
Pocsai Mihály András:	14. A termodinamika statisztikus alapozása.	
Májer Imre:	15. Kvantumstatisztikák.	
Kőfaragó Mónika:	19. Az asztrofizika alapjai.	

Köszönjük nekik és a korábbi kidolgozóknak az áldozatos munkát!

A záróvizsga tapasztalatai alapján elmondhatjuk, hogy a felelet leginkább szóban történik, és a bizottságok jórészt egysoros képleteket vártak el. Nem a hosszú levezetések a lényegesek, hanem anekdotaszerű tények. Tipikusan egy részbe kérdeznek bele mélyebben, erről kell bővebben beszélni, viszont segítenek is a felelet közben. Nincs fölkészülési idő, hanem azonnal a diplomamunka ismertetésével és védésével kezd az ember, utána jön a tétel, amit a terembe való belépéskor mond meg a bizottság elnöke. A szakdolgozatra is a vizsgabizottság ad jegyet, általában a témavezető által javasoltat, de nem mindig. A szakdolgozat és a védés jegye 1/4-ed, a tétel jegye 1/2 súllyal számít bele a végső jegybe, szóval érdemes tanulni.

A bizottságok nem akarnak senkit megbuktatni, tipikusan a hármas és az ötös között szórtak a jegyek, de akadtak olyanok is, akiknek nem sikerült megcsinálniuk a záróvizsgát, így a készülést nem javasolt félvállról venni. Nem igaz tehát, hogy mindenki átmegy, azonban lelkiismeretes készüléssel a bukás esélye tetszőlegesen kicsire csökkenthető. Érdemes minden tételből tudni valamennyit, legalább a főbb gondolatokat, hogy senki se kaphasson olyan tételt, amiről semmit sem tud. Tudomásunk szerint minden tétel kiosztásra került, így nem érdemes arra építkezni, hogy "ez a tétel nem fontos, úgyse lesz".

A tételkidolgozások között találhatóak olyan fejezetek is, melyek a tételsorban ugyan nem szerepelnek, de a tételek megértését segítik, vagy csak egyszerűen illik őket tudni, ezeket csillaggal jelöltük. Egyszer mindenképpen érdemes lehet őket elolvasni.

Reméljük, hogy az itt következő kidolgozások hasznosnak bizonyulnak majd. Jó tanulást kívánnak e dokumentum szerkesztői, Bíró László és Kalmár Gergely.

VIII. TÉTEL: Hullámegyenlet és hullámjelenségek Bíró László

Tartalomjegyzék

1.	A hu	ıllámegyenletek	3
	1.1.	Alapfogalmak	3
	1.2.	A megoldás fajtái	3
		1.2.1. Síkhullám	4
		1.2.2. Gömbhullám	4
	1.3.	Rugalmas hullámok	5
2.	Elek	tromágneses hullámok	5
	2.1.	EM hullámok vákuumban és dielektrikumban	7
3.	Disz	perzió	8
	3.1.	Csoport- és fázissebesség	8
4.	Reta	rdált potenciálok	9
	4.1.	A potenciálok részletes levezetése	10
5.	. Doppler-eltolódás		11
6.	Hull	ámvezetők, üregrezonátorok	12
7.	. Antennák, dipólsugárzás, szórás szabad töltésen		13
	7.1.	Dipólsugárzás	13
	7.2.	Szórás szabad töltésen	13

8.	Optikai hullámjelenségek			
	8.1.	Interferencia	14	
	8.2.	Polarizáció	15	
	8.3.	Fresnel-formulák	16	
	8.4.	Diffrakció	16	
9.). Nemlineáris optika			
Iro	Irodalomjegyzék			

1. A hullámegyenletek

1.1. Alapfogalmak

A hullám egy, a térben vagy valamilyen anyagban tovaterjedő zavar. Általánosságban egy időben és térben változó függvénnyel leírható jelenség, sokszor azonban a

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u \tag{1.1}$$

hullámegyenlet megoldását tekintik hullámnak, mi is ezzel fogunk foglalkozni. A fenti egyenletben c a hullám terjedési sebessége. A megoldás láthatóan lineáris.

1.2. A megoldás fajtái

A változók szétválasztásával keressük a megoldást, ezt más néven Fourier-módszernek hívják:

$$u = X(\mathbf{r})T(t). \tag{1.2}$$

Az (1.1) egyenletbe helyettesítve:

$$\left[\Delta X(\mathbf{r})\right]T(t) = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t)\right]X(\mathbf{r}).$$
(1.3)

Leosztunk *u*-val (ha vektor, akkor a komponensenként), átszorzunk c^2 -tel, így:

$$c^2 \frac{\Delta X(\mathbf{r})}{X(\mathbf{r})} = \frac{T(t)}{T(t)}.$$
(1.4)

Akkor és csak akkor egyenlő (1.4) mindkét oldala, ha konstans. Válasszuk ezt a szeparációs állandót $-\omega^2$ -nek! Ekkor az időfüggő rész:

$$T + \omega^2 T = 0. \tag{1.5}$$

Ez egy harmonikus oszcillátor egyenlete, tehát

$$T(t) = e^{\pm i\omega t} \,. \tag{1.6}$$

A térszerű rész:

$$\Delta X + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0.$$
(1.7)

1.2.1. Síkhullám

Ha derékszögű koordinátákban írjuk ki a Laplace-t, síkhullámmegoldást kapunk:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \Rightarrow \quad X(\mathbf{r}) = e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}} \,. \tag{1.8}$$

Világos, hogy

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2},\tag{1.9}$$

ez a diszperziós reláció (lásd később). A teljes megoldás:

$$u = Ce^{i(\pm \mathbf{kr} \pm \omega t)}, \qquad (1.10)$$

ahol C egy állandó¹.

1.2.2. Gömbhullám

Ha gömbi koordinátákban dolgozunk, akkor **gömbhullám** a megoldás. A Laplace-operátornak csak a sugárirányú komponensére van szükség²:

$$\Delta_r X(|\mathbf{r}|) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} X(|\mathbf{r}|) \right] = \frac{1}{r} \left(r X'' + 2X' \right) = r X' + 2 \frac{X''}{r} = \frac{1}{r} \left(2X' + r X'' \right) .$$
(1.11)

r-rel megszorozva az (1.7) egyenletet erre jutunk:

$$(rX)'' + k^2(rX) = 0, (1.12)$$

¹Igazából 8 állandót lehet felírni, melyet a kezdeti- és peremfeltételek határoznak meg.

²Azért, mert így olyan megoldásokat kapunk, amelyben csak olyan gömbfüggvény, Y_{l0} szerepel, aminek 0 a z irányú impulzusmomentuma. Ez jó, mert a hullámegyenlet minden megoldása fölírható síkhullámokkal, azok pedig gömbhullámok szerint így fejthetőek sorba: $e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1)j_l(kr)P_l[\cos(\vartheta)], j_l$ az l. gömbi Bessel-függvény, P_l az l. Legendre-polinom.

ahol $k = \omega/c$. Ez láthatóan megint egy homogén lineáris egyenlet. Ebből a teljes megoldás:

$$u = C \frac{1}{r} e^{i(\pm kr \pm \omega t)}, \qquad (1.13)$$

az állandót és az előjeleket a peremfeltételek határozzák meg. Itt e^{+ikr}/r a kifelé, e^{-ikr}/r a befelé haladó gömbhullám (például egy gömbkondenzátor gerjesztését ez írja le). További alakokat kaphatunk, ha más koordinátarendszerekben írjuk föl a Laplace-t, de ennyi bőven elég.

1.3. Rugalmas hullámok

Ha fölírjuk a rugalmas közeg egy adott pontjára a Newton-egyenletet, és linearizáljuk azt, akkor kapjuk meg a rugalmas hullámokat:

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \operatorname{Div}(\hat{\sigma}),$$
(1.14)

ahol **f** a térfogati, $\text{Div}(\hat{\sigma}) = \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \operatorname{grad}[\operatorname{div}(\mathbf{u})]$ a felületi erősűrűség. Ha **f** állandó, akkor leválaszthatjuk az időfüggetlen részt, és ha föltesszük, hogy összenyomhatatlan a folyadék, azaz div(\mathbf{u}) = 0, a következőt kapjuk:

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = \mu \Delta \mathbf{u} \,. \tag{1.15}$$

Részletesebben lásd a 4. tételt.

2. Elektromágneses hullámok

A négy Maxwell-egyenlet:

$$\oint \mathbf{D} \,\mathrm{d}\mathbf{F} = \int_{V} \varrho \,\mathrm{d}V \tag{2.1}$$

$$\oint \mathbf{B} \, \mathrm{d}\mathbf{F} = 0 \tag{2.2}$$

$$\oint \mathbf{E} \,\mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{A} \mathbf{B} \,\mathrm{d}\mathbf{F}$$
(2.3)

$$\oint \mathbf{H} \,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{A} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}\right) \,\mathrm{d}\mathbf{F}.$$
(2.4)

Ezek differenciális alakja:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho \tag{2.5}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{2.6}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$
(2.7)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}.$$
 (2.8)

A teljesség kedvéért leírom a mennyiségek nevét is az 1. táblázatban.

.

В	mágneses indukció vagy fluxussűrűség	
Η	mágneses térerősség	
D	elektromos indukció vagy eltolásiáram-sűrűség	
\mathbf{E}	elektromos térerősség	
ρ	(elektromos) töltéssűrűség	
j	(elektromos) áramsűrűség	

1. táblázat. A Maxwell-egyenletekben szereplő mennyiségek neve

Vegyük hozzá ezekhez az anyagegyenleteket: $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Vákuumban, töltésektől és áramoktól távol, tehát ahol $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, továbbá $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, a következő alakot öltik a Maxwell-egyenletek:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \tag{2.9}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{2.10}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$
 (2.11)

$$c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}.$$
 (2.12)

Vegyük (2.12) rotációját, helyettesítsük be rot \mathbf{E} helyére \mathbf{B} -t (2.11)-ből, és (2.10)-et fölhasználva ezt kapjuk \mathbf{B} -re:

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} = 0. \qquad (2.13)$$

Hasonlóan, (2.11) rotációjából, (2.12)-ből helyettesítve, (2.9)-et felhasználva:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0. \qquad (2.14)$$

Ha bevezetjük a

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{2.15}$$

d'Alembert-operátort, akkor a (2.13) és a (2.14) egyenlet a következőképpen írható:

$$\Box \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0. \tag{2.16}$$

2.1. EM hullámok vákuumban és dielektrikumban

Ha (2.16) megoldását síkhullám alakjában keressük, azaz³:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C_1} \\ \mathbf{C_2} \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{kr} + \omega t)}, \qquad (2.17)$$

és behelyettesítjük a Maxwell-egyenletekbe, megkapjuk azok Fourier-transzformáltját:

$$\mathbf{kE} = 0 \tag{2.18}$$

$$\mathbf{kB} = 0 \tag{2.19}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \tag{2.20}$$

$$c^2 \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\omega \mathbf{E} \,. \tag{2.21}$$

(2.18)-ból és (2.19)-ből látható, hogy csak tranzverzális elektromágneses hullámok terjedhetnek vákuumban, (2.20) és (2.21) pedig azt mutatja, hogy az elektromos és mágneses tér egyszerre van jelen a hullámtérben, valamint \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{B} jobbsodrású rendszer alkot⁴. Az egyenletek lineárisak, tehát két megoldás összege is megoldás marad, sőt, végtelen sok megoldást is összeadhatunk:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{U}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{kr}-c|\mathbf{k}|t)} \,\mathrm{d}^3\mathbf{k}\,, \qquad (2.22)$$

ez a Fourier-transzformáció⁵. Igaz marad mindez dielektrikumokban, itt egyszerűen csak ki kell cserélni a permeabilitásokat, és a fénysebességet, a hullámok terjedési sebessége:

$$c_{\text{diel.}} = \frac{c_{\text{vákuum}}}{\sqrt{\varepsilon_{\text{r}}\mu_{\text{r}}}} \,. \tag{2.23}$$

 $^{^{3}\}mathrm{A}$ C₁ és C₂ állandók komplexek is lehetnek. ⁴Ha $e^{i(\mathbf{kr}+\omega t)}$ helyett $e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$ -t választunk, akkor balsodrású rendszert alkotnak.

⁵Vegyük észre, hogy csak a hullámszámtérben végezhetjük el az integrálást, mert a frekvencia függ a hullámszámtól, vagyis csak fénysebességű megoldásaink lehetnek, másrészt $\mathbf{U} \stackrel{!}{\in} L(\mathbb{R}^3)$.

A szállított energia áramsűrűségét a Poynting-vektor adja meg:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \,. \tag{2.24}$$

A következő részben megvizsgáljuk, mi történik olyan dielektrikumokban, ahol a $\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = n$ abszolút törésmutató függ a frekvenciától.

3. Diszperzió

A diszperzió egy hullámcsomag szétfolyását jelenti, ami kezdetben adott alakú volt, később megváltoztatja burkolóját bizonyos feltételek mellett. A további vizsgálatokhoz föl kell írni az $\omega(\mathbf{k})$ diszperziós relációt. Vákuumban egyszerű:

$$\omega = \pm c |\mathbf{k}| \,. \tag{3.1}$$

3.1. Csoport- és fázissebesség

A csoportsebesség:

$$\mathbf{v}_{\rm g} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}},\tag{3.2}$$

a fázissebesség:

$$v_{\rm ph} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \,. \tag{3.3}$$

A csoportsebesség vektor, tehát ω -nak **k** szerinti gradiensét kell venni. Ez szabja meg az energia terjedésének irányát, és mindig kisebb vagy egyenlő, mint a vákuumbeli fénysebesség. A csoportsebesség a hullámcsomag maximumának haladási sebessége, ezen túl nem bír valódi fizikai tartalommal. Vákuumban

$$\mathbf{v}_{g} = c \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$
 illetve $v_{ph} = c$, (3.4)

azaz

$$|\mathbf{v}_{\rm g}| = v_{\rm ph} \,. \tag{3.5}$$

Ha azonban $n = n(\omega)$ és $\omega = \frac{c}{n} |\mathbf{k}|$, úgy

$$\mathbf{v}_{\rm g} = \frac{c_{\overline{k}}^{\mathbf{k}}}{n + \omega_{\overline{\partial \omega}}^{2n}}.$$
(3.6)

Előfordulhat olyan eset, hogy $n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega} < 1$, de ekkor sem terjedhet gyorsabban a jel a vákuumbeli fénysebességnél. Ez az anomális diszperzió, bizonyos kristályok az elnyelési csúcsok közelében viselkednek így. A fázissebesség kiszámítása változatlan, képlete más:

$$v_{\rm ph} = \frac{c}{n} \,. \tag{3.7}$$

Tehát akkor változik a hullámalak, ha a törésmutató változik ω függvényében.

4. Retardált potenciálok

Mivel a mágneses indukciónak nincs divergenciája [lásd (2.10)], ezért azt az elektromágneses vektorpotenciál rotációjaként írhatjuk föl:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \,. \tag{4.1}$$

Ekkor (2.11)-be helyettesítve, azt átrendezve kapjuk:

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$
(4.2)

Ha viszont egy vektor rotációja tűnik el, fölírhatjuk azt egy skalármező negatív gradienseként:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \Phi \,. \tag{4.3}$$

A mérhető mennyiségeket tehát így vezethetjük vissza potenciálokra:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{4.4}$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \,. \tag{4.5}$$

A potenciálok egy skalárfüggvény erejéig határozottak, azaz

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi \tag{4.6}$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{4.7}$$

ugyanazon \mathbf{E} és \mathbf{B} tereket írja le, mint \mathbf{A} és Φ , ez a mértékinvariancia. A Maxwell-egyenletek invariánsak erre a mértéktranszformációra. A potenciálokat, mint majd látni fogjuk, a töltések és áramok eloszlása határozza meg.

4.1. A potenciálok részletes levezetése

Általános esetre vezetem le, tehát amikor töltések és áramok is találhatóak a térben. Hogy megkönnyítsük a számolást, válasszuk a

div
$$\mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$
, (4.8)

ún. Lorenz-mértéket⁶! Tekintsük a (2.12) egyenletet, szorozzuk be μ -vel:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$
(4.9)

Helyettesítsük a terek helyébe a potenciálokat:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mu \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{grad} \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \,. \tag{4.10}$$

A rot rot = grad div – div grad vektoranalitikai azonosságot elvégezve, a jobb oldalon álló $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ tagot átvíve a túloldalra, a grad div-es tagba beleírva

$$\underbrace{\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)}_{= 0 \text{ a Lorenz-mérték miatt}} -\Delta\mathbf{A} = \mu\mathbf{j} - \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\mathbf{A}}{\partial t^{2}}.$$
(4.11)

Ezek után átvisszük a jobb oldalon álló **A**-s tagot tartalmazó tagot balra, bevezetjük a d'Alembert-operátort és készen is vagyunk:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j}$$
(4.12)

$$\Box \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j} \,. \tag{4.13}$$

Most az elektrosztatika Gauss-törvényéből induljunk ki [(2.9)]!

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon} \,. \tag{4.14}$$

Fejezzük ki E-t a potenciálokkal:

div
$$\left(\operatorname{grad}\Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$
. (4.15)

Gyakoroljuk a fizikus művészetét: szúrjunk be 0-t két ellentétes előjelű $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ tag segítségével!

$$\Delta \Phi + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}}_{= 0 \text{ a Lorenz-mérték miatt}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon}.$$
(4.16)

 $^{^{6}}$ Ludvig Lorenz dán fizikusról van elnevezve, nem pedig Hendrik Antoon Lorentz holland kollégájáról.

El is készültünk:

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$
(4.17)

$$\Box \Phi = -\frac{\varrho}{c}. \tag{4.18}$$

Az ilyen egyenleteket d'Alembert-egyenleteknek hívják. A megoldásuk a következő:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \,\mathrm{d}^{3}\mathbf{r}'$$
(4.19)

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \frac{\varrho\left(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \qquad (4.20)$$

ahol $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$, és d³**r** pedig a térfogatelem, tehát skalár. Ezekhez a megoldásokhoz egyébként hozzáadhatunk egy síkhullámot is, csak ennél a fölírásnál nem szokás, de az 5. fejezetben majd azt használjuk. Ha **j** illetve ρ argumentumába **r**', $t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}$ -t írunk, a **retardált** potenciált kapjuk, **r**', $t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}$ előjellel pedig az **avanzsált** potenciált. Azért a – jelet tettem fölülre, mert nekünk ez kell, ez tudja az okságot (kauzalitás). Az időfüggés azért ilyen, mert a tér egy pontjában a potenciálok az áram- és töltéssűrűségek eloszlásának korábbi állapota szerint fejlődnek, úgy, hogy az információ éppen a közegben érvényes fénysebességgel ér el az adott pontba. (Az avanzsált potenciálnál pont a jövőből érkezik az adat.) A (4.19) és (4.20) egyenletek csak homogén és izotróp közegekben érvényesek.

5. Doppler-eltolódás

Ezt legegyszerűbben a speciális relativitásból érthetjük meg. Ha bevezetjük a $j^k = (c\varrho, \mathbf{j})$ négyes-áramsűrűséget és az $A^k = (c\Phi, \mathbf{A})$ négyespotenciált, akkor (2.13) és (2.14) így írható, töltésektől és áramoktól távol $(j^k = 0)$:

$$\partial_l \partial^l A^k = 0. (5.1)$$

A megoldása:

$$A^m = C^m e^{ix_l k^l}, (5.2)$$

ahol $k^l = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ a négyeshullámszám. Ez a Lorentz-transzformáció szerint változik, ha mozgó rendszerből nézzük (lásd 1. tétel). Gyakorlatilag ez a Doppler-eltolódás.

6. Hullámvezetők, üregrezonátorok

A hullámvezető egy üreges fémcső, amiben az elektromágneses hullámok haladhatnak, viszonylag kis csillapítással. A mindkét végén zárt hullámvezető az üregrezonátor. Tegyük fel, hogy a hullámvezető z irányban végtelen! Ekkor a benne lévő terek ebben az irányban harmonikusan változnak, azaz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}(x, y) \\ \mathbf{E}(x, y) \end{pmatrix} e^{i(\pm kz + \omega t)} .$$
(6.1)

Mivel nincsenek benn sem töltések, sem áramok, a (2.16) d'Alembert-egyenletbe helyettesíthetjük őket. Az időfüggést és z-függést egyszerűen megkapjuk, a Laplace x és y irányú, tranzverzális $\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ része marad meg:

$$\left[\Delta_t + \left(\varepsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right] \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} = 0.$$
(6.2)

Ez egy sajátértékegyenlet. Ideális vezetők belsejében (tehát a cső vagy az üreg fémfalában) nincsen sem elektromos, sem mágneses tér. A Maxwell-egyenletek határfeltételeiből tudjuk, hogy két közeg határán az elektromos térerősség tangenciális (\mathbf{E}_{\parallel}) és a mágneses indukció merőleges komponense (\mathbf{B}_{\perp}) megy át folyamatosan, a másik komponensek ugranak. Ezeknek tehát el kell tűnniük a tökéletes vezető falánál, így a határfeltételek:

$$\mathbf{E}_{z}|_{S} = 0$$
 és $\frac{\partial \mathbf{B}_{z}}{\partial n}\Big|_{S} = 0.$ (6.3)

A határfeltételek⁷ megkvantálják a megoldásokat, tehát csak bizonyos frekvenciájú hullámok terjedhetnek a hullámvezetőben (van levágási frekvencia), az annál kisebb frekvenciájúak ki fognak halni. Nyilván különböző sajátértékeket kapunk az elektromos és a mágneses térre.

- A transzverz elektromos (TE) hullámoknál $\mathbf{E}_z = 0$ mindenhol,
- a transzverz mágnesesnél (TM) $\mathbf{B}_z = 0$ mindenhol.
- Ha mind $\mathbf{E}_z = 0$, mind $\mathbf{B}_z = 0$, transzverz elektromágneses (TEM) hullámokról beszélünk.

Az első kettőnél eggyel kevesebb határfeltételt kell kielégíteni, az utolsónál az egyiket sem. Érdemes megjegyezni, hogy a fázissebesség nagyobb a fénysebességnél, levágási frekvencián végtelen. Az üregrezonátorban állóhullámok alakulhatnak ki, ezek az adott üregrezonátor módusai. A Föld is egy nagy üregrezonátor, a villámlások gerjesztik az ionoszféra rezgéseit, a frekvenciákat viszonylag jól sikerült leírni elméletileg is.

 $^{^7\}mathrm{Ez}$ utóbbi egy bonyolult egyenletből számítható ki, de így van.

7. Antennák, dipólsugárzás, szórás szabad töltésen

Az antenna egy olyan eszköz, ami elektromágneses hullámokat sugároz a térbe egy áramkörből, illetve a hozzá érkező hullámok teréből feszültséget indukál az áramkörben. A legegyszerűbb egy dipólantenna, ami két, azonos hosszúságú, egymással párhuzamos fémrúd vagy drót, középen megtáplálva.

7.1. Dipólsugárzás

Vegyünk egy dipólantennát, tápláljuk meg ω körfrekvenciájú gerjesztéssel! Ha a dipólsűrűsége $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}$, akkor a töltéssűrűség és az áram:

$$\varrho = -\operatorname{div} \mathbf{p} \tag{7.1}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}.$$
 (7.2)

Ezeket a retardált potenciálokba helyettesítve hosszadalmas és egyáltalán nem triviális átalakítások után⁸ (melyeket a nyájas olvasóra bízunk), nagyságrendileg és az irányfüggést elhanyagolva ilyet kapunk:

$$|\mathbf{E}| \sim \underbrace{\frac{p_0}{r^3}}_{r^3} + \underbrace{\frac{p_0\omega}{cr^2}}_{cr^2} + \underbrace{\frac{p_0\omega^2}{c^2r}}_{r^3}$$
 (7.3)

(sztatikus) dipóltér polarizációs áram tere sugárzási tér

$$|\mathbf{B}| \sim 0 + \underbrace{\frac{p_0 \omega}{c^2 r^2}}_{\text{áram mágneses tere}} + \underbrace{\frac{p_0 \omega^2}{c^3 r}}_{\text{sugárzási tér}}.$$
 (7.4)

Attól függően, hogy milyen közel vagyunk az adóhoz, három részre osztjuk a teret: közeltérre ($r \ll \lambda$), középtérre, és távoltérre ($r \gg \lambda$). Nyilván távol csak az 1/*r*-es tagok maradnak meg. Az antenna erősen szögfüggően sugároz: a saját egyenesében egyáltalán nem, arra merőlegesen a legerősebben, az 1. ábra mutatja a kvalitatív képet. A Poyntingvektor radiálisan kifelé mutat, $1/r^2$ -es a lecsengése, a szögfüggése a terekéhez hasonló. A kisugárzott teljesítmény a frekvencia negyedik hatványával arányos ($P \sim \omega^4$).

7.2. Szórás szabad töltésen

Elektromágneses szóródás akkor jön létre, amikor egy töltésrendszerre elektromágneses hullám érkezik, és az megrezgeti a töltéseket (\mathbf{p} elektromos, és \mathbf{m} mágneses dipólusokat indukál). Ekkor a mozgó töltések rezgésbe jönnek, és maguk is sugározni kezdenek

⁸A dipólsugárzás egy sorfejtés első tagjából származtatható, a második a kvadrupólsugárzás.



1. ábra. A dipólantenna sugárzási tere.

(dipólsugárzás ez is). Ennek eredményeként a bejövő sugárzás energiájának egy része a beeséstől különböző irányban sugárzódik ki. Az összes energia azonban megmarad, így rugalmas szórásról beszélhetünk. Ha ezek a szórócentrumok a hullámhosszhoz képest kis méretűek, akkor Rayleigh-féle szórásról beszélünk. Tetszőleges méretre a Mie-féle szóráselmélet ad leírást, ennek speciális esete a Rayleigh-féle leírás. A szabad töltésen való szóródást Thompson-szórásnak hívják. Megint a retardált potenciálokkal dolgozva, harmonikus külső teret föltételezve, a szórt tér Poynting-vektora:

$$P \sim \frac{1}{r^2} \frac{e^4}{m^2} |\mathbf{E}_{\rm be}|^2 ,$$
 (7.5)

a szögfüggése is a már ismertetett. A szóródás hatáskeresztmetszete viszont független a bejövő tér frekvenciájától, a Rayleigh-szórással ellentétben, ahol $\sigma \sim \omega^4$. Tehát a kék fény sokkal jobban szóródik a vörösnél, ezért kék az ég. A szórás következtében polarizálódik a fény, erről a 8.2. fejezetben beszélünk.

8. Optikai hullámjelenségek

8.1. Interferencia

Két síkhullám találkozásakor a térmennyiségek tekintetében semmi különleges nem történik, hiszen a Maxwell-egyenletek lineárisak, így mindkét hullám létrehozza saját hatását, és ezek összegződnek. Azonban a megfigyelhető intenzitások (és energiák) az amplitúdók négyzetével arányosak, és a négyzetek nem adódnak össze. A hullámok összegének négyzetremelésekor marad egy vegyes tag, ami a síkhullámok fáziskülönbéségtől függ. Attól függően, hogy a hullámok milyen fázisban találkoznak, erősíthetik, vagy gyengíthetik egymást, azaz a megfigyelt intenzitás nagyban változhat. Ezt a jelenséget nevezzük interferenciának. Ahhoz, hogy tartós interferenciát tudjunk megfigyelni, a következő feltételeknek kell teljesülniük:

- Azonos frekvenciájú legyen a két hullám. Másképp a vegyes tag időátlaga (két koszinusz szorzatának időintegrálja) közel nulla lesz.
- Ne legyen merőleges a polarizáció, azaz minél hasonlóbb polarizációjú hullámokat ejtsünk egybe.
- A fényforrásokból kibocsájtott hullámfrontok fáziskülönbsége legyen állandó időben. Random fázistényező esetén az interferenciális hatások kiátlagolódnak, és nem látunk interferenciát.

Ez utóbbi feltételt koherenciafeltételnek is nevezhetjük. Vagy lézerekkel, vagy egy koherens hullámvonulat kettéosztásával, majd egyesítésével teljesíthető. Először Young figyelte meg úgy az interferenciát, hogy tudta, mi okozza, de a Newton-gyűrűk is szép példái. A holográfiában alkalmazzák, vizsgálati módszerként is jelentős: ha az elektromágneses hullám eltérő közegeken halad át, fázistolást szenved, ami szintén interferenciához vezet, ezt használják ki az interferométerekben: Michelson–Morley-, Fabry–Perot-interferométer.

8.2. Polarizáció

Tekintsük a (2.14) d'Alembert-egyenlet egy megoldását, egy vákuumban, z irányban terjedő síkhullámot:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} A\cos(kz - \omega t) \\ B\cos(kz - \omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$
 (8.1)

Láthatóan a φ szög határozza meg, hogy merre mutat a térerősség vektora.

- Ha $\varphi = 0$ vagy $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, végig ugyanabban az irányban oszcillál, de lehet pozitív, vagy negatív is, ez a **lineáris** polarizáció.
- Ha $\varphi = \frac{\pi}{2}(+n\pi)$ és A = B, akkor **cirkulárisan**;
- egyébként a többi szögre és amplitúdóra elliptikusan.

Bizonyos kristályokkal lehet polarizálni a fényt, illetve kihasználhatjuk az eltérően polarizált módusok visszaverődését is (lásd 8.3. fejezet). A Faraday-effektus során a stacionárius mágneses térbe helyezett anyagon áthaladó fénynek elfordul a polarizációs síkja. Királis molekulák is elforgatják azt, az elfordulás szögéből is mérhető a koncentrációjuk.

8.3. Fresnel-formulák

Ha síkhullám érkezik két eltérő közeg határára, a normálistól mért ϑ_1 szöggel, akkor részben megtörve továbbhalad ϑ_2 irányszöggel, részben visszaverődik. A folyamatot a Snellius–Descartes-törvény írja le:

$$n_1 \sin(\vartheta_1) = n_2 \sin(\vartheta_2), \qquad (8.2)$$

 n_1 és n_2 a törésmutató. A hullámokat föl kell bontani a beesési síkban (||, TM) és arra merőlegesen (\perp , TE) **lineárisan** polarizált komponensekre (ez minden hullámnál megtehető), mert ezek eltérően viselkednek, az eltérő határfeltételek miatt. A visszavert és megtört hullámok amplitúdóját (r és t) írják le a Fresnel-formulák:

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= \frac{n_1 \cos(\vartheta_1) - n_2 \cos(\vartheta_2)}{n_1 \cos(\vartheta_1) + n_2 \cos(\vartheta_2)} \\ t_{\perp} &= \frac{2n_1 \cos(\vartheta_1)}{n_1 \cos(\vartheta_1) + n_2 \cos(\vartheta_2)} \\ r_{\parallel} &= \frac{n_2 \cos(\vartheta_1) - n_1 \cos(\vartheta_2)}{n_2 \cos(\vartheta_1) + n_1 \cos(\vartheta_2)} \\ t_{\parallel} &= \frac{2n_1 \cos(\vartheta_1)}{n_2 \cos(\vartheta_1) + n_1 \cos(\vartheta_2)}. \end{aligned}$$

A Fresnel-formulák a Maxwell-egyenletek határfeltételeiből számíthatók ki. Nyilván $r^2 + t^2 = 1$. A TM módusnál állhat elő olyan helyzet, hogy nincsen visszavert hullám egy adott beesési szögnél, ez a Brewster-szög:

$$\vartheta_{\rm B} = \operatorname{arctg}\left(\frac{n_2}{n_1}\right).$$
(8.3)

8.4. Diffrakció

A diffrakció hullámok szétterülése vagy elhajlása résen való áthaladást követően vagy egy akadály élei körül. Az eltérült hullámok azután interferálnak egymással, egyes tartományokban erősítik, máshol gyengítik egymást. Elvileg meg tudnánk oldani a Maxwellegyenleteket, de helyette a Huygens–Fresnel-elvet használjuk közelítésként: A fény akadállyal való találkozása során a hullám az akadály helyén zérus amplitúdót vesz fel, a határfelület minden pontja pedig gömbforrásként tekintendő. A tovahaladó hullám a sok gömbhullám szuperpozíciója. A skalárelmélet alapintegrálja:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \int_{S} U(\mathbf{r}) \frac{e^{ikR}}{R} \cos(\vartheta) \,\mathrm{d}^{2}\mathbf{r} \,, \tag{8.4}$$



2. ábra. Magyarázat a diffrakciós integrálhoz.

ahol $R = |\mathbf{r} + \mathbf{R}_0|$ (lásd 2. ábra) és d²**r** a felszínelem, tehát skalár.

Ez a P pontban adja meg az eredő intenzitást. Az e^{ikr} -es szorzó a lényeges, ennek megválasztásától függ, hogy milyen diffrakciót vizsgálunk. A Fresnel-diffrakció a réssel szemben, tetszőleges távolságból érvényes illetve közel, akármilyen szögben:

$$U(P) \sim \int_{S} U(\mathbf{r}) \frac{1}{R_0} e^{i\frac{2k}{R_0}r^2} d^2\mathbf{r}.$$
 (8.5)

A Fraunhofer-diffrakció a réstől távol és ferdén nézve jó:

$$U(P) \sim \int_{S} U(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \,\mathrm{d}^{2}\mathbf{r}\,, \qquad (8.6)$$

ez a Fourier-optika alapja. A többiről Cserti József Optika és relativitáselmélet jegyzetében (5. anyagrész) lehet olvasni [1].

9. Nemlineáris optika

A közeg polarizációja továbbá nem csak az irányfüggésben lehet bonyolult, hanem a dielektromos állandó, és ezen keresztül a törésmutató térerősségfüggésében. Ez azt jelenti, hogy kellően nagy energiájú sugár (lézerfény) megváltoztatja a közeget maga körül, és ez utána visszahat a saját terjedésére. Ezt a terjedést és visszahatást a nemlineáris optika tárgyalja, itt a szuszceptibilitáshoz magasabb rendű korrekciókat is figyelembe kell venni.

Ilyen hatással lehet például a zöld lézert előállítani: egy megfelelő kristályra vörös lézerfénnyel világítva felharmonikusokat generál, többek között a zöldet is, amit aztán egy másik anyaggal ki lehet szűrni és csak ez látszik (háromhullám-keverés).

Ha a sugár energiája kicsi, de mi kapcsolunk külső erős sztatikus teret a közegre, akkor ugyanígy befolyásolhatjuk a terjedést, ez az elektrooptika. A térerősség első hatványával történő megváltozás a Pockels-effektus, a négyzetével arányos a Kerr-effektus. Ezt például az LCD-kijelzőknél használják.

További effektusok az optika jegyzetben találhatóak (9. anyagrész), pl. önfókuszálás. Érdekesség még: az optikai szálakban alaktartó optikai szolitont alkalmaznak.

Irodalomjegyzék

- [1] Cserti József: Optika és relativitáselmélet jegyzet, 2011, online elérhető: http://complex.elte.hu/~cserti/oktatas.php
- [2] E. M. Lifsic, L. D. Landau: Elméleti fizika II. (Klasszikus erőterek) Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1988
 VI. fejezet: Elektromágneses hullámok
- [3] John D. Jackson: Klasszikus elektrodinamika Typotex Kft., Budapest, 2004
- [4] Richard Fitzpatrick: Classical Electromagnetism (internetes jegyzet), 2011: http://farside.ph.utexas.edu/teaching/em/lectures/

XIII. TÉTEL: A magfizika alapjai

Kalmár Gergely

Tartalomjegyzék

1.	Röv	id történeti bevezetés (*)	21
2.	. Az atommagok tulajdonságai		
	2.1.	Kísérleti előzmények (*)	22
	2.2.	Az atommagfizikában használatos mennyiségek, jelölések	23
	2.3.	Az atommagok tömege	23
	2.4.	Az atommagok mérete	24
	2.5.	Az atommagok kötési energiája	25
	2.6.	Tömegdefektus	26
3.	Ato	nmag-modellek	26
	3.1.	A Thomson-modell és a Rutherford-modell (*) $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	26
	3.2.	A cseppmodell	27
	3.3.	A félempírikus kötési formula	27
4.	Az i	zotóp térkép	28
5.	Ene	rgia és tömeg ekvivalencia	29
	5.1.	A relativisztikus tömeg	29
	5.2.	Az energia és tömeg ekvivalenciája	29
6.	Mag	hasadás, magfúzió	30

7.	Radi	oaktivitás	31
	7.1.	A radioaktivitás felfedezése, törvényszerűségei (*)	31
	7.2.	Radioaktív bomlások típusai	32
	7.3.	Radioaktív családok (*)	35
	7.4.	Magátalakulások	35
8.	Sugá	rzás és anyag kölcsönhatása	35
	8.1.	A Bethe–Bloch-formula	36
	8.2.	Az elektron energiavesztesége	39
	8.3.	Semleges részecskék és anyag kölcsönhatása	40
9.	A St	andard Modell	41
	9.1.	A Standard Modell előzményei (*)	41
	9.2.	Elemi részecskék	42
	9.3.	Alapvető kölcsönhatások	43
10	. Kísé	rleti eszközök	44
	10.1.	Detektorok	44
	10.2.	Részecskegyorsítók	45
Irc	odalor	njegyzék	45

1. Rövid történeti bevezetés (*)

A magfizika kezdetét leggyakrabban az atommag felfedezéséhez kötik¹ (Rutherford, 1911). Természetesen számos kísérleti előzmény vezetett ezen alapvető felfedezéshez, ahogyan az lenni szokott, a következőekben ezeket tekintjük át.

A történet Heinrich Geißler német fizikussal kezdődött, aki 1857-ben megalkotta a **Geißler-féle vákuumcsövet**. Ez egy alacsony gáznyomású, elektromos kisülési cső volt, azaz a benne lévő gáz a csőre kapcsolt feszültség hatására ionizálódott, s a cső így adott színnel világított (a neoncsövek őse). Ezt fejlesztette tovább **William Crookes**, úgy, hogy két elektródát helyezett el a csőben, minek következtében a természetes ionizációból származó elektronok a pozitív elektróda felé gyorsulhattak. Az így létrejövő sugárzást nevezték **katódsugárzásnak** (minthogy akkor még nem tudták, hogy ezek elektronok). A katódsugárzás ezt követő alapos vizsgálata számtalan fontos felfedezéshez vezetett, mint amilyen például a Röntgen-sugárzás, vagy az elektronok léte, tulajdonságai.

Eközben 1896-ban **Henri Becquerel** felfedezi a **radioaktivitást**, majd 1898-ban **Marie Curie** kémiai receptet ad arra, hogyan lehet **rádiumot** kivonni az uránszurokércből, lehetővé téve így a radioaktív preparátumok előállítását. Ekkor lép a színre **Ernest Rutherford**, aki a radioaktív sugárzást az áthatolóképesség alapján alfa és béta sugárzásra osztja. Ezután hamarosan megméri az alfa-részecskék töltését, majd az alfa-sugárzást vákuumcsőre irányítja, és a kisülésben megjelenő hélium-színképvonalakat látva felfedezi, hogy az alfa-részecske a hélium atommagja (1907).

Végül, e kozmikus szimfóniát teljessé téve, vékony arany fóliát bombáz alfa-részecskékkel (1909), s a kísérlet eredményét elemezve arra a következtetésre jut, hogy az atom tömege a teljes térfogatának igen kis töredékében koncentrálódik, amely pozitív töltésű, s e körül elektronok keringenek (1911). Amint azt látni fogjuk, e **naiv atommodell** számtalan sebből vérzett, ámde felismerte az atommag létét, mely mérföldkőnek bizonyult az elemi részecskék s a mai tudásunkat összegző Standard Modell felé vezető úton.

 $^{^1\}mathrm{A}$ kísérlet részletes tárgyalását lásd: 10. tétel

2. Az atommagok tulajdonságai

2.1. Kísérleti előzmények (*)

Noha Rutherford már 1911-ben felfedezte az atommagot, azt akkor még nem lehetett tudni, hogy az atommag miből és hogyan épül fel. Ehhez további kísérletekre volt szükség, melyekben **Rutherford** továbbra is jelentős szerepet játszott. Így például 1919-ben nitrogént bombázott alfa-részecskékkel, s ekkor szcintillációs detektorán hidrogén-ionokra jellemző jeleket figyelt meg. Valójában Rutherford ezzel elvégezte a világ **első magátala-**kítását: ¹⁴N + $\alpha \rightarrow$ ¹⁷O + p, s felfedezte a **protont**.

Patrick Blackett ezen magátalakításról készített ködkamrás felvételei azt is felfedték, hogy a hidrogén-ion az atommagból szakad ki, azaz a proton az atommag egyik **alkotóré**sze (1923). Az **atomok tömegét** ekkorra **Francis William Aston** tömegspektroszkópiai vizsgálatai nyomán már ismerték, és azt is tudták, hogy ezek közel egész számok. Így például ismert volt, hogy a ¹⁴N tömege a hidrogén tömegének 14-szerese, amiből arra lehetett következtetni, hogy a nitrogén atommagja 14 protonból áll. Azt is tudták, hogy az atomhéjon 7 elektron van, így ahhoz, hogy a nitrogénatom összességében semleges legyen, 7 negatív töltés, azaz elektron kellett még az atommagba. Ezzel az **atommodellel** azonban még mindig voltak **problémák**, például helytelen eredményekre vezetett az atomok spinjét illetően, továbbá az atommagnak a protonok taszítása nyomán szét kellett volna esnie. Szükség volt tehát még valamire, ami ezeket az anomáliákat képes kiküszöbölni.

1931-ben Walther Bothe és Richard Becker alfa-sugárzással könnyű elemeket (lítium, berillium, bór) sugárzott be, minek következtében egy újfajta, az eddigieknél nagyobb áthatolóképességű sugárzást fedeztek fel. Az áthatolóképesség alapján az újfajta sugárzást először gamma-sugárzásnak gondolták, azonban észrevették azt is, hogy ha ez a sugárzás paraffinra esik, akkor nagy energiájú protonok lépnek ki. Ehhez azonban a bombázó gamma-részecskék energiájának irreálisan nagynak kellene lennie, az új sugárzás így nem lehet gamma-sugárzás. James Chadwick mutatta meg, hogy egy feltételezett, a protonnal azonos tömegű, de semleges részecske (neutron) rugalmas szórásával minden kísérleti eredmény magyarázható (1932). Egy újfajta kölcsönhatás, a nukleonok (proton és neutron) között ható magerő feltételezésével az atommagok stabilitásának kérdése is megválaszolható.

A neutron felfedezésével rövid történeti áttekintésünk véget is ért, minthogy rendelkezésünkre áll az atomok minden alkotóeleme – az elektron, a proton, és a neutron.

2.2. Az atommagfizikában használatos mennyiségek, jelölések

Mielőtt rátérnénk az atommagok tulajdonságainak tárgyalására, érdemes áttekintenünk, melyek azok a mennyiségek, melyekkel a magfizikában találkozhatunk.

Az energiát leggyakrabban **elektronvoltban** szokás kifejezni, ami definíció szerint az az energia, amelyre egy elektron 1 V potenciálkülönbség befutásának hatására szert tesz. Értéke:

$$1 \,\mathrm{eV} = 1, 6 \times 10^{-19} \,\mathrm{J}$$
.

Albert Einstein speciális relativitáselmélete szerint az energia ekvivalens a tömeggel, attól csak egy állandó szorzóban tér el $(E = m_0 \cdot c^2)$, így a **tömeg** egységeként használhatjuk az eV/c^2 mennyiséget². Minthogy azonban a részecske- és magfizikában gyakran az ún. *Planck-egységek* használatosak, ahol c = 1, így a tömeget is gyakran láthatjuk eV egységekben kifejezve.

Az előzőek alapján már tudjuk, hogy az atommagot nukleonok (protonok és neutronok) alkotják, így egy adott atommag jellemzésére bevezethetjük a következő **jelölést**: ${}^{A}_{Z}X$, ahol A a tömegszám (protonok és neutronok számának összege), Z a rendszám (a protonok száma), X pedig az atommag vegyjele. (A vegyjel ismeretében a rendszámot elhagyhatjuk.) A neutronszám (N) az előbbi két paraméter ismeretében már meghatározható (N = A - Z).

Miután a következő szakaszokban más mennyiségekkel és jelölésekkel nem találkozunk, így következzék az atommagok tulajdonságainak tárgyalása.

2.3. Az atommagok tömege

Az atommagot alkotó **nukleonok nyugalmi tömegét** James Chadwick mérte meg, ezek mai értéke:

$$m_{\rm n} = 939, 6 \,{\rm MeV/c^2}$$

 $m_{\rm p} = 938, 3 \,{\rm MeV/c^2}$.

Amint az látható, a két nukleon tömege majdnem pontosan azonos, mely észrevétel a kvarkok felfedezésének szempontjából alapvető jelentőségű lesz. Minthogy az atomok tömege jórészt az atommagban koncentrálódik, így azt mondhatjuk, hogy az atomok tömege jó közelítéssel az atommagban lévő nukleonok tömegével azonos. A kölcsönhatási energia – amint azt látni fogjuk – a nukleonok tömegénél tipikusan néhány nagyságrenddel kisebb, így ettől jelen esetben eltekinthetünk.

 $^{^2\}mathrm{Az}$ energia-tömeg ekvivalenca összefüggésének levezetését lásd: 5. fejezet.

Az atomok tömegét **atomi tömegegységekben** (u) szokás megadni, mely megállapodás szerint a ¹²C-atom tömegének 12-ed része:

$$1\,{
m u}=931,5\,{
m MeV/c^2}$$
 .

Az atomok/atommagok tömege tehát **nagyságrendileg** a GeV/c^2 tartományba esik.

2.4. Az atommagok mérete

Az atommagok esetén megkülönböztethetjük az elektromos és a nukleáris magsugarat. Az **elektromos magsugarat** például nagyenergiájú elektronszórás segítségével határozhatjuk meg, míg a **nukleáris magsugárra** az anomális Rutherford-szórás alapján következtethetünk.

Az elektronszórás-kísérletek eredményei azt mutatják, hogy az atommag sűrűsége az atommagok közepénél állandó, azaz nem függ a tömegszámtól, s a stabil atommagok esetén meg is egyezik. Az atommagoknak azonban nincs éles határa, diffúz szélük van. A mérések alapján azt mondhatjuk, hogy a tömeg $\approx 90\%$ -a egy 2,3 fm sugarú gömbben található. Az atommagok sűrűségeloszlását jól leírja a **Woods–Saxon-alak**:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-r_0)/a}}$$

Az atommagok említett diffúz széle miatt nem adhatunk pontos értéket a magsugárra, azonban az atommagok méretének jellemzésére bevezethetjük az ún. **ekvivalens magsugarat**, mely definíció szerint azon egyenletes sűrűségű gömb sugara, melyre a sugár négyzetének várható értéke azonos az adott sűrűségeloszláshoz tartozó sugár négyzetének várható értékével. Az ekvivalens magsugár a nagyenergiájú elektronszórási kísérletek alapján: $R_{EQ} = 1, 2 \,\mathrm{fm} \cdot A^{1/3}$.

Anomális Rutherford-szórásról akkor beszélünk, ha az ütköző atommagok összeérnek. Ahhoz, hogy megmérjük a nukleáris magsugarat, adott szögben mérve egyre nagyobb bombázó energiákat kell alkalmaznunk, mindaddíg, amíg egymáshoz nem ér a két atommag. Ezen mérések alapján az ekvivalens magsugár: $R_{EQ} = 1, 4 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$.

A csekély különbséget a kétféle módszerrel kapott eredmény között a kölcsönhatások különbözősége (elektromos–nukleáris) okozza. Összességében elmondhatjuk, hogy az atommagok térfogata a tömegszámmal (A) arányos, hasonlóan, mint egymás érintő tömör golyók esetén, sugaruk pedig **nagyságrendileg** néhány femtométer (fermi).

2.5. Az atommagok kötési energiája

Az atommagok kötési energiáját az **egy nukleonra jutó kötési energiával** jellemezhetjük. Ezt a következőképpen határozhatjuk meg:

$$E_k = \frac{(Z \cdot m_p + N \cdot m_n - m) \cdot c^2}{A}, \qquad (2.1)$$

ahol Z a rendszám, m_p a proton tömege, N a neutronszám, m_n a neutron tömege, m az atommag tömege, c a fénysebesség, A pedig a tömegszám. A különböző atomokra vonatkozó nukleáris kötési energiákat az 1. ábrán láthatjuk.



1. ábra. Különböző atomokra vonatkozó nukleáris kötési energiák.

Az ábra alapján megállapíthatjuk, hogy a nukleononkénti kötési energia (a kis magok kivételével) **kb. 8 MeV**. Látható, hogy a legerősebben kötött mag a vas (⁵⁶Fe). A vas környékét szokás **vas-tónak** is nevezni, minthogy a magátalakulások efelé törekednek. A vasnál kisebb rendszámú elemek esetén tehát a magfúzió, míg a nagyobb rendszámú elemek esetén a maghasadás folyamata a jellemző³.

 $^{^{3}\}mathrm{A}$ folyamatok részletesebb tárgyalását lásd: 6. fejezet.

2.6. Tömegdefektus

A (2.1) egyenletet átrendezve a következő kifejezést kapjuk:

$$m \cdot c^2 = (Z \cdot m_{\rm p} + N \cdot m_{\rm n})c^2 - E_k$$

Ezt vizsgálva látható, hogy az atommag tömege **kisebb**, mint az őt alkotó nukleonok tömegének összessége, hiszen a kötési energia levonódik a nukleonok tömegének összegéből. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben a kötött állapot energetikailag kedvezőbb, mint amikor a nukleonok szabadon vannak. Ezzel magyarázható az is, hogy az energiaminimum felé törekvés során az elemek a legnagyobb kötési energiájú állapotot igyekeznek elérni, hiszen a kötött rendszer összenergiája ekkor a legalacsonyabb.

Azt a jelenséget tehát, amikor egy rendszer össztömege kevesebb, mint a rendszert alkotó elemek tömegének összege, tömegdefektusnak nevezzük.

3. Atommag-modellek

A kísérleti felfedezések által egyre többet tudtunk meg az atommagról, ennek folytán az atomot leíró modellek is fejlődtek. E fejezetben a legfontosabb modelleket tekintjük át.

3.1. A Thomson-modell és a Rutherford-modell (*)

Joseph John Thomson 1897-ben mérte meg az elektron fajlagos töltését, és felfedezte, hogy a korpuszkulák tömege független attól, hogy milyen anyagból jöttek ki. Ezek alapján építette fel atommodelljét: elektronok pozitív töltésű "**pudingban**". E modellt a Rutherford-féle szóráskísérletek cáfolták, ugyanis ha az atom tömege valóban nagyjából homogén módon oszlana el a rendelkezésre álló térfogatban, a szóráskísérletek során jóval kevesebb nagy szögben szóródó részecskét kellett volna tapasztalniuk.

Ernest Rutherford így kísérletei alapján arra következtetett, hogy az atom tömege annak csupán igen kicsiny térfogatában, **az atommagban** található. E körül elektronok keringenek. E modell sem tudta megmagyarázni azt, hogy a protonok miért nem távolodnak el egymástól, és az energia sem volt kvantumos benne, viszont felismerte az atommag létét, és magyarázni tudta a szóráskísérletek eredményeit.

3.2. A cseppmodell

A cseppmodell az eddig tárgyalt atommagra vonatkozó kísérleti ismeretek összességének figyelembe vételével jött létre. E modellben az atommagot nukleonok (protonok és neutronok) alkotják, miközben a **maganyag sűrűsége állandó**, akár egy folyadék esetén (kb. 10¹⁷ kg/m³). A nukleonokat a **magerő** tartja össze. A magerő **rövid hatótávolságú**, és csak a szomszédok között hat. A távoli nukleonokat így nem vonzza, nagyon közel pedig taszító. (Hasonlóan a Van der Waals erőhöz.) A protonok között elektromágneses kölcsönhatás van.

E modell nagyon sikeres, mert több száz atommag tömegét képes leírni 5 paraméterrel, 4%-nál pontosabban. Hiányossága azonban, hogy csak az atommagok tulajdonságait magyarázza, az elektronokat és az ehhez kapcsolódó jelenségeket nem írja le, továbbá nem ad magyarázatot az ún. mágikus számokra sem⁴.

3.3. A félempírikus kötési formula

A cseppmodellben a **kötési energiát** az ún. félempírikus kötési formula adja meg, melyet Carl Friedrich von Weizsäcker vezetett be:

$$E_k = a_V \cdot A - a_S \cdot A^{2/3} - a_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \cdot \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta(A,Z)$$

ahol A a tömegszám, Z a rendszám, a_V , a_S , a_C , a_A pedig paraméterek. A formula egyes tagjait intuitíve is megérthetjük, így érdemes egy kicsit diszkutálni ezt. Az első tag az ún. térfogati tag: az atommag térfogata a cseppmodell alapján egyenesen arányos a nukleonok számával, s minthogy a szomszédok számát állandónak feltételezzük, így a nukleonok számának (azaz az atommag térfogatának) növelésével egyenes arányosságban növekszik a kölcsönhatási energia is. A második tag az ún. felületi tag: minthogy az atommag felületén lévő nukleonoknak nincs minden irányban szomszédja, így valójában a kötési energia kevesebb ahhoz az esethez képest, mint amikor minden irányban rendelkeznek szomszéddal. Ez a tag tehát egyenesen arányos az atommag felületével, azaz $A^{2/3}$ -dal. A harmadik tag a Coulomb-kölcsönhatást jellemzi: a protonok közötti taszító hatás arányos a protonpárok számával, és fordítottan arányos a közöttük lévő távolsággal $(A^{1/3})$. A negyedik tag az ún. szimmetrikus tag: a protonok és neutronok számának különbségével arányos. Az utolsó tag a párkölcsönhatás következtében szükséges, ugyanis a kötési energia nagyobb páros protonszám és páros neutronszám, mint páratlan protonszám és páratlan neutronszám esetén. Látható, hogy a formula az atommagra vonatkozó **empirikusan** (kísérletileg) talált törvényszerűségeket foglalja össze.

⁴A mágikus számokról részletesebben például a [2] jegyzetben lehet olvasni.

4. Az izotóp térkép

Izotópoknak az azonos rendszámmal, de különböző tömegszámmal rendelkező magokat nevezzük.

Kísérleti tapasztalataink alapján létrehozhatjuk az izotóp térképet, melynek vízszintes tengelyén a neutronszámot, függőleges tengelyén pedig a protonszámot tüntejük fel. Ekkor az egyes izotópoknak egy pont felel meg. A természetben előforduló izotópok ez esetben egy jól meghatározott területen helyezkednek el, amint azt a 2. ábra is mutatja.



2. ábra. Az izotóp térkép.

A térképen a sárga szín az alfa-bomló atommagokat, a fekete a stabil atommagokat, a piros a β^+ , a kék pedig a β^- -bomló magokat jelöli⁵. Látható, hogy a stabil atommagok a 45 fokos egyenes körül találhatóak, azaz a stabil magok esetén a protonok és neutronok száma közel azonos. Az izotóp térkép stabil magokat tartalmazó részét nevezik a **stabilitás völgyének**. A nagyobb tömegszámok irányába haladva a 45 fokos egyenestől némi eltérést tapasztalhatunk, a nehezebb atommagokban ugyanis tipikusan több neutron található, mint proton. Ennek az az oka, hogy a magerő a nehezebb magok esetén már csak így képes a Coulomb-taszítást kompenzálni. Látható az is, hogy az izotóptérkép széle "csipkés", ezt a már említett párkölcsönhatás okozza.

 $^{^5\}mathrm{A}$ bomlások típusairól később lesz részletesebben szó.

5. Energia és tömeg ekvivalencia

Már említettük, hogy a speciális relativitáselmélet értelmében az energia és a tömeg ekvivalensek, közöttük a fénysebesség négyzete teremt kapcsolatot. E fejezetben ezt az összefüggést vezetjük le, Richard P. Feynman nyomán [1].

5.1. A relativisztikus tömeg

A hivatkozott műben a szerző belátja⁶, hogy a **tömeg a sebesség növekedtével nem marad állandó**, hanem a következő összefüggésnek megfelelően változik:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\tag{5.1}$$

ahol m_0 a test nyugalmi tömege, v a sebessége, c pedig a fénysebesség. Terjedelmi megfontolások alapján e képletet itt nem bizonyítjuk, hanem ismertnek tételezzük fel.

5.2. Az energia és tömeg ekvivalenciája

A fenti összefüggést felhasználva könnyen eljuthatunk a híres egyenlethez, mely a test energiája és tömege közötti ekvivalenciát állítja. Tekintsük például a molekulák mozgását egy kis gáztartályban. A gáz melegítésével a molekulák sebessége megnő, így tömegük is megnő, a gáz tehát nehezebb lesz. Az (5.1) egyenlet hatványsorba fejtésével alacsony sebességek esetén közelítő összefüggést kaphatunk a tömegnövekedés kifejezésére:

$$m_0 \cdot (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2}v^2/c^2 + \frac{3}{8}v^4/c^4 + \dots \right) \,.$$

Látható, hogy a sor kisv-re gyorsan konvergál, azaz az első két-három tag után álló tagok elhanyagolhatók. Ekkor:

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2 \left(\frac{1}{c^2}\right) \,. \tag{5.2}$$

A fenti kifejezésben a jobb oldali második tag fejezi ki a molekulák sebessége által okozott tömegnövekedést. Minthogy v^2 a hőmérséklet növekedésével arányosan nő, így azt mondhatjuk, hogy a tömegnövekedés a hőmérséklet növekedésével arányos. Mivel azonban ez a tag a régi, newtoni értelemben vett mozgási energia, így azt is mondhatjuk, hogy az összes

⁶Lásd: [1] 16. fejezet

gázmolekula tömegének megnövekedése egyenlő a mozgási energia növekedése osztva c^2 -tel, azaz:

$$\Delta m = \Delta W_{kinetikus}/c^2 \,. \tag{5.3}$$

A fenti észrevétel vezette Einsteint arra az elképzelésre, hogy valamely test tömegét egyszerűbben fejezhetjük ki, ha azt mondjuk, hogy a tömeg a teljes energiatartalom osztva c^2 -tel (az (5.3) összefüggéshez hasonlóan), szemben a nem különösebben intuitív (5.1) képletettel. Az (5.2) egyenletet átalakítva a következő összefüggést kapjuk:

$$mc^2 \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 \, .$$

Ezen összefüggést a fentieket figyelembe véve értelmezhetjük úgy, mintha a bal oldali tag a test teljes energiáját fejezné ki, miközben a jobb oldali második tag a mozgási energia szokásos kifejezése. Az m_0c^2 tagot ennek fényében tekinthetjük úgy, mint a test teljes energiájának egy részét, ez a **nyugalmi energia** néven ismert belső energia. Ezek alapján egy nyugalomban lévő test energiája többé nem nulla (ahogyan az a potenciálmentes térben nyugvó newtoni tömegpont esetén lenne), hanem a következő összefüggésnek tesz eleget:

$$E = m_0 \cdot c^2 \, .$$

Ezzel a kívánt összefüggést beláttuk.

6. Maghasadás, magfúzió

Maghasadás során a nagy atommagok széthasadnak, hogy ezáltal kedvezőbb energiaállapotba kerüljenek. A hasadás történhet spontánul, vagy indukált módon (termikus neutronokkal). A mag általában két részre hasad, és létrejönnek ún. késő neutronok is, melyek további hasításra képesek. A késő neutronok nagyon fontosak például az atomreaktorok vezérlése szempontjából, ezek teszik lehetővé a láncreakció szabályozását.

A hasadványok tömege a 2:3 arányhoz van közel, de széles tartományban változik, hasadásról hasadásra is. A **felszabaduló energia** ~ 200 MeV körüli. Az ún. kritikus tömeg felett a neutronok már nem szöknek el túl nagy arányban, így képesek önfenntartó láncreakcióra (atomreaktorok, atombomba). Az alkalmazásokban a leggyakrabban használt izotópok a ²³⁹Pu és az ²³⁵U.

A magfúzió a maghasadás folyamatának az ellenkezője: kis rendszámú atommagok egyesítésével kedvezőbb energiaállapot hozható létre, ezáltal a folyamatban ugyancsak energia szabadul fel. A fúzió fontos szerepet játszik a csillagok energiatermelésében, s folynak a fúzió erőművi alkalmazását célzó kutatások is.

7. Radioaktivitás

7.1. A radioaktivitás felfedezése, törvényszerűségei (*)

A radioaktivitás felfedezésének technikája a véletlen, és némi fotopapír volt.

Henri Becquerel 1896-ban alapvetően egészen más témán dolgozott. Azt vizsgálta, vajon van-e köze a foszforeszkáló anyagoknak és a röntgensugárzásnak egymáshoz. Ehhez fekete borítékban lévő fotopapírra helyezett foszforeszkáló anyagokat, és így vizsgálta, mi történik. Minden eredménye negatív lett, kivéve az uránsók esetén végzett kísérleteit. Az uránsók viszont előzetes megvilágítás nélkül is befeketítették a borítékba helyezett fotopapírt! Így fedezte tehát fel Becquerel a radioaktivitást.

A radioaktivitás modern felfogása szerint a radioaktív anyagban a bomlások függetlenek, és a bomlás valószínűsége független az atommag életkorától (örökifjúság). Ezek alapján a dt idő alatt elbomló atomok száma binomiális eloszlást követ:

$$p(n) = \binom{N}{n} p_1^n (1-p_1)^{N-n},$$

ahol N a mintában lévő atomok száma, $p_1 = \lambda dt$ pedig egy atom dt idő alatti elbomlásának valószínűsége. Ha $N \to \infty$, miközben $p_1 \cdot N$ állandó, akkor a binomiális eloszlás ezen határesetben a Poisson-eloszláshoz tart, azaz:

$$p(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}} \,,$$

ahol $\bar{n} = p_1 \cdot N$, a dt idő alatt elbomló atomok számának várható értéke. A részecskék számának változása így dt idő alatt:

$$dN = -\bar{n} = -p_1 \cdot N = -N \cdot \lambda \cdot dt$$

ahol λ egy atom egységnyi idő alatti elbomlásának valószínűsége. Ezek alapján felírható az egyszerű bomlás differenciálegyenlete:

$$\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dT}} = -\lambda N$$

melynek megoldása:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

7.2. Radioaktív bomlások típusai

A radioaktív bomlásokat az adott bomlás során szerepet játszó kölcsönhatás, valamint a hasonló jellegű bomlások közös jellemzői alapján különböző csoportokba sorolhatjuk.

Alfa-bomlás. Az alfa-bomlás során az atommagból ${}^{4}\text{He}^{++}$ atommag lökődik ki. Ennek megfelelően a tömegszám 4-gyel, a rendszám pedig 2-vel csökken. A bomlásban tipikusan 4 – 10 MeV energia szabadul fel, melyet jórészt az alfa-részecske visz el.

Miért éppen alfa-részecske távozik az atommagból? Nos, azért, mert ez a részecske nagyon erősen kötött, így a rendszer összességében energetikailag kedvezőbb állapotba kerülhet, ha egy erősen kötött alfa-részecskét bocsát ki. Ezzel szemben egy kevésbé kötött, vagy egy szabad részecske kibocsátása általában energetikailag nem lehetséges, vagy legalábbis igen kicsi a valószínűsége.



3. ábra. Az atommag potenciálgörbéje – közelítőleg.

Az alfa-bomlás **mechanizmusát** George Gamow dolgozta ki, 1928-ban. E szerint az alfa-részecske a 3. ábrán látható potenciálgödörben mozog, ahonnan **alagúteffektussal** képes kilépni. Ezután a Coulomb-taszítás miatt eltávolodik az atommagtól, s kilökődik az atomból. A precíz levezetés azt is megmutatja, hogy a kijövő alfarészecske energiája rendkívül drasztikusan függ az alagutazás valószínűségétől (ami pedig a felezési idővel hozható összefüggésbe), mégpedig a következő összefüggés szerint (**Geiger–Nuttall-törvény**):

$$\lambda = \exp\left(-a_1 \cdot \frac{Z}{\sqrt{E}} + a_2\right) \,,$$

ahol $T_{1/2} = \ln 2/\lambda$, a_1 és a_2 paraméterek, Z a rendszám, E pedig a kijövő alfa energiája.

A Geiger–Nuttall-törvény tehát azt foglalja magában, hogy a sok nagyságrendet átfogó felezési idők igen kis különbségeknek felelnek meg a kisugárzott alfa-részecskék energiájában.

Mindezek alapján elmondható, hogy az alfa-részecskék **jól meghatározott energiával** rendelkeznek, azaz adott elem alfa-bomlásának energiaspektrumában mindig egy éles csúcsot találhatunk. (A Heisenberg-féle határozatlansági reláció következtében azonban ez a csúcs sem Dirac delta, hanem rendelkezik egyfajta természetes vonalszélességgel.)

- Béta-bomlás. A béta-bomlás során proton alakul át neutronná (vagy fordítva), miközben egy elektron (vagy pozitron), valamint egy elektron-neutrínó (vagy egy anti-elektronneutrínó) jön létre. A béta-bomlást különböző szinteken tárgyalhatjuk: atommagszinten, nukleon-szinten, valamint kvark-szinten. Ezek alapján a béta-bomlás két típusát⁷ különböztethetjük meg:
 - Negatív béta-bomlás:

A folyamat Feynman-gráfja:

e

 $\bar{\nu}_e$

Atommag szinten:	${\rm ^{14}C} \rightarrow {\rm ^{14}N} + e^- + \tilde{\nu}_e$	
Nukleon szinten:	$n \to p + e^- + \tilde{\nu}_e$	\$~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
Kvark szinten:	$d \to u + e^- + \tilde{\nu}_e$	₩ ⁻
		d

• Pozitív béta-bomlás:



Amint az a Feynman-diagramok alapján is látható, a béta-bomlásban a gyenge kölcsönhatás játszik szerepet⁸. Fontos megjegyezni, hogy a kibocsátott elektron (vagy

⁷A semleges áramról most nem ejtünk szót, minthogy a semleges áram esetén nem történik átalakulás. ⁸Részletesebben lásd: 9. fejezet. pozitron), és a neutrínó nem volt az atommag része, hanem a bomlási energiából keletkezik. A kísérleti tapasztalatok azt mutatják, hogy a kijövő elektronnak **folytonos energiaspektruma** van. A béta-bomlás során a rendszám eggyel változik, miközben a tömegszám állandó marad. Az izotóp térképen ennek megfelelően a stabilitás völgyétől lejjebb lévő atommagok negatív béta-bomlással, a feljebb lévő atommagok pedig pozitív béta-bomlással törekednek a stabil állapot felé.

Gamma-bomlás. A gamma-bomlásnak az atommagok energiaszintjei között elektromágneses átmeneteket nevezzük. Az átmenet többféle módon megvalósulhat: megtörténhet, hogy az atommag szimplán kibocsát egy fotont (gamma-sugárzás), de megtörténhet az is, hogy a legkülső elektronhéjon lévő elektron viszi el a mag gerjesztési energiáját, s így kilökődik (belső konverzió). Ha a gerjesztési energia kellően magas, akkor párkeltés is történhet, ez esetben elektron-pozitron párok keltődnek és bocsátódnak ki (melyeket azután felhasználhatunk például PET-vizsgálatokhoz).

A gamma-bomlás során fontos megjegyezni, hogy az atommag a foton kibocsátásakor az impulzusmegmaradás miatt némiképp visszalőködik, így a kisugárzott fotont egy másik mag általában nem tudja elnyelni, mivel az energiája így egy kicsivel kevesebb, mint a gerjesztési energia volt.

Az alfa- és béta-bomlást gyakran gamma-bomlás is követi, minthogy az előbbi bomlások esetén legtöbbször nem alapállapoti atommagra történik a bomlás, hanem gerjesztett állapotra. Az említett sugárzások közül a gamma-sugárzás **hatótávolsága** a legnagyobb, míg az alfa-sugárzásé a legkisebb.

- **Hasadás.** A maghasadásról már volt szó⁹, így e szakaszban csak a legfontosabb jellemzőket ismételjük át. Spontán hasadás viszonylag kevés izotóp esetén fordul elő (például a ²⁵⁴Cf esetén), jellemzőbb, hogy indukált hasadás történik. A hasadás főként a nehéz magokra jellemző. E folyamat során az anyaelem tipikusan két hasadvány-atommagra hasad, melyek a stabilitás völgyétől lejjebb helyezkednek el az izotóptérképen, azaz negatív béta-bomlók. A hasadás során keletkezett részecskék tömegszám-eloszlása kétcsúcsú. Az alfa- és béta-bomláshoz képest egy nagyságrenddel több energia szabadul fel ($\approx 200 \,\mathrm{MeV}$).
- Nukleon-emisszió. Esetenként előfordulhat, hogy protonok vagy neutronok lökődnek ki a magból spontán módon, proton- vagy neutronfelesleg esetén, például hasadási termékeknél. Ebből származnak a késő neutronok, melyek – amint azt már említettük – az atomreaktorok esetén játszanak fontos szerepet. Nagyon ritkán előfordulhat, hogy nehéz atommag (például ¹⁴C) lökődik ki az atommagból, ennek azonban elenyészően csekély a valószínűsége.

⁹Lásd: 6. fejezet
7.3. Radioaktív családok (*)

Amint az láttuk, a bomlások során a tömegszám vagy néggyel csökken (alfa-bomlás), vagy nem változik (béta- és gamma-bomlás). Ezek alapján az izotópokat négy különböző családba sorolhatjuk, a tömegszám néggyel való osztásának maradékai szerint. A családok között a bomlások szempontjából nincs átjárhatóság, azaz a bomlási láncok tagjai mindig benne maradnak az anya radioaktív családjában. A mesterséges elemek (melyek például hasadáskor, vagy neutronbefogással keletkeznek), valamint bomlásaik oldalágakon csatlakoznak a családokba. A radioaktív családok:

Család	Anyaelem	Az anyaelem felezési ideje
Tórium-sor (4k)	232 Th	14,1milliárd év
Neptúnium-sor $(4k+1)$	$^{237}\mathrm{Np}$	2,1millió év
Urán-sor $(4k+2)$	$^{238}\mathrm{U}$	4,5milliárd év
Aktínium-sor $(4k+3)$	$^{235}\mathrm{U}$	0,7 milliárd év

A természetes neptúnium-sor a Föld története során már elbomlott, minthogy felezési ideje néhány millió év, miközben a Föld története hozzávetőlegesen néhány milliárd évre nyúlik vissza. Látható továbbá az is, hogy az urán 235-ös izotópja a ritkább, szemben az urán 238-as izotópjával, melynek felezési ideje közel hétszerese a 235-ös izotópénak.

7.4. Magátalakulások

Amint azt láthattuk, a radioaktív bomlások során az elemek képesek más elemekké alakulni, alfa- és béta-bomlás, vagy maghasadás (esetleg nukleon-emisszió) segítségével. A magátalakulások bizonyos körülmények között spontán módon is végbemennek, de reaktorokban vagy részecskegyorsítókban e folyamatokat indukálhatjuk is.

A magátalakulások tárgyalásának alapját ily módon az izotóp-térkép, valamint a már tárgyalt bomlási ismeretek szolgáltathatják.

8. Sugárzás és anyag kölcsönhatása

E fejezetben a töltött és a semleges részecskék anyaggal való kölcsönhatását tárgyaljuk. Először a nehéz töltött részecskék esetét vizsgáljuk meg részletesen, és ennek kapcsán levezetjük a Bethe–Bloch-formulát.

8.1. A Bethe–Bloch-formula

A **nehéz töltött részecskék** (például alfa-részecske) az anyag elektronjainak adják át energiájukat. Tekintsük a 4. ábrát, és számítsuk ki, az elektron mellett elhaladó (nehéz) részecske mennyi energiát veszít. Az ionizációs energiaveszteség kiszámításához néhány közelítéssel élünk:

- Feltételezzük, hogy a nehéz részecske pályája egyenes.
- A sebessége állandó ($\Delta v \ll v$).
- Az elektron nem mozdul el $(\Delta r_e \ll b)$.



4. ábra. Nehéz töltött részecske energiavesztesége.

Az ábra alapján felírhatjuk:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \Delta p = F \Delta t \Rightarrow \int \vec{F} \, \mathrm{d}t = \Delta \vec{p}$$

Minthogy azt feltételeztük, hogy a nehéz részecske sebessége állandó, így $\int F_{\parallel}\,\mathrm{d}t=0$. Ekkor:

$$p_{e} = \int F_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ke^{2}Z_{\alpha}}{r^{2}} \cdot \cos\phi dt = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{ke^{2}Z_{\alpha}}{r^{2}} \cdot \frac{r}{v} d\phi =$$
$$= \frac{ke^{2}Z_{\alpha}}{v} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\phi}{r} = \frac{ke^{2}Z_{\alpha}}{v \cdot b} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\phi d\phi = \frac{2ke^{2}Z_{\alpha}}{v \cdot b}.$$

A meglökött elektron energiája:

$$E_e = \frac{p_e^2}{2 \cdot m_e} = \frac{4 \left(ke^2\right)^2 Z_{\alpha}^2}{2 m_e v^2 b^2} = \frac{2 \left(ke^2\right)^2 Z_{\alpha}^2}{m_e v^2 b^2}$$

Tegyük fel, hogy az anyagban az elektronok közel homogén módon oszlanak el, ez esetben az anyagon áthaladó nehéz részecskétől különböző távolságra lévő atomok különböző mértékben ionizálódnak. Adott b távolságra lévő elektronok egy hengerpalást mentén helyezkednek el, így tehát az elektronok száma b impakt paraméternél:

$$N(b) = n \cdot 2\pi b \cdot \mathrm{d}b \cdot \mathrm{d}x.$$

Ezek alapján a nehéz részecske energiavesztesége dx úthossz-egységenként:

$$dE(b) = -N(b) \cdot E_e = n \cdot 2\pi b \cdot db \cdot dx \cdot \frac{2k^2 e^4 Z_{\alpha}^2}{m_e b^2 v^2}.$$

Ekkor a teljes energiaveszteség megtett úthossz-egységenként:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = -\frac{n \cdot 4\pi k^2 e^4 Z_\alpha^2}{m_e v^2} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{\mathrm{d}b}{b} = -\frac{n \cdot 4\pi k^2 e^4 Z_\alpha^2}{m_e v^2} \cdot \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}.$$

Minthogy $b_{max}/b_{min} = \sqrt{E_{min}/E_{max}}$, így:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = -\frac{n \cdot 4\pi k^2 e^4 Z_{\alpha}^2}{m_e v^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{E_{min}}{E_{max}}$$

Mivel E_{min} a legkisebb impakt-paraméterhez (frontális ütközés) tartozó energiaátadás, megállapíthatjuk, hogy $E_{min} = 2m_e \cdot v^2$, hiszen az elektronnak az ütközés után legfeljebb 2v sebessége lehet. Hasonlóan állíthatjuk, hogy $E_{max} = I$ (ionizációs energia), mert ennél kisebb energiát nem lehet átadni.

Így a **Bethe–Bloch-formula**:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = -\frac{n \cdot 4\pi k^2 e^4 Z_\alpha^2}{m_e v^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{2m_e v^2}{I}.$$

A mínusz előjel abból adódott, hogy a nehéz részecske energiája **csökken** a távolsággal (miközben az elektron energiája növekszik). A precízebb kvantumelektrodinamikai számításokban az 1/2-es faktor hiányzik, továbbá egyéb relativisztikus korrekciókat is figyelembe véve a következő végső összefüggés adódik:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = -\frac{n \cdot 4\pi k^2 e^4 Z_{\alpha}^2}{m_e v^2} \cdot \left(\ln\frac{2m_e v^2}{I} - \ln(1 - v^2/c^2) - v^2/c^2 - p\right) \,,$$

ahol p a polarizációs tag.

Mit kell **mindenképpen megjegyeznünk** a Bethe–Bloch-formulából? A képlet alapján látható, hogy az ionizációs energiaveszteség a részecske **töltésének négyzetétől** (Z^2), valamint **sebességnégyzetétől** (v^2) függ. Érdemes megjegyezni, hogy az energiaveszteség **nem függ** az ionizáló részecske **tömegétől**. A relativisztikus korrekciókat is tartalmazó Bethe–Bloch-formula menetét láthatjuk az 5. ábrán.



5. ábra. Energiaveszteség a Bethe–Bloch-formula alapján.

A Bethe–Bloch-formula alapján felírhatjuk a nemrelativisztikusan mozgó részecske esetére közelítőleg érvényes **skálatörvényt**:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \approx const \cdot \frac{Z^2}{v^2}$$

Minthogy nemrelativisztikus esetben:

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 \approx \frac{1}{2} \cdot A \cdot M_{nukleon} \cdot v^2 \Rightarrow \frac{E}{A} \sim v^2,$$

ahol ${\cal A}$ a tömegszám, így:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \sim \frac{Z^2 A}{E} \,.$$

A skálatörvény alapján közelítőleg meghatározhatjuk egy adott nehéz (töltött) részecske hatótávolságát:

$$R = \int_{0}^{R} dx = \int_{E_{0}}^{0} \frac{dx}{dE} dE = -\int_{0}^{E_{0}} \frac{1}{\frac{dE}{dx}} dE \sim \frac{1}{Z^{2}A} \int_{0}^{E_{0}} E dE = \frac{E_{0}^{2}}{Z^{2}A}.$$

8.2. Az elektron energiavesztesége

Az elektron esetén a nehézrészecske-közelítés már nem alkalmazható a Bethe–Blochformula levezetése során, így a számolás komplikáltabb. Az elektron ráadásul tipikusan relativisztikus, és azonos részecske a közegbeli elektronokkal, ami tovább nehezíti a számításokat. Minthogy az elektron tömege jóval kisebb, mint egy nehéz, töltött részecske tömege, így a **fékezési sugárzás** is jelentős. Összességében elmondható, hogy az ionizációs és a sugárzási energiaveszteségre fennállnak a következő összefüggések:

$$\frac{\mathrm{d}E_{sug}}{\mathrm{d}x} = const \cdot E \cdot Z_{k\ddot{o}zeg}^2,$$
$$\frac{\mathrm{d}E_{ion}}{\mathrm{d}x} = const \cdot Z_{k\ddot{o}zeg}.$$

Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy nagy energiájú részecskék esetén mindenképp a fékezési sugárzás dominál. Ha egy adott közegben a közegbeni fénysebességnél gyorsabban mozgó töltött részecske halad, akkor **Cserenkov-sugárzás** is fellép. A sugárzást a közeg bocsájtja ki, a 6. ábrán látható módon.



6. ábra. A Cserenkov-sugárzás.

Az ábra alapján felírható, hogy:

$$\sin \alpha = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v} = \frac{c_0}{nv} \,.$$

Ha $v \approx c_0$ (ultrarelativisztikus eset), akkor:

$$\sin \alpha \approx \frac{1}{n}$$

8.3. Semleges részecskék és anyag kölcsönhatása

Az egyes semleges részecskék különböző módokon hatnak kölcsön az anyaggal. E fejezetben ezeket a jelenségeket tárgyaljuk, röviden.

- **Neutronok.** A neutronok kétféle módon hathatnak kölcsön az anyaggal: egyrészt szóródhatnak rugalmasan az anyagban lévő atomokon, más részről pedig magreakciókat indukálhatnak ($E \geq 3 \,\mathrm{MeV}$ esetén).
- **Neutrínók.** A neutrínók a gyenge kölcsönhatás segítségével hathatnak kölcsön az anyaggal, melyet a 7.2-es fejezetben már tárgyaltunk. Ekkor például a következő reakciók eshetnek meg: $\tilde{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$, vagy: $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$. (Ezeket a béta-bomlásnál található reakcióegyenletek átrendezésével kaphatjuk.) Az első esetben az így létrejövő pozitronok azután annihilálódnak, minek következtében két jól meghatározott energiával rendelkező annihilációs foton sugárzódik ki, melyet már mérhetünk is.
- **Gamma-sugárzás.** A fotonok alapvetően háromféle módon hathatnak kölcsön az anyaggal: egyrészt történhet **fotoeffektus**, amikor a foton a teljes energiáját átadja egy atomi elektronnak, kilökve azt az atomból. A foton más részről szóródhat az atom egy elektronján, ezt a folyamatot nevezzük **Compton-effektusnak**. Harmadszor, ha kellően nagy a foton energiája, történhet **párkeltés**, minek során egy elektron-pozitron pár keltődik a vákuumból. Ehhez legalább $2m_ec^2$ foton-energia kell (2 × 511 keV). A tételkidolgozás terjedelmét figyelembe véve ezen effektusokat nem vezetjük le, de azok szükség esetén megnézhetőek például a [2] jegyzetben (8. előadás)¹⁰.

Azt mindenesetre érdemes még tudnunk, hogy alacsony energián a fotoeffektus, míg nagyenergiás fotonok esetén a párkeltés a **domináns**.

 $^{^{10}\}mathrm{A}$ fotoeffektus és a Compton-effektus részletesebb tárgyalása a 10. tételben is megtalálható.

9. A Standard Modell

9.1. A Standard Modell előzményei (*)

Természetesen a magfizikai kutatások nem álltak meg a proton és a neutron felfedezése után sem, az egyre növekvő energiájú részecskegyorsítók segítségével újabb és újabb részecskéket fedeztek fel a részecskefizikusok. A buborékkamrák, ködkamrák, majd később a különféle detektorok lehetővé tették a nagyenergiás ütközések analízisét, miáltal a világot alkotó "elemi" részecskék száma néhány évtized alatt a sokszorosára nőtt. Néhány fontosabb felfedezés a harmincas évek és a hatvanas évek között:

- Carl David Anderson a kozmikus sugárzásban ködkamrájával felfedezi az első antirészecskét, a **pozitront** (1932).
- Carl David Anderson és Seth Henry Neddermeyer felfedezik a müont (1936).
- George Dixon Rochester és Clifford Charles Butler V-alakú bomlása alapján felfedezik a semleges kaont (1946).
- Cecil Frank Powell felfedezi a **pozitív és negatív pionokat** (1947).
- Jack Steinberger a Berkeley gyorsítóban felfedezi a semleges piont (1950).
- 1950-es évek: további V-részecskék felfedezése: lambda-0, szigma-hiperon, omegamínusz, stb.
- Szalay Sándor és Csikai Gyula kimutatja az elektron-neutrínót (1957).

Elméleti oldalról is számtalan fontos ötlet született, így például **Werner Heisenberg** 1932-ben felveti, hogy a proton és a neutron tömegének majdnem-egyenlő mivolta következtében hasonlítható a spinhez, amennyiben föltételezzük, hogy a proton és a neutron egyazon részecskének két különböző állapota. Ily módon bevezeti az **"izospin**" kvantumszámot, melynek Z irányú komponense a spinnel analóg módon két értéket vehet fel ("le" és "fel"), mely állapotok a protonnak (+1/2), illetve a neutronnak (-1/2) felelnek meg. Hasonló fontosságú **Paul Dirac** munkássága, aki a Dirac-egyenlet alapján megjósolja az **antirészecskék** létezését.

A számtalan új részecske rendszerezésére történő próbálkozások (barion-oktet, majd az ez alapján megállapított Gell-Mann–Nishijima-formula) vezették végül a Gell-Mann, Ne'eman, Nishijima hármast arra a felfedezésre, miszerint minden addig ismert részecske kirakható három építőelemből, három kvarkból ("up" kvark, "down" kvark, "strange" kvark)¹¹.

 $^{^{11}\}mathrm{A}$ jegyzetben a szakirodalomban előforduló angol elnevezéseket használom, minthogy a kvarkok rövidítései ezekből a szavakból származnak, így a későbbiekben a magyar elnevezések félreértésekre vezethetnének.

Ez a gondolat vezetett el végül a Standard Modellhez, mely az elemi részecskékről és a közöttük lévő kölcsönhatásokról ad felvilágosítást.

Utolsó történeti megjegyzésként érdemes megemlítenünk még a **kvarkok létezésének kísérleti igazolását**. A kvarkok létét Jerome Friedman bizonyította 1968-69-ben, mikoris a Stanfordi gyorsítóban mélyen rugalmatlan (Deep Inelastic Scattering – DIS) elektronproton szóráskísérleteket elemezve hasonló nagyszögű szórási jelenségeket tapasztalt, mint korábban Ernest Rutherford az atommag felfedezésekor.

9.2. Elemi részecskék

A Standard Modellben jelenleg tizenkét alapvető **építőelem** szerepel, hat **kvark**, valamint hat lepton. A különböző kvarktípusokat a kvarkok "**íz**" kvantumszáma különbözteti meg, mely a kvarkok tömege szerint növekvő sorrendbe állítva a következő lehet: up kvark (u), down kvark (d), strange kvark (s), charm kvark (c), bottom kvark (b), top kvark (t). A Standard Modellben szereplő hat **lepton**: elektron, elektron-neutrínó, müon, müonneutrínó, tau, és a tau-neutrínó. Az elemi részecskék táblázatát, azok tulajdonságaival a 7. ábrán láthatjuk.



7. ábra. A Standard Modellben szereplő elemi részecskék.

Ezekből a részecskékből minden jelenleg ismert összetett részecske felépíthető. Fontos megjegyeznünk, hogy a kvarkok további kvantumszámokkal is rendelkeznek, mint amilyen például a **szín kvantumszám**, melynek ízenként három komponense lehet ("piros", "kék", és "zöld"). A természetben csak olyan részecskéket detektálhatunk, melyek "**színsemlege-sek**", azaz a bennük lévő "színek" a színkeverés szabályait alkalmazva fehéret adnak.

Az összetett részecskéket megkülönböztethetjük aszerint, hogy két- vagy három kvarkból épülnek fel. A két kvarkból felépülő részecskéket **mezonoknak**, míg a három kvarkból felépülő részecskéket **barionoknak** nevezzük. A kvarkokból felépülő részecskék összefoglaló neve **hadron**. A színsemlegesség miatt a mezonokban mindig egy szín-antiszín páros található, míg a barionok esetén egy piros, egy kék, és egy zöld színű kvark foglal helyet.

Az elemi részecskék között különböző kölcsönhatások léphetnek fel. A négy ismert kölcsönhatást közvetítő részecskét is az elemi részecskék közé sorolhatjuk, ezek: a foton, a gluon, valamint a W és Z bozonok.

9.3. Alapvető kölcsönhatások

- A Standard Modellben a következő alapvető kölcsönhatások szerepelnek:
- **Erős kölcsönhatás.** Az erős kölcsönhatás a színes részecskék (kvarkok és gluonok) között hat, és a gluonok közvetítik. E kölcsönhatást a kvantumszíndinamika (QCD) írja le, mely egy lokális SU(6) szimmetriával rendelkező nem-Abeli mértékelmélet. Az erős kölcsönhatás jellegénél fogva **bezáró kölcsönhatás**, azaz a kvarkok között ható erő a távolsággal növekszik. Ez az oka annak, hogy ma már nem találunk szabad kvarkokat (**kvarkbezárás**).

Az Univerzum első néhány pillanatában, valamint nagyenergiás nehézion-ütközésekben azoban a kvarkok kiszabadulhatnak, ezt a színes állapotot kvark-gluon-plazmának nevezzük.

- Elektromágneses kölcsönhatás. E kölcsönhatást a foton közvetíti, és minden elektromosan töltött részecske részt vesz benne. Elméletét kvantumelektrodinamikának (QED) nevezzük, mely egy relativisztikus térelmélet. Jelenleg ez az elmélet adja a legpontosabb jóslatokat.
- **Gyenge kölcsönhatás.** A gyenge kölcsönhatást a W^+ , W^- , és Z^0 bozonok közvetítik, és minden fermionra hat. A kölcsönhatást közvetítő részecskék nagy tömegűek (a Higgs-mechanizmus miatt), így a kölcsönhatás **rövid hatótávolságú**. Ez az egyetlen kölcsönhatás, mely képes a kvarkok ízét megváltoztatni, és a neutrínók csak ebben a kölcsönhatásban vesznek részt.

A gyenge kölcsönhatás és az elekromágneses kölcsönhatás egyesített elméletét nevezzük **elektrogyenge** kölcsönhatásnak.

Gravitációs kölcsönhatás. A gravitációs kölcsönhatást a kvantumtérelméleti leírásokban a graviton közvetíti, és minden tömeges részecske részt vesz benne. Sajnos azonban kis távolságskálákon az elmélet feltehetően nem működik, továbbá a hipotetikus gravitont sem fedezték még fel, így e kölcsönhatást nem szokták a Standard Modell kölcsönhatásai közé sorolni.

10. Kísérleti eszközök

A mag- és részecskefizikai kísérletek elvégzéséhez általában különleges eszközökre/berendezésekre van szükségünk, minthogy a részecskefizikai folyamatok kísérleti vizsgálatához igen szélsőséges állapotokat kell létrehoznunk, nem is beszélve a különös részecskék detektálásának művészetéről. A következő fejezetben a legfontosabb detektortípusokat tekintjük át, majd a tétel lezárásaképp néhány szót ejtünk a modern részecskegyorsítókról is.

10.1. Detektorok

- A detektorokat működési elvük alapján többféle csoportra oszthatjuk.
- Gáztöltésű detektorok. A gáztöltésű detektorok általános működési elve a következő: a detektoron áthaladó részecske a detektorban lévő gázt ionizálja. Az ionizáció során leszakadt elektronok ezután a detektor elektromos terében az anódszálra gyűlnek, ahol elektromos impulzusként érzékelhetjük őket. Attól függően, hogy a detektorra kapcsolt feszültség mekkora, és ennek következtében milyen további folyamatok zajlanak a detektorban, különböző típusú gáztöltésű detektorokat említhetünk. Az ionizációs kamra esetén a detektorra kapcsolt feszültség kicsi, így a leszakadt elektronok nem tudnak tovább ionizálni. Ekkor a jel arányos az ionizációval. A proporcionális kamrák esetén a nagyobb feszültség következtében elektron-lavina alakul ki a szál közelében, melyet azután érzékelni tudunk. A Geiger–Müller-cső esetén a detektorra akkora feszültséget kapcsolunk, hogy az egész hengerben önnfentartó lavina jön létre, azaz mindig egy adott nagyságú jelet kapunk. E detektortípus nem alkalmas energiamérésre, csak érzékeny számlálásra.
- Félvezető detektorok. A félvezető detektorok esetén az áthaladó részecske hatására elektron-lyuk párok keletkeznek, melyek a rákapcsolt feszültség hatására kimennek az elektródákra, ahol aztán detektálhatjuk őket. Ezen detektorok hátránya, hogy a hőmozgás csökkentése érdekében hűteni kell őket (például folyékony nitrogénnel).
- Szcintillációs detektorok. A szcintillációs detektorok esetén az áthaladó töltött részecske a szcintillációs lapon fényfelvillanást kelt, melyet azután fotoelektron-sokszorozók segítségével erősíthetünk mérhető jellé. Fontos, hogy a szcintillátor anyaga a saját kibocsátott fotonjaival szemben átlátszó legyen. Megkülönböztethetünk szerves és szervetlen szcintillátorokat.
- Vizuális detektorok. A vizuális detektorok közé sorolhatjuk a szikrakamrát, a ködkamrát, és a buborékkamrát. A ködkamrában az áthaladó ionizáló részecskék ionokat hoznak létre, melyek jó kondenzációs magvak, így a túltelített víz- vagy alkoholgőz ezeken a részecskéken csapódik ki, láthatóvá téve így útjukat. A buborékkamrában folyadék található kicsivel a forráspont alatt, majd egy dugattyúval csökkentjük

a nyomást, minek következtében a folyadék a forráspont fölé kerül. Az áthaladó részecskék ionizálnak, körülöttük buborékok keletkeznek. Előnye, hogy 100%-os detektálási hatásfokkal rendelkezik, hátránya viszont a lassúsága.

Neutrínó detektorok. A neutrínókat a béta-bomlás során tárgyalt folyamatok fordítottja, például a $\tilde{\nu}_e + p^+ \rightarrow n + e^+$ reakció során mérhetjük (Reines–Cowan-kísérlet). Egy másik híres kísérlet Raymond Davis 1957-es kísérlete, mely során a $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$ reakcióban keletkező argon gázt detektálta, kimutatva így a kozmikus neutrínókat. Minthogy a neutrínók csak a gyenge kölcsönhatásban vesznek részt, a folyamatok hatáskeresztmetszetei rendkívül kicsik, azaz óriási detektorokra van szükség a detektálásukhoz. Napjainkban is számtalan neutrínó-detektor működik, ezek közül az ismertebbek: Kamiokande, Kamland, Sudbury, Antares.

10.2. Részecskegyorsítók

A részecskegyorsítókban elektromosan töltött részecskéket gyorsítanak nagy sebességre, elektromos tér segítségével. A részecskék fókuszálása, irányítása mágneses térrel végezhető. A gyorsítók között is többféle típust különböztethetünk meg: vannak lineáris gyorsítók, ciklotronok, szinkrotronok. A mai modern gyorsítókban több ezer *GeV*-os nyalábenergia érhető el, az ütközések során létrejövő folyamatokat pedig hatalmas detektor-óriások rögzítik. Néhány a ma is működő nagyenergiás gyorsítók közül: KEK (Japán), Tevatron (USA), RHIC (USA), LHC (Svájc).

Ezzel tételünk véget is ért, fellélegezhetünk (egy kicsit).

Irodalomjegyzék

- R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: Mai fizika II., Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [2] Veres Gábor: Mag- és részecskefizika jegyzet, 2011, online elérhető: http://atomfizika.elte.hu/magfiz/mrf.html

XIV. TÉTEL: A termodinamika statisztikus megalapozása Pocsai Mihály András

Tartalomjegyzék

1.	. Mikro- és makroállapotok				
2.	Az egyensúlyi statisztikus fizika feltevései				
3.	Az ergodikus hipotézis				
4.	A so	okaság f	ogalma, Boltzmann-entrópia	49	
	4.1.	Mikrok	anonikus sokaság	49	
	4.2.	Kanonikus sokaság			
		4.2.1.	Az egyensúly stabilitása, fluktuációk	55	
		4.2.2.	A szabadenergia néhány tulajdonsága	56	
		4.2.3.	Az ekvipartíció tétele	57	
		4.2.4.	A Maxwell-féle sebességeloszlás	58	
		4.2.5.	Klasszikus deális gáz	60	
	4.3.	Nagyka	anonikus sokaság	60	
		4.3.1.	Klasszikus ideális gáz	62	

1. Mikro- és makroállapotok

Amennyiben pontosan ismerjük egy rendszer állapotát, vagyis ismerjük minden részecske koordinátáját és impulzusát, azt mondjuk, hogy ismerjük a rendszer minden mikroállapotát. A mikroállapot értelmezése attól függ, hogy klasszikus mechanikai vagy kvantummechanikai leírást taglalunk. Előbbi esetben a mikroállapot a fázistér egy pontja, utóbbi esetben pedig a rendszer egy kvantumállapota.

2. Az egyensúlyi statisztikus fizika feltevései

2.1. Posztulátum. A magukra hagyott makroszkopikus testek elegendően sok idő után a termodinamikai egyensúly állapotába kerülnek.

Az egyensúly beállásában fontos szerepet játszanak a testben jelen lévő kölcsönhatások, az egyensúly beállása után azonban az esetek többségében a kölcsönhatások elhanyagolhatók.

2.2. Posztulátum. Egyensúlyi rendszer minden olyan mikroállapotot egyenlő valószínűséggel vesz fel, amely a róla szerzett, nem teljes információval (tipikusan a makroszkopikus állapotjelzőkkel) összeegyeztethető. Más szóval, ha a rendszerről kevesebb információnk van, mint amennyi az összes mikroállapotot lerögzítené, akkor a rendszernek több olyan mikroállapota van, amely az általunk megfigyelt makroállapotot megvalósíthatja. A rendszer ezen mikroállapotokat azonos valószínűséggel veszi fel.

3. Az ergodikus hipotézis

Vegyünk egy f szabadsági fokkal rendelkező fizikai rendszert! Ezt a rendszert a $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \equiv (p_1, \ldots, p_f, q_1, \ldots, q_f)$ általánosított koordinátákkal és kanonikus impulzusokkal jellemezhetjük. Ekkor a rendszeren értelmezett mechanikai mennyiség általában ilyen alakba írható:

$$A(t) = A(q_1(t), \dots, q_f(t), p_1(t), \dots, p_f(t)) .$$
(3.1)

Az A mennyiség *időbeli* átlagát így értelmezzük:

$$\overline{A}_t = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) \, \mathrm{d}t \,. \tag{3.2}$$

Az *ergodikus hipotézis* szerint tipikus rendszerek esetén a makroszkopikus viselkedésre csak elhanyagolható mértékben vannak hatással a kezdeti feltételek.

Tekinstük most a szóban forgó rendszer fázisterét, és értelmezzük a fázistéren a ρ sűrűségfüggvényt, amely a kanonikus koordináták és az impulzuskoordináták függvénye, vagyis

$$\varrho = \varrho(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f).$$
(3.3)

A $\varrho(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f) d^f q d^f p$ mennyiség azt mondja meg, hogy milyen valószínűséggel találjuk a rendszert a $(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f)$ állapot $d^f q d^f p$ környezetében. A sűrűségfüggvény segítségével értelmezzük A fázistérbeli átlagát:

$$\overline{A} = \int A(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) \varrho(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) \,\mathrm{d}^f q \,\mathrm{d}^f p \,. \tag{3.4}$$

Az ergodikus hipotézis értelmében, ergodikus rendszerek esetén a fázistérbeli és az időbeli átlag megegyezik, vagyis:

$$\overline{A} = \overline{A}_t \,. \tag{3.5}$$

A megmaradó mennyiségek (pl. energia, elektromos töltés, impulzus, impulzusmomentum stb.) megszabják, hogy a rendszer a fázistér mely pontjait érheti el. *Ergodikus rendszer* a fázistér bármely pontját tetszőleges pontossággal megközelítheti. Nagy rendszerek esetén ez a feltétel akkor teljesül, ha a rendszer kaotikus.

4. A sokaság fogalma, Boltzmann-entrópia

Az előző szakaszban láttuk, hogy egy makroszkopikus állapothoz általában több mikroszkopikus állapot tartozik. Egyazon makroszkopikus állapot összes lehetséges mikroszkopikus állapotainak halmazát sokaságnak nevezzük.

4.1. Mikrokanonikus sokaság

A mikrokanonikus sokaság a zárt rendszer statisztikus modellje. Alapfeltétele az ergodikus hipotézis következménye, vagyis a rendszer bizonyos megkötések mellett (energia, impulzus stb. megmaradása) az összes megengedett állapotot azonos valószínűséggel veszi fel (ez a Liouville-tétel segítségével könnyen igazolható).

Tekintsünk egy olyan zárt rendszert, amely két, egymással összemérhető nagyságú részrendszerből áll! Jelöljük a két részrendszert A-val és B-vel! Legyen pl. a rendszer térfogata, energiája, elektromos töltése, impulzusmomentuma, valamint a részrendszerekben a részecskeszám (N_A és N_B , ahol az A és B típusú részecskék nem alakulnak át egymásba) adott, és válassza el egymástól a két részrendszert egy fal! Ekkor két zárt rendszert kapunk, egyenként V_i térfogattal, E_i energiával stb. A teljes rendszer térfogata és energiája ekkor:

$$V = V_1 + V_2 (4.1)$$

$$E = E_1 + E_2. (4.2)$$

Tekintsük most azt az esetet, amikor a fal az energiára nézve áteresztő! Ekkor E_1 és E_2 időben változni fog, viszont $E = E_1 + E_2$ továbbra is állandó. Vezessük be az $\Omega_0(E, ...)$ mennyiséget, amely megadja az E energiájúnál kisebb energiájú állapotok számát:

kvantumosan:
$$\Omega_0(E,\dots) := \sum_{E_l < E} 1$$
 (4.3a)

klasszikusan:
$$\Omega_0(E,\dots) := \frac{1}{h^f N!} \int_{H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) < E} d\Gamma.$$
 (4.3b)

ahol
 ha Planck-állandó, Na részecskeszám
1, $H({\bm q},{\bm p})$ a rendszer Hamilton-függvénye, továbbá definíció szer
int

$$\mathrm{d}\Gamma := \mathrm{d}^f q \, \mathrm{d}^f p \,. \tag{4.4}$$

A fenti definíció segítségével értelmezzük az állapotsűrűséget:

$$\Omega(E,\dots) := \frac{\mathrm{d}\Omega_0}{\mathrm{d}E}.$$
(4.5)

¹Kvantummechanikából tudjuk, hogy az azonos fajtájú részecskék megkülönböztethetetlenek, ezért azon állapotok, melyek csak a részecskék sorrendjében különböznek egymástól, ekvivalensnek tekintendők, így az összesen N! ekvivalens állapotot csak egyszer kell figyelembe vennünk.

Jelölje $W(E, \delta E, ...)$ az E és $E + \delta E$ közti energiával rendelkező állapotok számát:

$$W(E, \delta E, \dots) = \Omega_0(E + \delta E, \dots) - \Omega_0(E, \dots) \approx \Omega(E, \dots) \delta E.$$
(4.6)

A teljes rendszer állapotsűrűsége a részrendszerek állapotsűrűségeinek konvolúciója (itt felhasználtuk, hogy E = const, továbbá $E = E_1 + E_2$):

klasszikusan:
$$\Omega(E) = \int \Omega(E_1)\Omega(E - E_1) dE_1$$
 (4.7a)

kvantumosan:
$$\Omega(E) = \sum_{E_1} \Omega(E_1) \Omega(E - E_1)$$
. (4.7b)

Annak a valószínűsége, hogy a rendszer az E_1 energiájú állapotban van:

$$p(E_1) = \frac{\Omega(E_1)\Omega(E - E_1)}{\Omega(E)}.$$
(4.8)

Általában $\Omega(E)$ az energiának egy igen nagy kitevőjű hatványfüggvénye, ezért $P(E_1)$ egy "tüskeszerű" függvény, amelynek egy erős maximuma van E_1^* -ban. Ez azt jelenti, hogy a rendszer közel 1 valószínűséggel tartózkodik az E_1^* energiájú állapotban, vagyis $p(E_1)$ maximumának meghatározásával a rendszer egyensúlyi feltételét határozzuk meg. $p(E_1)$ maximuma helyett $\ln p(E_1)$ maximumát is meghatározhatjuk:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_{1}} \ln p(E_{1}) \Big|_{E_{1}=E_{1}^{*}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_{1}} \left(\ln \Omega_{1}(E_{1}) + \ln \Omega_{2}(E-E_{1}) \right) \Big|_{E_{1}=E_{1}^{*}} \\
= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_{1}} \ln \Omega_{1}(E_{1}^{*}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_{2}} \ln \Omega_{2}(E_{2}^{*}) = 0 \qquad (4.9) \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_{1}} \ln \Omega_{1}(E_{1}^{*}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_{2}} \ln \Omega_{2}(E_{2}^{*}) .$$

A fenti egyenlőség az energia egyensúly feltétele a statisztikus fizikában.

Termodinamikában az energia egyensúly feltétele:

$$T_1 = T_2$$
. (4.10)

Tudjuk, hogy

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} \,. \tag{4.11}$$

Ezt felhasználva, a (4.10) feltétel az alábbi alakot ölti:

$$\left. \frac{\partial S_1}{\partial E_1} \right|_{E_1^*} = \left. \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \right|_{E_2^*} \,. \tag{4.12}$$

Szükségképpen a termodinamikai és a statisztikus fizikai egyensúlyi feltételek ekvivalensek. Ez azt jelenti, hogy az entrópia az állapotsűrűség logarimusával arányos:

$$S \sim \ln \Omega(E) \,. \tag{4.13}$$

Makroszkopikus testekre, mivel $N \sim 6 \cdot 10^{23}$, teljesül, hogy

$$\ln \Omega_0(E) \approx \ln \Omega(E) \approx \ln W(E, \delta E).$$
(4.14)

Az entrópia kifejezésében az arányossági tényezőt a legegyszerűbben úgy határozhatjuk meg, hogy az előbb leírtakat alkalmazzuk az ideális gázra:

$$\Omega_0(E) = V^N E^{3N/2} A_N \tag{4.15}$$

$$\ln \Omega_0(E) = \frac{3N}{2} \ln E + N \ln V + \ln A_N$$
(4.16)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\ln\Omega_0(E) = \frac{3N}{2} \cdot \frac{1}{E} = \frac{1}{k_B T},\tag{4.17}$$

ahol felhasználtuk, hogy ideális gáz esetén

$$E = \frac{3}{2}Nk_BT. aga{4.18}$$

Továbbá Ω_0 definíciójából következik, hogy a térkoordinátákra vett integrál (mivel f = 3N) éppen V^N . Szabad részecske esetén $E = p^2/2m$, ezért minden impulzus koordinátára vett integrál egy 3N dimenziós, $\sqrt{2mE}$ sugarú gömb térfogatát adja meg. (4.13)-ból (4.17) és (4.14) felhasználásával azonnal adódik, hogy

$$S = k_B \ln W(E, \delta E) \,. \tag{4.19}$$

Az entrópiára adott fenti kifejezést Boltzmann-entrópiának nevezzük.

Ha megengedjük, hogy a két részrendszer között a részecskeszám is kicserélődjön, vagy a fal eltolódjon ("a térfogat is kicserélődjön"), akkor az előbbiekben bemutatott gondolatmenethez hasonlóan, felhasználva a termodinamika eredményeit, új egyensúlyi feltételeket adhatunk meg. Ekkor p nem csak az energiától, hanem a részecskeszámtól és a térfogattól is függeni fog, vagyis a részrendszerek entrópiáinak nem csak az energia szerinti, hanem a részecskeszám és/vagy térfogat szerinti parciális deriváltjainak is egyenlőnek kell lenniük az E_i^* , N_i^* és V_i^* helyeken (i = 1, 2). Az energiára vonatkozó egyensúlyi feltételből, felhasználva, hogy

$$\frac{\partial S}{\partial N} = -\frac{\mu}{T} \tag{4.20}$$

adódik, hogy amennyiben a részrendszerek között részecskecsere is zajlik, termodinamikai egyensúlyban a részrendszerek kémiai potenciáljainak is egyenlőnek kell lenniük. Ha a részrendszerek között "a térfogat is kicserélődhet", akkor

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T} \tag{4.21}$$

felhasználásával könnyen belátható, hogy termodinamikai egyensúlyban a két részrendszer nyomása is megegyezik (a továbbiakban, illetve a fenti egyenletben p a nyomást jelöli). Általánosabban fogalmazva, ha megengedjük, hogy a rendszerek között egy X_k extenzív mennyiség kicserélődjön, akkor

$$\frac{\partial S}{\partial X_k} = \frac{X_k}{T} \tag{4.22}$$

felhasználásával az alábbi egyensúlyi feltételt kapjuk:

$$Y_k^{(1)} = Y_k^{(2)} \,, \tag{4.23}$$

ahol Y_k az X_k -hoz konjugált intenzív mennyiség.

Könnyen belátható, hogy minél több extenzív mennyiséget engedünk kicserélődni, annál nagyobb lesz a teljes rendszer entrópiája. Az entrópia megváltozása:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial E} dE + \frac{\partial S}{\partial N} dN + \frac{\partial S}{\partial V} dV + \frac{\partial S}{\partial X_k} dX_k.$$
(4.24)

Ez az összefüggés az egyensúlyi pontban mindig igaz. Az entrópia extenzív mennyiségek szerinti deriváltjai ismertek. Azokat a fenti egyenletbe helyettesítve, megkapjuk a *funda-mentális egyenletet*:

$$dS = \frac{dE - \mu \, dN + p \, dV + X_k \, dX_k}{T} \,. \tag{4.25}$$

Innen látszik, hogy több kicserélődő extenzív mennyiség esetén az entrópia nagyobb lesz.

4.2. Kanonikus sokaság

A kanonikus sokaság a hőtartály statisztikus fizikai modellje. Ebben az esetben is egy zárt rendszert vizsgálunk, amely két részrendszerből áll, azonban itt az egyik elhanyagolhatóan kis méretű a másikhoz képest, ezért a teljes rendszer hőmérséklete gyakorlatilag állandó, ugyanis a kisebb részrendszer hőmérséklete csak elhanyagolható mértékben befolyásolja a nagyobbét. A fő különbség a kanonikus és a mikrokanonikus sokaság között, hogy a kanonikus sokaságban a rendszer hőmérséklete rögzített, nem pedig az energiája.

Tekintsük először azt az esetet, amikor az alrendszerek csak energiát tudnak cserélni egymással! Hasonlóan a mikrokanonikus sokasághoz, az E_1 energiájú állapot valószínűségét az állapotsűrűségek segítségével adhatjuk meg:

$$f(E_1) = \frac{\Omega_1(E_1)\Omega_2(E - E_1)}{\Omega_E}.$$
(4.26)

Hőtartályról lévén szó:

$$\Omega_2(E) \approx \Omega(E) \tag{4.27}$$

$$\ln\Omega_1 \ll \ln\Omega \tag{4.28}$$

$$S_1 \ll S \tag{4.29}$$

$$E_1 \ll E \,. \tag{4.30}$$

A Boltzmann-entrópia definíciójából következik, hogy

$$\Omega(E) = e^{S/k_B} \,. \tag{4.31}$$

Ezeket felhasználva adódik, hogy

$$f(E_1) \approx \frac{\Omega(E - E_1)}{\Omega(E_1)} = e^{\frac{1}{k_B}(S(E - E_1) - S(E))}$$
$$= e^{\frac{1}{k_B}\left(S(E) - \frac{\partial S}{\partial E}E_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial E^2}E_1^2 + \dots - S(E)\right)}$$
$$\approx e^{-\frac{E_1}{k_B T}},$$

$$(4.32)$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial E^2} = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial E} = -\frac{1}{T^2} \cdot \frac{1}{C_V}, \qquad (4.34)$$

ahol ${\cal C}_V$ a fajhő. Ah
hoz, hogy a másod- és magasabb rendű tagokat elhanyagolhassuk, teljesülni
e kell az

$$\frac{E}{2TC_V} \ll 1 \tag{4.35}$$

feltételnek. Ez az első és a második deriváltak arányából adódik. A feltétel teljesül, mivel hőtartály esetén C_V nagy. A fentiek alapján az $f(E_1)$ -re az alábbi kifejezést kapjuk:

$$f(E_1) = \mathcal{N}e^{-\frac{E_1}{k_B T}}.$$
 (4.36)

Vezessük be az állapotösszeget:

$$Z := \sum_{E_1} f(E_1) \,. \tag{4.37}$$

Innen az E_1 energiájú állapot valószínűsége:

$$p(E_1) = \frac{1}{Z} \cdot e^{-\frac{E_1}{k_B T}}.$$
(4.38)

Ezzel analóg módon, bevezetve a $\beta := (k_B T)^{-1}$ jelölést, az E_l energiájú kvantumállapot valószínűsége, valamint a kvantummechanikai állapotösszeg:

$$Z = \sum_{l} e^{-\beta E_l} \tag{4.39}$$

$$p_l = \frac{1}{Z} \cdot e^{-\beta E_l} \,. \tag{4.40}$$

Az i = 1, 2, ..., c komponensű rendszer állapotösszegét megadhatjuk a fázistérbeli sű-rűségfüggvénnyel is:

$$\varrho(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{c} N_i! h^{3N}} \cdot \frac{e^{-\beta H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}}{Z}$$
(4.41)

$$Z = \frac{1}{\prod_{i=1}^{c} N_i! h^{3N}} \int e^{-\beta H(q, p)} \, \mathrm{d}\Gamma \,.$$
(4.42)

Az állapotösszeg az állapotsűrűségek segítségével is kifejezhető:

klasszikusan:
$$Z = \int_{0}^{\infty} e^{-\beta E} \Omega(E) \, \mathrm{d}E$$
. (4.43)

Az előző szakaszban láttuk, hogy a teljes rendszer állapotsűrűsége a két részrendszer állapotsűrűségének konvolúciója. Ezt (4.43)-ba beírva, egyszerű számolás után adódik, hogy két részrendszer esetén

$$Z = Z_1 \cdot Z_2 \,. \tag{4.44}$$

Ennek egyenes következménye, hogy a teljes rendszer állapotösszege a részrendszerei állapotösszegének szorzata:

$$Z = \prod_{i} Z_i \,. \tag{4.45}$$

Vezessük be az F szabadenergiát:

$$F := -k_B T \ln Z \,. \tag{4.46}$$

Ezt felhasználva, a rendszer átlagos energiája:

$$\overline{E} = \sum_{l} p_{l} E_{l} = \dots = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = F + \beta \frac{\partial F}{\partial\beta}.$$
(4.47)

 \overline{E} -ot gyakran a rendszer *belső energiájának* nevezzük.

A szabadenergia segítségével különböző termodinamikai erők, pl. a nyomás, egyszerűen származtathatók. Legyen x egy extenzív mennyiség, amelytől az energia függ! Ekkor az

$$X = \frac{\partial E_l(x)}{\partial x} \tag{4.48}$$

x-hez konjugált intenzív mennyiség átlaga:

$$\overline{X} = \sum_{l} p_{l} X_{l} = \sum_{l} \frac{e^{-\beta E_{l}}}{Z} \frac{\partial E_{l}}{\partial x} = -\frac{1}{Z\beta} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\substack{l \\ =Z}} e^{-\beta E_{l}}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\ln Z}{\beta} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{B} T \ln Z \right) = \frac{\partial F}{\partial x}.$$
(4.49)

Ennek alapján a rendszer nyomása, és így az állapotegyenlete is könnyen felírható:

$$p = \frac{\partial F}{\partial V}.$$
(4.50)

4.2.1. Az egyensúly stabilitása, fluktuációk

Az előző szakaszban láttuk, hogy a teljes rendszer állapotsűrűsége exponenciálisan függ az entrópiától. Ezt és a szabadenergia (4.46) definícióját felhasználva, felírhatjuk az állapotsőzszeget az állapotsűrűség segítségével:

$$Z = e^{-\beta F(\beta)} = \sum_{l} e^{-\beta E_{l}} = \int_{0}^{\infty} e^{-\beta E} \Omega(E) \, \mathrm{d}E = \int_{0}^{\infty} e^{-\beta E + \frac{S}{k_{B}}} \, \mathrm{d}E \,.$$
(4.51)

Az integrandus itt is egy "tüskeszerű" függvény, vagyis gyakorlatilag csak a maximum környéke ad járulékot az integrálba. Jelölje E^* az integrandus maximumát! A sorfejtést másodrendig elvégezve a maximum körül, az alábbi eredményre jutunk:

$$e^{-\beta F(\beta)} = \int_{0}^{\infty} e^{-\beta E + \frac{S}{k_B}} dE = \int_{0}^{\infty} e^{-\beta (E - E^* + E^*) + \frac{S(E - E^* + E^*)}{k_B}} dE$$

$$\approx e^{-\beta E^* + \frac{S(E^*)}{k_B}} \int_{0}^{\infty} e^{\frac{1}{2k_B} S''(E^*)(E - E^*)^2} dE.$$
(4.52)

Az integrandus értéke 0-nál kicsi, mivel E^* nagy, ezért az integrál alsó határa $-\infty$ -nek is válaszható. Az entrópia második deriváltja a (4.34) egyenletből ismert. Ezt beírva a

fenti integrálba, egy $T^2C_Vk_B$ szórású Gauss-eloszlást kapunk. Az eloszlás szórása éppen az energia szórása egy T hőmérsékletű rendszerben:

$$\sigma_E^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = T^2 C_V k_B \,. \tag{4.53}$$

Az ideális gáz fajhője – rögzített részecskeszám mellett – konstans:

$$C_V = \frac{3}{2} N k_B \,. \tag{4.54}$$

Ez azt jelenti, hogy az ideális gáz energiájának szórása a részecskeszám négyzetgyökével arányos, relatív szórása pedig $\frac{E}{\sigma_E} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$. Vagyis az ideális gáz energiájának eloszlása annál élesebb, minél nagyobb a a részecskeszám. Más szóval: minél több részecskéből áll a gáz, annál stabilabb az egyensúlyi állapota.

4.2.2. A szabadenergia néhány tulajdonsága

Az előző alszakaszban láttuk, hogy²

$$e^{-\beta F(\beta)} \approx e^{-\beta E^* + \frac{S(E^*)}{k_B}} \sqrt{2\pi T^2 C_V k_B}.$$
 (4.55)

Azt is láttuk, hogy makroszkopikus rendszerek esetén a szórás kicsi, ezért $\sqrt{2\pi T^2 C_V k_B}$ elhagyható az exponenciális tényező mellett. Ekkor a szabadenergia kifejezhető a rendszer energiájával és entrópiájával:

$$-\beta F(\beta) = -\beta E + \frac{S(E)}{k_B} \tag{4.56}$$

$$-\frac{F}{T} = -\frac{E}{T} + S(E) \tag{4.57}$$

$$F = E - TS. (4.58)$$

A fundamentális egyenlet felhasználásával felírhatjuk a szabadenergia megváltozását:

$$dF = -S dT - p dV - \mu dN.$$
(4.59)

A szabadenergia infinitezimális megváltozásából leolvashatók a parciális deriváltjai, melyek éppen a korábban említett termodinamikai erőket adják meg:

$$\frac{\partial F}{\partial N}\Big|_{V,T} = \mu \qquad \qquad \frac{\partial F}{\partial V}\Big|_{N,T} = -p \qquad \qquad \frac{\partial F}{\partial T}\Big|_{N,V} = -S. \qquad (4.60)$$

 $^{^2\}mathrm{Ez}$ a képlet a nyeregpontmódszerből jön ki, az
ért szerepel benne a $\sqrt{2\pi}.$

4.2.3. Az ekvipartíció tétele

Az ekvipartíció tétele azt mondja ki, hogy homogén α -ad rendű potenciál esetén minden szabadsági fokra ugyanakkor potenciális energia jut. Homogén α -ad rendű függvény például a hatványfüggvény:

$$U(x) := ax^{\alpha} \,. \tag{4.61}$$

A bizonyítást az $\alpha=2$ esetre végezzük. A fent definiált potenciál mellett a rendszer Hamilton-operátora:

$$H = H' + ax^2 \,. \tag{4.62}$$

Ekkor a potenciál várható értéke:

$$\left\langle ax^{2}\right\rangle = \frac{\frac{1}{h^{3N}N!}\int e^{-\beta H}ax^{2}\,\mathrm{d}\Gamma}{\frac{1}{h^{3N}N!}\int e^{-\beta H}\,\mathrm{d}\Gamma} = \frac{\int e^{-\beta(H'+ax^{2})}ax^{2}\,\mathrm{d}\Gamma}{\int e^{-\beta(H'+ax^{2})}\,\mathrm{d}\Gamma}$$
$$= \frac{\int_{0}^{\infty}e^{-\beta ax^{2}}ax^{2}\,\mathrm{d}x}{\int_{0}^{\infty}e^{-\beta ax^{2}}\,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{-\partial}{\partial\beta}\int_{0}^{\infty}e^{-\beta ax^{2}}\,\mathrm{d}x}{\int_{0}^{\infty}e^{-\beta ax^{2}}\,\mathrm{d}x} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z(\beta) \qquad (4.63)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta a}} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{1}{2}\ln\beta + \cdots\right) = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2}k_{B}T.$$

Érdemes megjegyezni, hogy a Hamilton operátorból csak a potenciál maradt meg a várható értékben. Statisztikus fizikai szempontból nézve azt mondhatjuk, hogy ez a szabadsági fok olyan, mintha egymaga alkotná a rendszert, illetve a rendszer többi része egy T hőmérsékletű hőtartállyal állna kapcsolatban.

Az előbb bemutatott számítással analóg módon, általános
 α kitevő esetén hasonló eredményre jutunk:

$$\langle ax^{\alpha} \rangle = \frac{1}{\alpha} k_B T \,. \tag{4.64}$$

Az ekvipartíció tételével egyszerűen megadhatjuk az ideális gáz energiájának várható értékét: az ideális gázban N részecske van, vagyis 3N szabadsági fokkal rendelkezik. A részecskéknek csak mozgási energiájuk van. Egy részecske mozgási energiája az impulzusának második hatványával arányos, így az ideális gáz energiájának várható értéke:

$$\langle E \rangle \equiv E = \frac{3}{2} N k_B T \,. \tag{4.65}$$

Hasonló gondolatmenettel megadhatjuk egy harmonikus oszcillátorrendszer energiájának várható értékét:

$$\langle E \rangle \equiv E = 6N \cdot \frac{1}{2} k_B T = 3N k_B T \,. \tag{4.66}$$

4.2.4. A Maxwell-féle sebességeloszlás

Tudjuk, hogy kanonikus sokaságban egy fizikai rendszer fázistérbeli sűrűségfüggvénye:

$$f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \,\mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{h^{3N} N!} \cdot e^{-\beta H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \,\mathrm{d}\Gamma} \,. \tag{4.67}$$

Ebből az eloszlásból szeretnénk levezetni a részecskék sebesség szerinti eloszlását. Első lépésben válasszuk le a Hamilton operátorból a mozgási energiát:

$$H = H'(q) + \frac{p^2}{2m}.$$
 (4.68)

Ebben az esetben d $\Gamma = d\Gamma' dp$. Ha kiintegráljuk az eloszlásfüggvényt az általánosított koordináták szerint, megkapjuk a részecskék impulzustérbeli eloszlásfüggvényét:

$$f(\boldsymbol{p}) d^{3}p = \frac{e^{-\beta} \frac{p^{2}}{2m} d^{3}p}{\int e^{-\beta} \frac{p^{2}}{2m} d^{3}p} = \frac{e^{-\beta} \frac{mv^{2}}{2} m d^{3}v}{\int e^{-\beta} \frac{mv^{2}}{2m} d^{3}v} = \tilde{f}(\boldsymbol{v}) d^{3}v.$$
(4.69)

A nevezőben szereplő integrál megadja az eloszlás normálási faktorát. Korábban már szerepelt ahhoz hasonló integrál, ezért a bizonyítást az Olvasóra bízzuk ;-). Egyszerű számítások után megkapjuk a részecskék sebességük nagysága szerinti eloszlását, vagyis a Maxwell-féle sebességeloszlást:

$$\tilde{f}(v) \,\mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{m}{k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) v^2 \,\mathrm{d}v \,. \tag{4.70}$$

Az eloszlásnak v^* -ban maximuma van. A maximum helye:

$$v^* = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}.$$
(4.71)

Az ekvipartíció tétel megadja az eloszlás várható értékét:

$$\frac{3}{2}Nk_BT = \frac{1}{2}m\left\langle v^2 \right\rangle \Rightarrow \left\langle v^2 \right\rangle = \frac{3k_BT}{m}.$$
(4.72)



1. ábra. A Maxwell-féle sebességeloszlást a maximum körül jól közelíti a Gauss-eloszlás.

Azt látjuk, hogy az eloszlás átlaga nem ugyanaz, mint a maximuma. Ez azért van, mert a sebességeloszlás nem éles, csak az energiaeloszlás az.

Az eloszlás szórását megbecsülhetjük, ha a sebességeloszlást a maximum körül egy Gauss-eloszlással közelítjük. Az exponens második deriváltja³ a maximum helyén megadja a szórásnégyzetet:

$$\sigma^2 = \frac{k_B T}{2m} \,. \tag{4.73}$$

Ezt felhasználva, a Maxwell-féle sebességeloszlást jól közelítő Gauss-görbe alakja:

$$\tilde{f}(v) \approx \tilde{f}(v^*) \cdot e^{-\frac{m}{k_B T}(v-v^*)^2} \,. \tag{4.74}$$

Ezt szemlélteti az 1. ábra.

³itt v^2 is az exponensben szerepel: $v^2 = e^{\ln v^2}$

4.2.5. Klasszikus deális gáz

Írjuk le a klasszikus ideális gázt kanonikus sokaságban! Az ideális gáz állapotösszege:

$$Z = \frac{V^N}{h^{3N}N!} \int \exp(-\beta \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}) \,\mathrm{d}p_1 \cdots \,\mathrm{d}p_{3N} = \frac{V^N}{h^{3N}N!} (2\pi m k_B T)^{\frac{3N}{2}} \sim \beta^{-\frac{3N}{2}}.$$
 (4.75)

A szabadenergia:

$$F(T,V,N) = -k_B T \ln Z . \qquad (4.76)$$

A klasszikus ideális gáz nyomása:

$$-p = \frac{\partial F}{\partial V}\Big|_{T,N} = \frac{\partial}{\partial V} \left(-k_B T N \ln V + \cdots\right) = -k_B T N \cdot \frac{1}{V}.$$
(4.77)

Innen visszakapjuk a termodinamikából ismert állapotegyenletet:

$$pV = Nk_BT. (4.78)$$

A klasszikus ideális gáz entrópiája:

$$-S = \frac{\partial F}{\partial T}\Big|_{V,N} = \frac{\partial}{\partial T} \left(-k_B T \frac{3N}{2} \ln T + \cdots \right) = -k_B \ln Z - \frac{3}{2} N k_B \Rightarrow$$

$$S = k_B \ln Z + \frac{3}{2} N k_B.$$
(4.79)

A klasszikus ideális gáz (átlag)energiája:

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = -\frac{\partial}{\partial\beta} \left(-\frac{3N}{2} \ln\beta + \cdots \right) = \frac{3N}{2\beta} = \frac{3}{2} N k_B T.$$
(4.80)

Ez az eredmény is konzisztens a termodinamikából ismert eredménnyel.

4.3. Nagykanonikus sokaság

A nagykanonikus sokaság a kanonikus sokaság általánosítása. Ebben az esetben is hőtartályról beszélünk, itt viszont az energia mellett a részecskeszám is kicserélődhet a részrendszerek között. Hőtartályról lévén szó,

$$N_1 \ll N_2 \approx N \,. \tag{4.81}$$

Azt vizsgáljuk, hogy milyen valószínűséggel van a kisebb részrendszer E_1 energiájú állapotban, N_1 részecskeszámmal. A kanonikus sokasághoz hasonlóan, bevezethetjük az $f(E_1, N_1)$ "normálatlan valószínűséget":

$$f(E_1, N_1) = \frac{\Omega_1(E_1, N_1)\Omega_2(E_2, N_2)}{\Omega(E, N)} \approx \frac{\Omega(E - E_1, N - N_1)}{\Omega(E, N)}.$$
(4.82)

Felhasználva a Boltzmann-entrópia (4.13) definícióját, majd az entrópiát első rendig sorba fejtve, az E energiájú, N részecskeszámú állapot valószínűsége:

$$p(E,N) = \frac{\frac{1}{h^{3N}N!} e^{-\beta H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) + \beta \mu N} \,\mathrm{d}\Gamma_N}{\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{h^{3N}N!} \int e^{-\beta H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) + \beta \mu N} \,\mathrm{d}\Gamma_N}.$$
(4.83)

A fenti egyenletben a nevező a nagykanonikus állapotösszeg:

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{h^{3N} N!} \int e^{-\beta H_N(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) + \beta \mu N} \,\mathrm{d}\Gamma_N \,. \tag{4.84}$$

Kvantummechanikai leírásban az E_l energiájú állapot valószínűsége, és így az állapotösszeg is függ a részecskeszámtól:

$$p_l = \frac{e^{-\beta(E_l^{(N)} - \mu N)}}{Z} \tag{4.85}$$

$$Z = \sum_{l,N} e^{-\beta (E_l^{(N)} - \mu N)} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} Z_N , \qquad (4.86)$$

ahol Z_N a kanonikus állapotösszeg N részecske esetén (lásd a (4.42) egyenletet).

A kanonikus sokaságban bevezettük a szabadenergiát. Ezzel analóg módon itt bevezetjük a Φ nagykanonikus potenciált:

$$\Phi(T,\mu,V) := -k_B T \ln Z \,. \tag{4.87}$$

Fejezzük ki Φ-t a termodinamikai változóival! Ehhez az előző szakaszban bemutatott eljárással analóg módon kell eljárni. Először írjuk fel a nagykanonikus állapotösszeget az állapotsűrűséggel:

$$Z = \sum_{N} e^{\beta \mu N} \int_{0}^{\infty} e^{-\beta E} \Omega(E) \,\mathrm{d}E \,. \tag{4.88}$$

A részecskeszámra vonatkozó szummát integrállal közelítjük, majd az állapotsűrűséget kifejezzük a Boltzmann-entrópiával. Az így kapott exponenst első rendig sorba fejtve⁴ a legvalószínűbb értékek, vagyis E^* és N^* körül, az állapotösszegre az alábbi közelítést kapjuk:

$$Z \approx e^{-\beta E^* + \beta \mu N^* + \frac{S(E^*, N^*)}{k_B}}.$$
(4.89)

Innen már kifejezhető a nagykanonikus potenciál a termodinamikai változóival:

$$-k_B T \ln Z = E - TS(E, N) - \mu N = \Phi(T, \mu, V), \qquad (4.90)$$

ahol E és N a legvalószínűbb energia ill. részecskeszám.

Az Euler-azonosság felhasználásával tovább egyszerűsíthetjük a nagykanonikus potenciál kifejezését:

$$E(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda E(S, V, N).$$
(4.91)

A fenti egyenletet λ szerint deriválva, maj
d λ helyére egyet írva, megkapjuk az Euler-egyenletet:

$$E = TS - pV + \mu N. ag{4.92}$$

Ezt felhasználva, két legyet üthetünk egy csapásra⁵: leegyszerűsíthetjük a nagykanonikus potenciál kifejezését, ugyanakkor felírhatjuk a "nagykanonikus állapotegyenletet":

$$\Phi = -pV. \tag{4.93}$$

A fundamentális egyenlet felhasználásával könnyen megkaphatjuk a nagykanonikus potenciál megváltozását:

$$d\Phi = -S \, dT - p \, dV - N \, d\mu \,. \tag{4.94}$$

Innen a parciális deriváltjai leolvashatóak:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T}\Big|_{\mu,V} = -S \qquad \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial V}\Big|_{\mu,T} = -p \qquad \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\Big|_{T,V} = -N. \tag{4.95}$$

4.3.1. Klasszikus ideális gáz

Láttuk, hogy a kanonikus sokaság jól leírja az ideális gázt, vagyis statisztikus fizikai meggondolások alapján visszakaptuk a termodinamikából jól ismert eredményeket. Nézzük meg, hogy nagykanonikus sokaságban teljesül-e ugyanez!

⁴A másodrendű tagok az eloszlás szélességét adják meg.

⁵Igen, rímel, na és akkor mi van? Most üsselek meg ezért?

A klasszikus ideális gáz nagykanonikus állapotösszege:

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Z_N , \qquad (4.96)$$

ahol Z_N a kanonikus állapotösszeg N részecske esetén. A klasszikus ideális gáz kanonikus állapotösszege a (4.75) egyenletből ismert. A nagykanonikus állapotösszeg és annak logaritmusa:

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left[\frac{V}{h^3} e^{\beta \mu} \left(2\pi m k_B T \right)^{\frac{3}{2}} \right]^N = \exp\left[\frac{V}{h^3} e^{\beta \mu} \left(2\pi m k_B T \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$
(4.97)

$$\ln Z = \frac{V}{h^3} e^{\beta \mu} \left(2\pi m k_B T\right)^{\frac{3}{2}}.$$
(4.98)

A nagykanonikus potenciál pedig

$$\Phi = -k_B T \ln Z = -k_B T \cdot \frac{V}{h^3} e^{\beta \mu} \left(2\pi m k_B T\right)^{\frac{3}{2}} .$$
(4.99)

A fenti egyenletből leolvasható a részecskeszám és a nyomás:

$$-N = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right|_{T,V} = -k_B T \beta \ln Z = -\ln Z \tag{4.100}$$

$$-p = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial V} \right|_{\mu,T} = -k_B T \cdot \frac{1}{V} \ln Z = -k_B T N \frac{1}{V}.$$
(4.101)

A fenti két egyenletből látszik, hogy a nagykanonikus sokaság is helyesen visszaadja a klasszikus ideális gáz termodinamikából ismert állapotegyenletét:

$$pV = Nk_BT. (4.102)$$

Nagykanonikus sokaságban becslést adhatunk arra, hogy az ideális gáz meddig tekinthető klasszikusnak. Írjuk ki részletesebben a részecskeszámot:

$$N = V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\beta\mu} \,. \tag{4.103}$$

Innen:

$$e^{\beta\mu} = \frac{N}{V} \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}.$$
 (4.104)

Az egyenlet jobb oldalán álló szorzat első tényezője r_0^{-3} -nal arányos, ahol r_0 a részecskék közötti átlagos távolság, következésképpen

$$\frac{V}{N} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \,. \tag{4.105}$$

A második tényező konstans szorzó erejéig éppen a de Broglie-hullámhossz köbe:

$$\left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{h}{\left(4\pi \frac{1}{2}m k_B T\right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{h}{p} = \lambda.$$

$$(4.106)$$

Ritka vagy magas hőmérsékletű gáz esetén $\lambda^3/r_0^3 \ll 1$, ami azt jelenti, hogy a kémiai potenciálnak negatívnak kell lennie. Az ideális gázt tehát addig tekinthetjük klasszikusnak, amíg a fenti feltétel fennáll.

XV. TÉTEL: Kvantumstatisztikák

Májer Imre

Tartalomjegyzék

1.	Bev	ezetés	66			
2.	. Fermi-eloszlás, Bose-eloszlás					
	2.1.	Klasszikus határeset	68			
3.	3. Ideális Fermi-gáz					
	3.1.	Bethe–Sommerfeld-sorfejtés	71			
4.	. Ideális Bose-gáz, Bose–Einstein kondenzáció					
	4.1.	Fotonok rendszere	74			
	4.2.	Fononok rendszere	76			

1. Bevezetés

A tétel neve kvantum
statisztikák, azaz egy sokrészecskés kvantummechanikai rendszert akarunk leírni a statisztika mód
szereivel. N részecskés rendszer esetén a Schrödinger-egyenle
tl. sajátállapotához tartozó hullámfüggvényt jelölj
e $\Psi_l^{(N)}$, az ehhez tartozó energiát (sajátértéket) pedig
 $E_l^{(N)}$. A legtöbb esetben arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi az értéke egy fizikai mennyiségnek ezen a rendszeren. Statisztikánál már megszoktuk, hogy ilyenkor az adott mennyiség várható értékére vagyunk kíváncsiak. Ezt egy A fizikai mennyiség
 esetén a következő módon számíthatjuk nagykanonikus sokaságban:

$$\left\langle A\right\rangle = \sum_{l,N} p_l^{(N)} \left\langle \Psi_l^{(N)} \right| \hat{A} \left| \Psi_l^{(N)} \right\rangle \,.$$

Itt \hat{A} az A fizikai mennyiséghez tartozó operátor, $p_l^{(N)}$ pedig N részecske esetén annak a valószínűsége, hogy az l. állapotban találjuk a kvantummechanikai rendszert. Ezt a valószínűséget a nagykanonikus sokaság esetén ismerjük:

$$p_l^{(N)} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \left(E_l^{(N)} - \mu N\right)}.$$

A kifejezésben μ a rendszer kémiai potenciálja, $\beta = 1/k_B T$, Z pedig a nagykanonikus állapotösszeg, mely arra kell, hogy az eloszlás normált legyen.

$$Z = \sum_{l,N} e^{-\beta \left(E_l^{(N)} - \mu N \right)}.$$

A továbbiakban kizárólag nemkölcsönható kvantumrendszereket fogunk vizsgálni (ideális gázok, fononok, fotonok, stb.). Ez lényegesen leegyszerűsíti a számolásokat. Egy N részecskéből álló nemkölcsönható rendszer energiája és részecskeszáma kifejezhető így:

$$N = \sum_{r} n_{r}$$
$$E = \sum_{r} \varepsilon_{r} n_{r} \, .$$

Itt úgy számoltunk, hogy vettük az egyrészecske energia-sajátállapotokat, majd azokra adott számú részecskéket pakoltunk. Azaz az r. egyrészecske sajátállapot energiája ε_r , és ezen a szinten n_r darab részecske van. Így nyilvánvaló, hogy a fenti kifejezéssel kapjuk a teljes részecskeszámot (N) és az összenergiát (E).

Ezeket pedig most beírjuk a nagykanonikus állapotösszegbe:

$$Z = \sum_{\{n_r\}} e^{-\beta \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r n_r + \beta \mu \sum_{r=0}^{\infty} n_r} = \sum_{\{n_r\}} e^{-\beta \sum_{r=0}^{\infty} (\varepsilon_r - \mu) n_r}$$

A kifejezést úgy kell összegezni, hogy n_r különböző konfigurációira összegzünk adott N = 0tól $N = \infty$ -ig. Most trükközzünk egyet: számoljuk ki egy energiaszint nagykanonikus összegét, azután – mivel az állapotösszegek különböző független rendszerek összetétele esetén szorzódnak – szorozzuk össze a különböző energiaszintek állapotösszegét. Kicsit egyszerűbben kifejezve, összeszorozzuk azokat az állapotösszegeket, melyek azt fejezik ki, hogy az adott energiaszinten 0, 1, 2, ... stb. részecske található:

$$Z = \prod_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{n_r} e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu)n_r} \right)$$

A Pauli-elvnek megfelelően megkülönböztetünk kétfajta típusú részecskét. A fermionokat, melyeknél egy energiaszinten csak 0 vagy 1 részecske lehet $(n_r = 0, 1)$, illetve a bozonokat, melyeknél akármennyi $(n_r = 0, 1, 2, ..., \infty)$. Megjegyezném, hogy természetesen ekkor a fermionok rendszere kölcsönható, de kölcsönhatásuk nagyon rövidtávú és ilyen egyszerűen vehető figyelembe:

$$Z_{\text{fermion}} = \prod_{r=0}^{\infty} (1 + e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu)}) \; .$$

Bozonok esetén egy mértani sor összegét kell kiszámolni a produktum belsejében. Az összegképlet a következő (feltéve persze, hogy a szumma konvergál):

$$Z_{\text{bozon}} = \prod_{r=0}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu)}}$$

2. Fermi-eloszlás, Bose-eloszlás

Ebben a szekcióban kiszámoljuk a fermionokhoz tartozó Fermi–Dirac és a bozonokhoz tartozó Bose–Einstein eloszlásfüggvényeket. Eloszlásfüggvénynek azt nevezzük, amely megmondja, hogy adott energia kis környezetében hány darab részecske található. A sajátértékeknek megfelelően diszkrét energiaszintekből indulunk ki. Számoljuk ki, hogy mennyi a várható értéke a k. energiaszinten az ott lévő részecskéknek!

$$\langle n_k \rangle = \sum_{n_r} \frac{1}{Z} e^{-\beta \sum_{r=0}^{\infty} (\varepsilon_r - \mu) n_r} n_k = -\frac{1}{Z\beta} \sum_{n_r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} e^{-\beta \sum_{r=0}^{\infty} (\varepsilon_r - \mu) n_r} = -\frac{1}{Z\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} Z = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \varepsilon_k} Z = -\frac{$$

Felhasználjuk az előző fejezetben kiszámolt állapotösszegeket:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \ln Z = \pm \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \sum_{r=0}^{\infty} \ln \left(1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu)} \right) = \pm \frac{\pm e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}(-\beta)}{1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}} = -\frac{\beta}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} \pm 1}$$
$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} \pm 1}.$$

Azzal feltételezéssel élünk, hogy a spektrum nagyon sűrű vagy folytonos, így adott energia kis környezetében található részecskék számát a következő képlet adja meg:

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \pm 1}$$

A fölső előjel a korábbiaknak megfelelően a fermionokhoz tartozik, így a Fermi–Diraceloszlást adja meg, az alsó pedig a bozonokhoz tartozó Bose–Einstein-eloszlást.

Az összes részecskeszám és az összenergia a korábbiaknak megfelelően számolható:

$$N = \sum_{r=0}^{\infty} \langle n_k \rangle \approx \int_0^{\infty} D(\varepsilon) \, n(\varepsilon) \, \mathrm{d}\varepsilon$$
$$E = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r \, \langle n_k \rangle \approx \int_0^{\infty} \varepsilon \, D(\varepsilon) \, n(\varepsilon) \, \mathrm{d}\varepsilon.$$

Emlékeztetésképpen az állapotsűrűséget kifejező $D(\varepsilon)$ függvény azért kell, mivel az energia szerint integrálunk, ahhoz pedig tudnunk kell, hogy hány állapot van adott energia kis környezetében.

2.1. Klasszikus határeset

Mindkét eloszlás klasszikus határesete a Boltzmann-eloszlás, mely akkor teljesül, ha $e^{-\beta\mu}\gg 1$:

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \pm 1} \approx e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}.$$

A nagykanonikus eloszlásnál levezetett általános összefüggés értelmében:

$$e^{-\beta\mu} = \frac{Z_1}{N} \,.$$

Itt \mathbb{Z}_1 az egyrészecske kanonikus állapotösszeg. Számoljuk ki gyorsan ideális gáz esetén:

$$Z_{1} = \frac{1}{h^{3}} \int e^{-\beta\varepsilon} \,\mathrm{d}\Gamma = \frac{V}{h^{3}} \int e^{-\frac{\beta}{2m}\sum_{i=1}^{3}p_{i}^{2}} \,\mathrm{d}p_{1} \mathrm{d}p_{2} \mathrm{d}p_{3} = \frac{V}{h^{3}} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} \,.$$

Az utolsó lépésnél felhasználtuk a Gauss-integrált:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi/a} \, .$$

Ekkor tehát Boltzmann-eloszlásra a feltétel:

$$1 \ll e^{-\beta\mu} = \frac{Z_1}{N} = \frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2}$$

Azaz a kvantumhatások akkor tekinthetőek elhanyagolhatónak, ha a részecskék sűrűsége kicsi, és a gáz hőmérséklete nagy.

3. Ideális Fermi-gáz

Ideális Fermi-gáz, azaz nemkölcsönható fermionokból képzett gáz. Képzeljünk el például dobozba zárt elektronokat, vagy fémekben a delokalizált elektronfelhőt! Kíváncsiak vagyunk eme gáz energiaegyenletére, állapotegyenletére... stb. A korábbiakból (pl. előző tétel) jól ismert módszert követjük, így annyira részletesen nem is ismertetem itt.

Az ideális gázok Hamilton-függvénye:

$$H = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$$

Az állapotösszeg:

$$\Omega_0(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon_r < \varepsilon} 1 = \frac{2s+1}{h^3} \int_{H < \varepsilon} d\Gamma = \frac{(2s+1)V}{h^3} \frac{4\pi |\mathbf{p}|^3}{3} = \frac{(2s+1)4\pi V}{3h^3} (2m\varepsilon)^{3/2} d\Gamma$$

Az állapotsűrűség:

$$D(\varepsilon) = \frac{d\Omega_0}{d\varepsilon} = \frac{2\pi(2s+1)}{h^3} (2m)^{3/2} V \varepsilon^{1/2} := AV \sqrt{\varepsilon} \,.$$

Megvan az állapotsűrűség, ez kell ahhoz, hogy a részecskeszámot és az energiát ki tudjuk számítani: $~~\infty$

$$N = AV \int_{0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \,\mathrm{d}\varepsilon$$
$$E = AV \int_{0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \,\mathrm{d}\varepsilon$$

Az állapotegyenletet pedig a nagykanonikus potenciál segítségével vezetjük vissza az energiára:

$$\begin{split} \Phi &= -k_B T \ln Z = -k_B T \left(\pm \sum_{r=0}^{\infty} \ln \left(1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu)} \right) \right) = \\ &= \mp k_B T \int_0^{\infty} D(\varepsilon) \ln \left(1 \pm e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \right) d\varepsilon = \\ &= \mp k_B T A V \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} \ln \left(1 \pm e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \right) d\varepsilon = \mp k_B T A V \left[\frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \ln \left(1 \pm e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \right) \right]_0^{\infty} \\ &- k_B T A V \beta \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2} e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}} d\varepsilon = -\frac{2}{3} A V \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} \pm 1} d\varepsilon = -\frac{2}{3} E \,. \end{split}$$

A fenti számolás során parciálisan integráltunk, és kihasználtuk, hogy a határokon vett tag zérus. Később pedig felfedeztük, hogy a megmaradó integrál az energia egy 2/3-os szorzóval. A nagykanonikus potenciálról tudjuk a következőt is:

$$\Phi = -pV.$$

Így tehát az állapotegyenlet az energia segítségével:

$$pV = \frac{2}{3}E \,.$$


1. ábra. Fermi–Dirac-eloszlás... Bocs az ábráért, nem volt kedvem rendeset csinálni...

3.1. Bethe–Sommerfeld-sorfejtés

A fenti integrálok analitikus formában nem végezhetőek el, azonban ha a fémek delokalizált elektronfelhőjére akarunk számolgatni, akkor igaz az alacsonyhőmérsékletű, ún. Bethe– Sommerfeld-sorfejtés. A hőmérséklet minél alacsonyabb, annál élesebb a Fermi-eloszlás levágása a kémiai potenciálnál (1. ábra). A nulla hőmérséklethez tartozó kémiai potenciált – amikor a Heaviside-függvényhez hasonlóan azonnal levág a függvény – Fermi-energiának nevezzük, a hozzá tartozó hőmérsékletet pedig Fermi-hőmérsékletnek:

$$\mu(T=0) = E_F = k_B T_F \,.$$

A szobahőmérséklet 300 K, míg tipikusan a fémek Fermi-hőmérséklete $10^4 - 10^5$ K nagyságrendbe esik, ezért működik a Bethe–Sommerfeld-sorfejtés.

Mivel a fémben található részecskeszám nem függ a hőmérséklettől, ezért azt lehet számolni zérus hőmérsékleten:

$$N = AV \int_{0}^{E_F} \varepsilon^{1/2} \,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{2}{3} AV E_F^{3/2} \,.$$

Maga a Bethe–Sommerfeld-sorfejtés pedig tetszőleges függvényre T^2 tagig a következő (ezt nem vezetem le, mert szerintem hosszú és felesleges):

$$\int_{0}^{\infty} g(\varepsilon) f(\varepsilon) \,\mathrm{d}\varepsilon = \int_{0}^{E_F} g(\varepsilon) \,\mathrm{d}\varepsilon + (\mu - E_F) g(E_F) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g'(E_F)$$

Itt $f(\varepsilon)$ -nal jelöltem a Fermi–Dirac-eloszlást, mivel a Bethe–Sommerfeld-sorfejtés kizárólag erre igaz, $g(\varepsilon)$ pedig egy tetszőleges függvény. Két lépésben jutunk el az energiáig T^2 rendben: először $g(\varepsilon) = D(\varepsilon)$ helyettesítéssel, ebből megkapjuk a kémiai potenciált, majd $g(\varepsilon) = \varepsilon D(\varepsilon)$ -nal, melybe vissza kell majd írnunk a kémiai potenciált.

A $g(\varepsilon) = D(\varepsilon)$ helyettesítés pont a részecskeszámot adja meg:

$$N = \int_{0}^{E_F} D(\varepsilon) d\varepsilon + (\mu - E_F) D(E_F) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D'(E_F) =$$
$$= N + (\mu - E_F) D(E_F) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D'(E_F).$$

Kihasználtuk, hogy a Bethe–Sommerfeld-sorfejtés első tagja pont nulla hőmérsékleten adja meg a részecskeszámot, és mivel ez a hőmérséklettől független, ezért ugyanaz az N írható oda. N-nel való egyszerűsítés után kifejezhetjük a kémiai potenciált:

$$\mu = E_F - \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{D'(E_F)}{D(E_F)}.$$

A $g(\varepsilon) = \varepsilon D(\varepsilon)$ helyettesítés pedig pont a keresett energiához vezet:

$$E = \int_0^{E_F} \varepsilon D(\varepsilon) \,\mathrm{d}\varepsilon + (\mu - E_F) \varepsilon D(E_F) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 (\varepsilon D(\varepsilon))'_{\varepsilon = E_F} =$$

=
$$\int_0^{E_F} \varepsilon D(\varepsilon) \,\mathrm{d}\varepsilon + (\mu - E_F) \varepsilon D(E_F) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D(E_F) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 E_F D'(E_F) =$$

=
$$\int_0^{E_F} \varepsilon D(\varepsilon) \,\mathrm{d}\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D(E_F) \,.$$

Az utolsó lépésben beírtuk μ -t, így a második valamint a negyedik tagok kiejtették egymást. Az ebben lévő integrál pedig már analitikusan elvégezhető.

$$E = AV \int_{0}^{E_{F}} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon + \frac{\pi^{2}}{6} (k_{B}T)^{2} AV E_{F}^{1/2} = \frac{2}{5} AV E_{F}^{5/2} + \frac{\pi^{2}}{6} (k_{B}T)^{2} AV E_{F}^{1/2}$$
$$= \frac{2}{5} AV E_{F}^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^{2}}{12} \left(\frac{T}{T_{F}} \right)^{2} \right]$$

Ezt ismerve könnyedén számolható az elektronok hőkapacitása:

$$c = \frac{dE}{dT} = \frac{\pi^2}{3} k_B A V E_F^{1/2} T \,.$$

Az elektronok fajhője tehát a hőmérséklettel lineárisan változik. Ezt alacsony hőmérsékleten lehet főleg kimutatni, ahol a fononokhoz tartozó Debye-fajhő T^3 -bel csökken (amint ezt egy későbbi fejezetben be is mutatjuk), így egy bizonyos hőmérséklet alatt az elektronfajhő válik meghatározóvá.¹

4. Ideális Bose-gáz, Bose–Einstein kondenzáció

Tegyük fel, hogy van egy N darab bozonból álló rendszerünk, melynek alapállapoti energiája $\varepsilon_0 = 0$. A Bose–Einstein-eloszlás:

$$b(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

Az eloszlás divergál, ha a nullenergiás állapotban a kémiai potenciál tart nullához. A kémiai potenciál negatív vagy nulla. Ha pozitív lenne, az nem lenne túl jó, mivel ilyen effektus nem nulla energiákon is felléphetne. Válasszuk le a nullenergiás részecskéket, a többi már közelíthető integrállal:

$$N = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} - 1} = N_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} - 1} = N_0 + \int_0^{\infty} \frac{D(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} d\varepsilon := N_0 + N'.$$

Ideális gázra ismerjük az állapotsűrűséget, N'-t tudjuk számolni:

$$N' = AV \int_{0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \,\mathrm{d}\varepsilon = AV(k_BT)^{3/2} \int_{0}^{\infty} \frac{x^{1/2}}{e^{x+\alpha} - 1} \,\mathrm{d}x =$$
$$= AV(k_BT)^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) F^{(-)}\left(\frac{3}{2}, \alpha\right) \,,$$

ahol bevezettük az $x=\beta\varepsilon$ valamint
a $\alpha=-\beta\mu$ új változókat.

 $F^{(-)}\left(\frac{3}{2},\alpha\right)$ egy α -ban monoton csökkenő függvény, mely maximumát $\alpha = 0$ -ban veszi fel:

$$N_{\rm max}' = AV(k_BT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

Bevezethetünk egy T_C kritikus hőmérsékletet, melyen $N = N'_{\text{max}}$. Ez esetben még el tudom helyezni az összes részecskét a nem nullenergiás állapotokban. A kémiai potenciál itt válik nullává. Ekkor:

¹Egy másik módszer szerint a Bethe–Sommerfeld-sorfejtés képletében csak μ -ig integrálunk, és a $\mu(E_{\rm F})$ függvényt a részecskeszámok egyenlőségéből vesszük. Ezt tanultuk statfiz gyakorlaton is.

$$N = AV(k_B T_C)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

Ha T_C -nél lejjebb hűtünk egy rendszert, akkor N' < N, a különbözetet pedig mind nullenergiás részecskék adják:

$$N_0 = N - N' = \left(T_C^{3/2} - T^{3/2}\right) k_B^{3/2} A V \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^{3/2}\right]$$

A kritikus hőmérséklet alatt a nullenergiás részecskék száma elkezd nőni, annyira, hogy ez egy makroszkopikusan megfigyelhető kvantumállapot lesz. T = 0 hőmérsékleten pedig mindegyik bozon nullenergiássá válik. A makroszkopikus kvantumjelenségeknek általában ez az alapjuk.

Következőnek vizsgáljuk meg az energiát és az állapotegyenletet. Ezek nem különösebben nehéz feladatok.

A nullenergiás részecskéknek az energiájuk nulla, azokat nem kell figyelembe venni:

$$E = \int_{0}^{\infty} \varepsilon D(\varepsilon) b(\varepsilon) \, \mathrm{d}\varepsilon = AV(k_B T)^{5/2} \, \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) F^{(-)}\left(\frac{5}{2}, \alpha\right) \, .$$

A kritikus hőmérsékleten és alatta $\alpha = 0$, így $F^{(-)}\left(\frac{5}{2}, \alpha\right) = \zeta\left(\frac{5}{2}\right)$.

A nyomás egy fokkal érdekesebb. A fermionoknál levezetett összefüggés az állapotegyenletre a bozonokra is érvényes, a levezetésben direkt mindenhol meg is tartottuk a \pm jelet. A kritikus hőmérséklet alatt:

$$pV = \frac{2}{3}E = AV(k_BT)^{5/2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \zeta\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$p = A(k_BT)^{5/2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \zeta\left(\frac{5}{2}\right) .$$

Azaz a nyomás független a térfogattól. Ilyesmi előfordul például telített vízgőznél, innen a kondenzáció megnevezés.

4.1. Fotonok rendszere

Ebben az alrészben fotonokat vizsgálunk meg, és levezetjük a Planck- illetve a Stefan-Boltzmann-törvényt. A fotonokat tekinthetjük az elektromágneses tér rezgéseinek.

A fotonokra érvényes diszperziós reláció:

$$\omega = c |\mathbf{k}| \, .$$

Az energia pedig:

$$\varepsilon = \hbar \omega = \hbar |\mathbf{k}| c = |\mathbf{p}| c$$

Felírjuk a kanonikus egyrészecske állapotösszeget:

$$Z_k = \sum_n e^{-\beta\varepsilon_n} = \sum_n e^{-\beta\hbar\omega_k \left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_k}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_k}}.$$

A teljes kanonikus állapotösszeg a különböző egyrészecske állapotösszegek szorzata:

$$Z = \prod_{k} Z_{k} = \prod_{k} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_{k}}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_{k}}} \right) \,.$$

A szabadenergia:

$$F = -k_B T \ln Z = \sum_k \frac{1}{2} \hbar \omega_k + \sum_k k_B T \ln \left(1 - e^{-\beta \hbar \omega_k} \right) = F_0 + \sum_k k_B T \ln \left(1 - e^{-\beta \hbar \omega_k} \right).$$

Emlékeztetőül írjuk fel a nagykanonikus potenciált – melyet korábban vezettünk le – bozonokra:

$$\Phi = k_B T \sum_k \ln\left(1 - e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}\right),\,$$

mely a konstans tagtól eltekintve olyan, mintha egy speciális bozonikus kvantumrendszerünk lenne $\mu = 0$ és $\varepsilon_k = \hbar \omega$ értékekkel. Ráadásul a foton spinje s = 1, egész, tehát tényleg bozon. Elektrodinamikai okok miatt $s_z = 0$ állapotát nem veszi fel, így a degenerációkor előjövő faktor egy 2-es szorzó, azaz két polarizációja van.

Az állapotösszeg:

$$\Omega_0 = 2 \frac{V}{h^3} \frac{4\pi |\mathbf{p}|^3}{3} = \frac{8\pi}{3} \frac{\varepsilon^3}{c^3} \frac{V}{h^3}.$$

Az állapotsűrűség:

$$D(\varepsilon) = \frac{8\pi V \varepsilon^2}{c^3 h^3} \,.$$

Mivel a Planck-törvény a frekvenciákról fog szólni, ezért áttérünk az energi aspektrumból a frekvenci apsektrumba. Felhasználjuk az $\varepsilon = \hbar \omega$ összefüggést az áttérés hez.

$$D(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{8\pi V \varepsilon^2}{h^3} d\varepsilon = \frac{8\pi V \hbar^2 \omega^2}{c^3 h^3} \hbar d\omega = \frac{V \omega^2}{c^3 \pi^2} d\omega := g(\omega) d\omega.$$

A nullponti energiától eltekintve az energia:

$$E = \int_{0}^{\infty} g(\omega) \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \,\mathrm{d}\omega := V \int_{0}^{\infty} \varphi(\omega) \,\mathrm{d}\omega$$
$$\varphi(\omega) = \frac{\omega^2}{c^3 \pi^2} \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \,.$$

Ezt hívjuk Planck-törvénynek. Ha elvégezzük az integrálást, a Stefan–Boltzmann-törvényhez jutunk, azaz $E \propto T^4$. Ennek belátásához szerencsére elég, ha megfelelő változócserével az integrált dimenziótlanná tesszük: $x := \beta \hbar \omega$. Így:

$$\frac{E}{V} = \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3 c^3 \pi^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \,\mathrm{d}x \propto T^4 \,.$$

4.2. Fononok rendszere

A fononokat, azaz szilárd testek rezgéseit a fotonokéhoz hasonlóan kell kezelni, azonban kisebb eltérésekkel. Először is más a diszperziós reláció, a fotonokénál kicsit bonyolultabb, másrészt a rezgés nem lehet akármekkora frekvenciájú, hiszen a rácsállandónál kisebb hullámhosszú rezgések nem fordulhatnak elő, így a frekvenciára kapunk egy felső limitet. Ezen felső határfrekvenciához társítjuk az úgynevezett Debye-hőmérsékletet:

$$\hbar\omega_{\rm max} = k_B T_D \,.$$

További eltérés még, hogy kristályban longitudinális és transzverzális sebességek is vannak, melyeket a következő effektív sebességgel vehetünk figyelembe:

$$\frac{1}{c^3} = \frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3}$$

A számolás menete ugyanaz, mint a fotonok esetén, csak integrálni ω_{max} -ig kell:

$$E = \int_{0}^{\omega_{\max}} g(\omega) \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} d\omega = \int_{0}^{\omega_{\max}} \frac{V\omega^2}{2c^3\pi^2} \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} d\omega = \frac{V(k_BT)^4}{2\hbar^3 c^3\pi^2} \int_{0}^{T/T_D} \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

Ha jóval a 10² K nagyságrendű Debye-hőmérséklet alatt vagyunk, akkor az integrálás felső határába nyugodtan beírhatjuk a végtelent. Ekkor gyakorlatilag megkapjuk a Stefan-Bolztmann-törvényt:

$$E \propto T^4 \quad \Rightarrow \quad c \propto T^3$$

A fajhő ekkor arányos a hőmérséklet harmadik hatványával!

Ha jóval a Debye-hőmérséklet fölött vagyunk, akkor $e^x-1\approx x$ közelítés tehető. Ezzel elvégezve az integrált:

$$E = \frac{V(k_B T)^4}{2\hbar^3 c^3 \pi^2} \int_{0}^{T_D/T} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{V(k_B T)^4}{6\hbar^3 c^3 \pi^2} \left(\frac{T_D}{T}\right)^3.$$

Azaz:

 $E \propto T$.

Így magasabb hőmérsékleten a fajhő közel konstans érték, ez a Dulong–Petit-szabály.

Záróvizsga tematika

Záróvizsga tematika

 Tételek
 A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktul

 megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és

 magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A

 kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszerkezet | A magfizika

 alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok |

 Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

Ezúton is szeretnénk köszönetet mondani mindenkinek, aki vette a fáradtságot és szerkesztéssel, vagy megjegyzésekkel segítette a tételek kidolgozását. Továbbá gratulálunk mindenkinek a záróvizsgák eredményeihez.

A szerkesztők nevében: Jeffrey

Általános bevezető:

Az itt szereplő tematikus bontást régebbi záróvizsgák anyagai alapján próbáltuk meg összeállítani, illesztve a BSc-n elhangzottakhoz, és a valószínű elvárásokhoz.

Az itt található tételcímeket gyakorlatilag véglegesnek tekintjük. Az egyes tételekben felsorolt fogalmak azokból kerültek összeválogatásra, amelyeket szerintünk illik tudni, akár tanultuk, akár nem, ugyanis igen nagy valószínőséggel kérdezhetik. Ezen felül a felsorolt fogalmak csak tájékoztató jellegűek, az egyes tételek lapjain további fogalmak is szerepelhetnek ezeken túl, amiket kell vagy érdemes tudni.

A tételeket nem lehet diszjunktan és egyértelműen szétválasztani, továbbá sok helyen a modern és a klasszikus rész sokban átfed, ezért van, hogy ugyanaz a lap áll két témakör mögött, illetve ugyanaz a fogalom több helyen is előkerül. Leginkább a logikai egységre törekedtünk a besorolásokkor és a címek megfogalmazásakor.

Megjegyzés: Ahol nem voltunk biztosak benne, hogy egy rész a kötelező tananyag része, vagy kitekintésként gondoltuk, hogy a megértést segíti, de szinte biztos, hogy nem kérik számon, azon szakaszok címébe (*)-ot tettünk.

FONTOS! Szerkesztés előtt mindenkit nyomatékosan megkérek, hogy olvassa el a záróvizsgára vonatkozó tételszerkesztési irányelveket.

Valamint figyeljétek a szerkesztési időbeosztást!

Képlettár

• pár fontosabb (nevesített) képlet

A klasszikus mechanika alapjai

- Mérés, mértékegységek, dimenzióanalízis
- Kinematikai alapfogalmak, mozgás leírása különböző koordinátarendszerekben.
- Statika, dinamika, Newton-törvények, erőfogalom, mozgásegyenlet, tehetetlen és súlyos tömeg, Eötvös-kísérlet.
- Gyorsuló koordinátarendszerek, jelenségek a forgó Földön, tehetetlenségi erők, Foucault-kísérlet.
- Munka tétel.
- Pontrendszerek. Merev testek: statika: egyensúly feltétele, típusai, dinamika: forgások, tehetetlenségi tenzor, pörgettyűk

A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása

- Virtuális munka elve, d'Alembert-elv
- Gauss féle legkisebb kényszer
- Hamilton-elv.
- Legkisebb hatás elve{Maupertuis-elv}
- Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenletek.
- Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek.
- Hamilton függvény, kanonikus egyenletek.
- Kanonikus transzformációk, ciklikus koordináták.
- Hamilton-Jacobi egyenlet. {Hatásváltozók, invariáns tórusz, Poisson-zárójelek}
- Szimmetriák és megmaradási tételek.
- Klasszikus energia, impulzus és impulzusmomentum megmaradási tételek tömegpontra és pontrendszerre {Liouville-tétel}.

A relativitás elmélet alapjai

- Inerciarendszer, Galilei-, Lorentz-transzformáció, relativisztikus hatások, paradoxonok.
- A relativitáselmélet kísérleti alapjai: Michelson-Morley kísérlet.
- Relativisztikus kinematika, relativisztikus dinamika.
- Négyesimpulzus, energia-impulzus megmaradás a relativitáselméletben. {Energia-impulzus tenzor}
- Energia és tömeg ekvivalencia, tömegdefektus.

Egzaktul megoldható fizika problémák

- Csillapított- és kényszerrezgések, rezgések összetétele, csatolt rezgések, lineáris lánc
- Kepler-probléma (bolygómozgás, kúpszeletek, kozmikus sebességek).
- Potenciálvölgy, oszcillátor, rotátor, Coulomb-potenciál (hidrogénatom).
- Klasszikus határesetek. Eltűntető és keltő operátorok.

Folytonos közegek mechanikája

- Rugalmas és képlékeny alakváltozások, Hooke-törvény, speciális deformációk.
- A deformációval kapcsolatos mennyiségek (Young-modulus, Poisson-szám, {Lamé-állandók}, energiasűrűség, feszültség- és deformációs tenzor)
- Hullámterjedés deformálható testekben, Doppler-effektus
- Folyadékok tulajdonságai, hidrosztatika, Torricelli-kísérlet, úszás feltétele és stabilitása, felületi feszültség Laplace-törvények, felhajtóerő.
- Áramlások jellemzése, Bernoulli-egyenlet, tökéletes folyadék áramlása, Euler-egyenletek, viszkózus folyadék áramlása, örvények, turbulencia. {Navier-Stokes-egyenletek}

Fenomenologikus termodinamika

- Kinetikus modell, ideális gázok.
- Termodinamikai állapotjelzők, hőtágulás, ideális gáz és folyamatai, állapotegyenlet.
- Gázok munkája, nyílt és zárt folyamatok, Carnot-folyamat, bezin- és dízelmotor.
- Főtételek.
- Termodinamikai potenciálok, fundamentális egyenlet.
- Fázisátalakulások jellemzői, típusai, Gibbs féle fázisszabály, fázisdiagramok. {skálatörvények}
- Kémiai potenciál, fázisegyensúlyok.

Elektro- és magnetosztatika, áramkörök

- Coulomb- és Gauss-törvény, szuperpozíció elve, stacionárius áram.
- Vezetők, szigetelők, dielektrikumok, kondenzátor, magnetosztatika.
- Stacionárius áram, áramköri törvények: Kirchhoff-törvények, Ohm-törvény.

Elektrodinamika

- A Maxwell-egyenletek
- Indukció
- Az elektromágneses tér makroszkópikus mennyiségei
- RLC elemek, áramkörök
- Váltakozóáram
- Elektromos áram a mindennapokban

Hullámegyenlet és hullámoptika

- Hullámegyenletek származtatása, megoldásai, EM-hullámok előállítása.
- Hullámok vákuumban, dielektrikumban, hullámjelenségek, diszperzió, csoport és fázissebesség, Doppler-effektus.
- Retardált potenciálok.
- Antennák. {hullámvezetők, üregrezonátorok}
- Dipólsugárzás, szórás szabad töltésen (Rayleigh-szórás). {multipólsugárzások}
- Hullámjelenségek: törés, visszaverődés, interferencia.
- Polarizáció, Fresnel-formulák, diffrakció (skaláris elmélet, Fraunhofer és Fresnel), nemlineáris optika.

Geometriai optika és alkalmazásai

- Fény, fénysugár, eikonál, Fermat-elv, analógia a klasszikus mechanikával. Paraxiális közelítés.
- Optikai eszközök (távcső, mikroszkóp), mátrix reprezentáció, leképezési törvények, felbontóképesség.
- Optikai jelenségek a természetben, kausztikák.

A kvantumelmélet alapvető kísérletei

- Hőmérsékleti sugárzás, foto-, Compton-effektus.
- Rutherford-kísérlet, atommodellek.
- Davisson-Germer-kísérlet, Stern-Gerlach-kísérlet, Einstein-de Haas-kísérlet, Zeeman-effektus.
- Az elektron adatainak mérése (Millikan-kísérlet).

A kvantummechanika elméleti háttere

- A kvantummechanika matematikai háttere, kvantummechanikai reprezentációk, Schrödinger és Heisenberg kép.
- Fizikai mennyiségek operátorai, sajátfüggvények, sajátértékek.
- Határozatlansági elv, szuperpozíció.
- A hullámfüggvény valószínűségi értelmezése, a fizikai állapot leírása.
- Szabad részecske hullámfüggvénye, anyaghullámok.
- Impulzusmomentum operátor, sajátértékei, sajátfüggvényei.
- Schrödinger-egyenlet, a Schrödinger-egyenlet szeparálása sugár és szögfüggő részekre.
- Spin, Pauli-egyenlet
- Korrespondancia elv, Ehrenfest-tétel.
- EPR paradoxon, Bell-egyenlőtlenség.

Atom- és molekulaszerkezet

- Kvantummechanikai közelítő módszerek {Perturbációszámítás, Variációszámítás, Hartree-Fock közelítés}
- Atomi energiaszintek, emissziós-, abszorpciós spektrumok.
- A hidrogénatom spektruma, felhasadások, Lamb-féle eltolódás
- Spektrumvonalak felhasadása külső térben: Stark- és Zeeman-effektusok
- Szórás centrális térben, hatáskeresztmetszet, Rutherford-kísérlet.
- Kvantumátmenetek: alagútjelenség, Raman- és infravörös spektroszkópia.
- He-atom, Kétatomos molekulák, Pauli-elv.
- Periodusos rendszer, kémiai ismeretek kvantummechanikai alapjai.

A magfizika alapjai

- Az izotóp térkép, atommagok tömege, mérete, kötési energiája.
- A cseppmodell és a félempírikus kötési formula.
- Maghasadás, magfúzió, radioktivitás, sugárzás és anyag kölcsönhatása.
- Radioaktív bomlások, magátalakulások.
- Elemi részecskék és alapvető kölcsönhatások.
- Kísérleti eszközök (GM cső, buborékkamra, szcintillátor)

A termodinamika statisztikus alapozása

- Egyensúlyi feltételek
- Termodinamikai potenciálok, állapotjelzőkre és az entrópiára vonatkozó összefüggések.
- A termodinamika főtételei.
- Az egyensúly stabilitása, fluktuációk.
- Maxwell-féle sebességeloszlás
- Mikroállapotok foglama, Boltzmann entrópia.
- Mikrokanonikus, kanonikus, nagykanonikus tárgyalásmód, egyszerű alkalmazások.

Kvantumstatisztikák

- Bose-Einstein-eloszlás, ideális Bose-gáz, klasszikus határeset, Bose-Einstein kondenzáció.
- Hőmérsékleti sugárzás, Stefan-Boltzmann törvény.
- Fononok, szilárdtestfizikai alkalmazások (diszperziós reláció).
- Fermi-Dirac-eloszlás, Ideális Fermi-gáz, klasszikus határeset. Degenerált Fermi-gáz.
- Elektronfajhő, kvantumkorrekciók. {Bethe-Sommerfeld sorfejtés, Landau-paramágnesség}

Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok

- Ritka gázok állapotegyenlete, viriál sorfejtés, Van der Waals gázok.
- Mágnesség statisztikus elmélete: Ising modell.
- Atomi paramágnesség, atomi diamágnesség, Pauli szuszceptibilitás, Landau diamágnesség.
- Ferro-, antiferro-, ferrimágneses anyagok, ferromágneses domainek, hiszterézis.
- Curie-Weiss-törvény.
- Speciális anyagok: spinüveg, mágneses ellenállás, szupravezetés.

Kristályos anyagok fizikája

- Pontcsoportok, Bravais-rácsok, szimmetriák.
- Bloch tétel, adiabatikus szétcsatolás.
- Diffrakció, kinetikus elmélet. Ewald-szerkesztés. Elektron- és röntgendiffrakció sajátosságai.
- Elektronoptika, elektronmikroszkóp.
- Rácsrezgések termikus hatásai.

Nemegyensúlyi folyamatok leírása

- Irreverzibilis folyamatok. {az idő nyila}
- Master egyenlet, részletes egyensúly.
- Entrópia és szabadenergia.
- Ingadozási jelenségek: Brown-mozgás, diffúzió, Langevin-egyenlet, Brown-mozgás potenciálban (Drude modell).
- Vezetési jelenségek
- Kereszteffektusok

Az asztrofizika alapjai

- Newton-féle gravitációs erőtörvény.
- Az ősrobbanás elmélet alapvető feltevései, a Hubble-törvény, Friedmann-egyenletek szemléletes értelme.
- Galaxisok kialakulása, morfológiája.
- A HR diagram és a csillagfejlődés szemléletes képe, csillagok energiatermelése.
- Kompakt objektumok: fehér törpék, neutroncsillagok, fekete lyukak.
- Megfigyelés alapjai: luminozitás, magnitúdó, vöröseltolódás.

A klasszikus mechanika alapjai

Mérés, mértékegységek, dimenzióanalízis^[1]

Mérés

A fizikai fogalmakat (út, idő, sebesség, tömeg stb.) mérhető mennyiségekkel tesszük egyértelművé (egzakttá). A *mérés* általában valamilyen *önkényesen megválasztott* egységgel történő *összehasonlítás*. A mérés eredményét a *mértékegység* és a *mérőszám* együtt fejezi ki. Azt, hogy milyen mennyiség mértékegységéről van szó, az illető mennyiség *mértékével, dimenziójával* adjuk meg (például a sebesség dimenziója a hosszúság dimenziójának és az idő dimenziójának a hányadosa). A mértékegység megválasztása megállapodás kérdése.

Mértékegységek

Ebben a szakaszban főleg az SI mértékegységrendszerben használt alap mértékegységekre (alapmennyiségekre), illetve azok definícióira térnék ki. A mértékegységre definíciót az előző szakaszban láthattunk. *Alapmennyiségnek* nevezzük azokat a mértékegységeket, melyek nem vezethetők vissza korábban értelmezett mértékegységekre. Amelyek visszavezethetők, azokat *származtatott* mennyiségeknek hívjuk. A fizikai mennyiségek összessége a *mértékegységrendszer*, melynek alapját az alapmennyiségek képezik. Megállapodás kérdése, hogy mit választunk alapmennyiségnek.

A mértékegységek egységesítésére tett legsikeresebb próbálkozás az SI (Systéme International d'Unités) nemzetközi mértékegységrendszer. Alapmennyiségei: hosszúság, idő, tömeg, elektromos áramerősség, termodinamikai hőmérséklet, anyagmennyiség, fényerősség. Az SI mértékegységrendszer az alapmennyiségekből, kiegészítő mennyiségekből, és az egységek többszörösét vagy törtrészét kifejezni segítő prefixumokből (előtagokból) áll.

SI alapmennyiségek

Az *idő* mértékegysége a másodperc, jele: s. A másodperc az alapállapotú cézium-133 atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás 9 192 631 770 periódusának időtartama.

A *hosszúság* mértékegysége a méter, jele: m. A méter annak az útnak a hosszúsága, melyet a fény vákuumban $\frac{1}{299792458}$ másodperc alatt megtesz.

A *tömeg* mértékegysége a kilogramm, jele: kg. A kilogramm az 1889. évben Párizsban megtartott 1. Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet által a tömeg nemzetközi etalonjának elfogadott, a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi hivatalban, Sévres-ben őrzött platina-irridium henger tömege.

A *villamos áramerősség* mértékegysége az amper, jele: A. Az amper olyan állandó villamos áram erőssége, mely két egyenes, párhuzamos, végtelen hosszúságú, elhanyagolhatóan kicsiny kör keresztmetszetű és egymástól 1 méter távolságban, vákuumban elhelyezkedő vezetőben fenntartva, e két vezető között méterenként $2 \cdot 10^{-7}$ newton erőt hoz létre.

A *termodinamikai hőmérséklet* mértékegysége a kelvin, jele: K. A kelvin a víz hármaspontja termodinamikai hőmérsékletének $\frac{1}{273.16}$ -szorosa.

Az *anyagmennyiség* mértékegysége a mól, jele: mol. A mól annak a rendszernek az anyagmennyisége, amely annyi elemi egységet tartalmaz, mint ahány atom van 0,0012 kilogramm szén-12-ben. (A mól alkalmazásakor meg kell határozni az elemi egység fajtáját; ez atom, molekula, ion, elektron, más részecske vagy ilyen részecskék meghatározott csoportja lehet.)

A *fényerősség* mértékegysége a kandela, jele: cd. A kandela az olyan fényforrás fényerőssége adott irányban, amely $540 \cdot 10^{12}$ hertz frekvenciájú monokromatikus fényt bocsát ki és sugárerőssége ebben az irányban $\frac{1}{683}$ -ad watt per szteradián.

SI kiegészítő mennyiségek

1 fok a teljes szögnek 360-ad része. 1 fok = 60 szögperc, 1 szögperc = 60 szögmsodperc. 1 radián annak a középponti szögnek a nagysága, melynek ívhossza egyenlő a kör sugarával. A szög ívmértékben kifejezett nagysága: $\varphi = \frac{s}{r}$, ahol s a körív hossza, r a kör sugara. A teljes szög ívmértékben 2 π , mivel a sugár a kör kerületére 2 π

-szer mérhető fel. 360 fok = 2π radián.

A térszöget *szteradiánban* mérjük (jele: sr). A szteradián a gömbsugár négyzetével egyenlő területű gömbfelületrészhez tartozó középponti térszög. Képlete: $\Omega = \frac{A}{r^2}$, ahol A a gömbfelületrész területe, r a gömb sugara. A teljes térszög a következő formula alapján adható meg: $\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$

SI prefixumok

A következő prefixumok használatosak 10^{-18} -tól 10^{18} -ig sorrendben felírva, két szomszédos prefixum között 1000-szeres a különbség: atto, femto, piko, nano, mikro, milli, egy(ség), kilo, mega, giga, tera, peta, exa.

Dimenzióanalízis

A mérések célja a vizsgált jelenségek minél pontosabb megismerése. A mérés többször elvégezhető, különböző személyek által reprodukálható, ezáltal az adott jelenséget irányító törvények megismeréséhez kerülhetünk egyre közelebb. A törvényszerűségek megfogalmazása többnyire matematikai képletekkel, egyenletekkel történik. A jelenség megértését az eredményekből kapott törvényszerűségek elméleti értelmezése teszi teljessé.

A kísérletezés és az adatkiértékelés során nagyban megkönnyítjük saját dolgunkat, ha figyelembe vesszük, hogy a legtöbb fizikai mennyiség mérőszámmal és mértékegységgel rendelkezik, s a különböző fizikai törvényeket leíró egyenletek két oldalán álló kifejezéseknek azonos *dimenziójúnak* kell lennie. A fizikai mennyiségek dimenzióját úgy értelmezzük, hogy mint az adott mennyiség mérésekor használatos alapmennyiségek összességét. A mechanikával kapcsolatos problémákban leggyakrabban a hosszúság (L), tömeg (M) és idő (T) dimenzió szerepel. A származtatott mennyiségek (pl. v - sebesség, F - erő, ρ - sűrűség) dimenziója minden esetben az alapdimenziók hatványának szorzataként jelenik meg: dim $v = LT^{-1}$, dim $F = MLT^{-1}$, dim $\rho = ML^{-3}$.

Legyen x bizonyos $x_1, x_2, ..., x_N$ paraméterek X függvénye, azaz: $x = X(x_1, x_2, ..., x_N)$.

A paraméterek közül néhány kísérletileg is változtatható. A fenti függvénykapcsolat feltérképezése jelenti a fizikai törvény megismerését, a rá vonatkozó matematikai összefüggések felállítását. A fizikai törvények gyakran hatványalakban jelennek meg. Ekkor: $x = \varphi(x_1, x_2, ..., x_N) \cdot (x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_N^{\alpha_N})$ alakú, ahol $\varphi(x_1, x_2, ..., x_N)$ dimenzió nélküli függvény. A fenti egyenletből tehát a dimenziókra vonatkozóan a következő egyenletet kapjuk:

 $\dim x = \dim(x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_N^{\alpha_N}).$

Mechanikai mennyiségek esetén: dim $x = L^p M^q T^r$, dim $x_i = L^{p_i} M^{q_i} T^{r_i}$ (i = 1, 2, ...)A fenti egyenletbe történő behelyettesítés után: egyrészt: $1 = L^{(p-p_1\alpha_1-p_2\alpha_2-...-p_N\alpha_N)} M^{(q-q_1\alpha_1-q_2\alpha_2-...-q_N\alpha_N)} T^{(r-r_1\alpha_1-r_2\alpha_2-...-r_N\alpha_N)}$,

másrészt:

 $p = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \dots + p_N\alpha_N$ $p = q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \dots + q_N\alpha_N$ $r = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \dots + r_N\alpha_N$

egyenletekre jutunk. (Az alapegységek dimenziói a vektortér bázisvektoraihoz hasonlóan viselkednek.) A fenti lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek az $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$ mennyiségek. Az egyenletrendszernek általában több megoldása van, ezek közül lehet kiválasztani azokat, melyek fizikailag reálisan írják el a keresett törvényt. Ez a dimenzióanalízis alapgondolata, mellyel bizonyos sejtések tartalmilag reális formában fogalmazhatók meg.

Kinematikai alapfogalmak, mozgás leírása különböző koordinátarendszerekben^[2]

Kinematikai alapfogalmak

- A mozgás az ember legősibb élménye. A mozgás során a testek egymáshoz viszonyított helyzete változik.
- Ahhoz, hogy egy test mozgását leírhassuk, célszerű kiválasztani egy másik testet *vonatkoztatási rendszert* , amelyhez viszonyítva megadjuk a szóban forgó test hely-, illetve helyzetváltozását. Vonatkoztatási rendszer lehet például a tanterem, mint rögzített test, amelyhez viszonyít leírjuk a kísérletekben felhasznált testek mozgásást.
- Az anyagi pont mozgását vonatkoztatási rendszerhez rögzített *koordiánta-rendszerben* írjuk le. A koordiántarendszer kezdőpontjából (origójából) az anyagi ponthoz húzott szakaszt (amely időfüggő is) r helyvektornak nevezzük, r(t)-vel jelöljük.
- Pálya: az a görbe, amelyet az anyagi pont mozgása során leír.
- A pálya teljes hosszának, vagy egy részének hossza az út, jele: s.
- A pálya két, kezdő- és végpontját összekötő irányított szakasz az elmozdulás, jele: Δr . Az elmozdulás hossza általában nem egyezik meg a két pont között megtett út hosszával.
- A pálya alakja függ a vonatkoztatási rendszertől (pl. egy a megfigyelt anyagi ponthoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerben egész más alakú a pálya, mint egy nem mozgóban).
- A sebesség általánosított definíciója: tetszőleges görbén mozgó test esetén képezzük az elmozdulás és a közben eltelt idő hányadosát:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

Ebből pillanatnyi sebesség: $\mathbf{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\right) = \lim_{t \to t_0} \left(\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}\right) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \dot{\mathbf{r}}(t_0)$

A fentiekben a helyvektorból vezettük le a sebesség definícióját. Most vezessük le az elmozdulás-vektorból:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Belátható, hogy a fenti képlet jobb oldalának első tagja az egységnyi hosszúságú érintő irányú t (tangenciális) vektorhoz tart, míg a bal oldalát egyszerűen v-vel jelölhetjük. A fentiekből látható, hogy a helyvektorból és az elmozdulásvektorból számolt pillanatnyi sebesség közötti összefüggés:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{t}$$

Egy mozgó pont sebessége derékszögű koordináta-renszerben: $\mathbf{v}(\mathbf{t_0}) = \sqrt{\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0) + \dot{z}^2(t_0)}$.

• A gyosrulás általánosított definíciója: tegyük fel, hogy *v*(t) sebességet minden időpillanatban ismerjük. Ekkor a pillanatnyi gyorsulásvektor:

$$\mathbf{a}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}\right) = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{t_0} = \dot{v}(t_0) = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{t_0} = \ddot{r}(t_0)$$

A gyorsulás meghatározása derékszögű koordináta-rendszerben: $\mathbf{a}(\mathbf{t_0}) = \sqrt{\ddot{x}^2(t_0) + \ddot{y}^2(t_0) + \ddot{z}^2(t_0)}$.

- Hajítás: függőleges: egyszerű gyorsulási feladat, a gyorsulás nagysága g. vízszintes és általános: mindig felbontható a mozgás egy egyenes vonalú egyenletes mozgást és egy szabadesést leíró komponensre. A test pillanatnyi állapota ezek szuperpozíciójával írható le.
- Körmozgás: kényszerfeltétel: a test egy rögzített, r sugarú pályán, egy adott (rögzített) középpont körül mozoghat.
 Főbb mennyiségek:
 - *Periódusidő*: egy körülfordulás ideje, jele: T, mértékegysége: másodperc. (Fordulatszám = 1/T).
 - *Szögelfordulás*: adott idő alatt a kiindulási helyzetből történő elfordulás szöge. Jele: φ , vagy $\Delta \varphi$ (ha két időpont közötti szögváltozást nézzük).
 - *Ívhossz*: adott idő alatt befutott pályaszakasz (ívhossz, mert ez a kör kerületének törtrésze), jele: $s = \Delta \varphi \cdot r$.

- Sebesség: időegység alatt befutott ívhossz: $v = \frac{s}{t}$.
- Szögsebesség: egységnyi idő alatti szögelfordulást adja meg; jele: $\omega = \dot{\varphi}$.
- A sebesség és a szögsebesség közötti kapcsolat: v = 2rπ/T → ω = 2π/T.
 A fentiek alapján a körmozgás sebessége, a kerületi sedbesség: v = rω².

A körmozgást végző test sebességének iránya pillanatról pillanatra, változik, ezért a körmozgást végző test gyorsul. A gyorsulás értéke:

$$|\Delta v| = 2vsin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$
. Kis szögekre azonban: $\Delta\varphi \ll 1 \rightarrow sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2}$. Ennek alapján a fenti kifejezést

a következőképpen írhatjuk át:

 $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = v \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = v\omega = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}.$ A gyorsulás iránya megegyezik a sebességváltozás irányával, ami $\Delta \varphi \rightarrow 0$ határesetben merőleges a sebbességre, és a kör középpontja felé mutat. Ezért az egyenletes körmozgást végző test gyorsulását centripetális gyorsulásnak nevezzük., amelyet a fentebbi kifejezéssel adhatunk meg. Vektoros alakban pedig:

$$\mathbf{a}_{cp} = r\omega^2 \mathbf{n} = \frac{v^2}{r} \mathbf{n} = v\omega \mathbf{n}$$
, ahol *n* a kör középpontja felé mutató (normális) egységvektor.

Egyenletesen gyorsuló körmozgás esetén mind az ívhossz, mint a szögelfordulás az idő négyzetével arányos, és szöggyorsulást, bevezetjük а amely а szögsebesség idő szerinti első deriváltja: bevezetjük a szöggyorsulást, amely $\beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \rightarrow \varphi = \frac{\beta}{2}t^2, \omega = \beta t, \beta =$ állandó.

Szögsebességvektor: vegyünk egy Q pontot a körmozgás síkjára merőlegesen, amiből kiinduló, a körmozgás rögzített pontja felé irányuló egységyektor és a szögsebesség értékének szorzata a szögsebességvektor. Válasszunk egy r vektort, mely a Q pontból a test aktuális helyére mutat, és a rendszert úgy alakítsuk ki, hogy (e, r, v) jobbsodrású rendszer legyen. Ekkor a pillanatnyi sebesség: $\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$

A harmonikus rezgések a körmozgás adott egyenesre levetített változatai.

Mozgás leírása különböző koordinátarendszerekben

Kiindulási alapként a Descartes-koordinátákat használom (DK - x, y, z), ehhez írom fel a különböző egyéb koordinátarendszerekre történő átszámítást oda és vissza.

Hengerkoordináták (HK)	Gömbi koordináták (GK)
ho, arphi, z	r, ϑ, φ
дк→нк	DK→GK
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
z = z	$\vartheta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$
DК←НК	DK←GK
$x = \rho cos\varphi$	$x=rsin\vartheta cos\varphi$
$y = \rho sin\varphi$	$y=rsin\vartheta sin\varphi$
z = z	$z = rcos\varphi$

A sebességek/gyorsulások kiszámítása a Descartes-koordináták alapján történik, csak x, y, z helyére mindig a másik koordinátarendszerbeli megfelelőjét kell behelyettesíteni (természetesen a deriválási szabályok figyelembevételével).

Simulósík és simulókör



Legyen egy mozgó pont t időpillanatban a pályagörbe P pontjában. Ehhez felvesszük egy kis idővel korábbi, majd egy kis idővel későbbi (P'(t') és P"(t")) pontokat. A P', P, P" ponthármas egy síkot határoz meg, illetve ezen a három ponton keresztük kör rajzolható, melynek középpontja a P'P és a P"P szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontja. Ha t' \rightarrow t és t" \rightarrow t, akkor a fent nevezett síkot simulósíknak, a kört simulókörnek nevezzük, melynek sugara R(P). A térgörbe P pontbeli görbületét a $g(P) = \frac{1}{R(P)}$. Kis sugárhoz nagy görbület tartozik, az egyenes görbülete minden pontban nulla. A síkgörbe görbületi sugara egyébként minden olyan pontban, ahol $y'(x_0) \ll 1$, ott körülbelül: $\frac{1}{R(x_0)} \cong y''(x_0)$

A természetes koordinátarendszer

A térgörbe a P pont környezetében belesimul a simulósíkba. A görbe adott pontbeli **t** érintő egységvektora a simulókör középpontja felé mutató **n** egységvektorra merőleges. A fenti két vektor a simulósíkban van. Erre a síkra válasszunk egy merőleges egységvektort, amely a P pontból indul ki, méghozzá úgy, hogy a (**t**, **n**, **b**) jobbsodrású, derékszögű rendszer legyen. A (**t**, **n**, **b**) koordinátarendszert természetes koordinátarendszernek nevezzük. Sebesség:

$$\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{t} = (R\dot{\varphi}) \cdot \mathbf{t}$$
, gyorsulás: $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v} \cdot \mathbf{t} + v \cdot \dot{\mathbf{t}} = \dot{v} \cdot \mathbf{t} + v\dot{\varphi} \cdot \mathbf{n} = \dot{v} \cdot \mathbf{t} + \left(\frac{v^2}{R}\right)\mathbf{n}$

Csavarmozgás	Ciklois mozgás	Spirál	Logaritmikus spirál
$x(t) = Rcos(\omega t + \varphi)$	$x = R(\varphi - \sin\varphi)$	$r(t) = v_0 t + r_0$	$r(t) = r_0 - (v_0 \cos\alpha) \cdot t$
$y(t) = Rsin(\omega t + \varphi)$	$y = R(1 - \cos\varphi)$	$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$	$\varphi(t) = -tg\alpha \cdot (ln r(t) - lnC)$
$z(t) = ct + z_0$		$r(\varphi) = v_0 \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{\omega_0}\right) + r_0 = a\varphi + b$	$r(\varphi) = r_0 e^{-\left(\frac{\varphi}{tg\alpha}\right)}$

Speciális térbeli mozgások

A sebességek kiszámítása itt is az idő szerinti első deriváltakkal történik.

Newton törvények, statika, dinamika, erőfogalom, mozgásegyenlet, tehetetlen és súlyos tömeg, Eötvös-kísérlet

Statika

A statika a mechanikának az az ága, mely a különböző rendszerekre ható, vagy azokban ébredő erőket, forgatónyomatékokat/momentumokat vizsgálja statikus egyensúlyban, azaz olyan állapotban, ahol a testek egymáshoz viszonyított helyzete időben nem változik, vagy ahol a komponensek és struktúrák állandó sebességgel mozognak. Statikus egyensúlyban a rendszer nyugalomban van, vagy a tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A mozgó testeket a dinamika vizsgálja.

Dinamika

A különböző fizikai jelenségek időbeli fejlődését vizsgálja.

Erőfogalom

- Empirikus: Az erő bármi olyan hatás, mely egy tömeggel rendelkező testet gyorsulásra késztet. Rugós erőmérőnél a rugó azért nem gyorsul, mert benne ellenerő ébred.
- Dinamikai: Adjuk meg a mozgásállapot-változást a sebességváltozás és a tömeg segítségével. Ha két teljesen egyforma kocsit ütköztetünk, azok "sebességet cserélnek" az ütközés után. Ha különbözőeket, akkor a sebességváltozások nem lesznek egyenlőek, de megfelelő (önkényes) szorzók bevezetésével egyenlővé tehetőek: $m_A \Delta v_{AB} = m_B \Delta v_{BA}$. A m_i szorzók az ütköző kocsik tulajdonságát fejezik ki. Belátható, hogy három testet páronként ütköztetve a fenti egyenlet mintájára kapott három egyenletből álló túlhatározott egyenletrendszer megoldható, a testekre jellemző együtthatót találtunk. Vezessük be az impulzusváltozás (lendületváltozás) mennyiségét: $\Delta p = m \Delta v$, ahol m a fentebb megismert szorzó, a test tömege. A kocsikat különböző minőségű rugós erőmérőkkel ellátva tapasztalható, hogy ugyanaz a mozgásállapot-változás különböző idő alatt is végbemehet, a mechanikai kölcsönhatás folyamatának elemzésére szolgáló erőt ezért célszerű az $F = \frac{dp}{dt}$ alak felírása (ezt az összefüggést impulzustételnek is nevezik).

felirasa (ezt az összerüggest impulzüstetelnek is nevezi

Newton törvények, tehetetlen tömeg

- 1. Tehetetlenség törvénye: erőhatás mentes inerciarendszerben minden test nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.
- 2. Mozgás törvény (dinamika alaptörvénye): különböző erők, különböző gyorsulásokat hoznak létre a testeken, de az arány jellemző a testre, ez a **tehetetlen tömeg**. $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \rightarrow m = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{a}}$.
- 3. Hatás-ellenhatás törvénye: Ugyanakkora, de ellentétes irányú erő ébred minden párkölcsönhatásban.
- 4. Erőhatások függetlenségének elve (szuperpozíció): A test úgy mozog, mint a ráható erők által egyenként létrehozott mozgások eredője. $\sum_{i} \mathbf{F}_{i} = \mathbf{F}$

Mozgásegyenlet

A dinamika alaptörvénye a testre ható eredő erő és a test gyorsulása között állapít meg kapcsolatot. A törvény segítségével, ha az erőket ismerjük, akkor a test mozgására következtethetünk, ha a test kinematikai jellemzőit ismerjük, akkor az erőkről nyerhetünk információkat. A tapasztalat azt mutatja, hogy az erők igen sokszor a kölcsönhatás természetétől függetlenül, pusztán az erőt kifejtő test meghatározott paramétereinek (pl. a helykoordinátáinak) függvényében megadhatók. Az ilyen függvényeket *erőtörvényeknek* nevezzük. Azt az egyenletet, amit akkor kapunk, ha a dinamika alaptörvényébe beírjuk az erőtörvényeket, valamint a gyorsulás helyébe a helyvektor második deriváltját, *mozgásegyenletnek* nevezzük. Azt $m \cdot \mathbf{\ddot{r}} = \mathbf{F}$ mozgásegyenlet általában a mozgás pályáját meghatározó másodrendű differenciálegyenlet. Ahhoz, hogy a mozgás pontos leírását megadjuk, az erők mellett valamely pillanatban ismernünk kell a mozgás kinematikai jellemzőit is (vagyis a *kezdőfeltételeket*).

Tehetetlen és súlyos tömeg

Newton második törvényében - mint fentebb látható - a tömeg, mint a tehetetlenség mértéke jelenik meg. A tehetetlen tömeg számértéke alapján a testek sorrendbe rakható aszerint, hogy mennyire gyorsulnak az adott erő hatására.

Newton gravitációs törvényében azonban a testeknek az a tulajdonsága nyilvánul meg, hogy *mennyire vonzzák egymást*. Ez egészen távolinak tűnhet a tehetetlen tömeg fogalmától, megkülönböztetésül nevezzük el súlyos tömegnek, és helyettesítsünk be a mozgásegyenletbe:

$$m_{1t}\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{m_{1s}m_{2s}}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

A fenti mozgásegyenletben az egyes test mindkét tulajdonsága szerepel. A kérdés az, hogy a súlyos, és a tehetetlen tömeg egyenlő-e, egyszerűsíthetünk-e m_1 -gyel? Newton fonalinga-kísérletekben vizsgálta ezt a kérdést, ahol adott

fonalhosszúság mellett változtatta a lengő test anyagi minőségét és mérte a periódusidőt. $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{B} \frac{m_t}{m_s}}$, ahol B

a Föld sugarára és tömegére jellemző állandó, l a fonal hossza, m_t és m_s pedig a súlyos és tehetetlen tömeg. Ha a kettő eltérő lenne, akkor az anyagi minőségtől függően változna az inga lengésideje. Newton mérési pontosságon belül ilyet nem tapasztalt, azaz a tehetetlen és a súlyos tömeg aránya állandó, az anyagi minőségtől függetlenül. A súlyos és tehetetlen tömeg arányát igen nagy pontossággal Eötvös Loránd mérte.

Eötvös-kísérlet

Eötvös az $\frac{m_t}{m_s}$ arányt az általa kifejlesztett torziós ingával mérte (1889-ben). A mérés a következő elven alapult: a forgó Földhöz képest nyugvó testre - inerciarendszerből szemlélve - hat a Föld gravitációs vonzásából származó \mathbf{F}_{gr} erő, valamint a talaj által kifejtett **K** kényszererő. A két erő tartja körpályán a testet: $m_t \mathbf{a}_{cp} = \mathbf{F}_{gr} + \mathbf{K}$, $(a_{cp} = r\omega^2 = R\cos\psi \cdot \omega^2)$.

A test **G** súlyvektora a Föld középpontjából húzott sugárral ϵ szöget zár be. Ez a szög megadható az \mathbf{F}_{gr} , \mathbf{F}_{cp} , **G** vektorokból álló háromszögre:



 $\frac{\sin\epsilon}{\sin(\psi+\epsilon)} = \frac{|\mathbf{F}_{cp}|}{|\mathbf{F}_{gr}|} = \frac{m_t R \cos\psi \cdot \omega^2}{m_s g_{90^o}} = \left(\frac{m_t}{m_s}\right) \frac{R \omega^2 \cos\psi}{g_{90^o}} \mathbf{A}$ fenti egyenlet teremt kapcsolatot a súlyos és a tehetetlen tömeg között. A $\psi = 45^o$ földrajzi szélességen a súlyos és a tehetetlen tömeg megegyezősége esetén $\epsilon = 357^\circ$. Ha ϵ adott helyen, különböző testekre más és más lenne, az azt jelenteni, hogy a súlyos és tehetetlen

tömeg aránya anyagi minőségtől függ. Eötvös módszere a következő volt: A torziós inga vízszintes rúdjára azonos magasságban függesztett testeket. A rúd egyik végére platina hengert, a másik végére pedig különböző anyagú testeket. Ha a két test súlyának iránya különbözik, akkor a torziós szál kissé elcsavarodik. Ha az inga rúdját K-Ny irányba állítva egyensúlyba állítjak, akkor nem lehet megállapítani, hogy a torziós szál csavarodásmentes állapotában hol lenne az ingarúd egyensúlyi

helyzete. amennyiban azonban az egész ingatestet, a torziószálat tartalmazó műszerházzal és a felfüggesztéssel együtt száznyolcvan fokkal elforgatjuk, akkor az első helyzetben ható forgatónyomaték ellentétes irányúvá válik, emiatt az ingarúdnak az első mérési helyzethez képest el kellett volna fordulnia. Ilyet azonban Eötvös nem tapasztalt, pedig a 357" milliomod részét is képes volt kimutatni a műszere. A tehetetlen és súlyos tömeg közötti eltérés Eötvös méréseiben: $\Delta \kappa < 1 : 20000000 = 5 \cdot 10^{-8}$.

Gyorsuló koordinátarendszerek, tehetetlenségi erők

Ha egy egyenes vonalon egyenletesen gyorsuló koordinátarendszerben végzünk kísérleteket, akkor azt tapasztaljuk, hogy:

- A magára hagyott test gyorsul,
- A nyugalom fenntartásához erő kell.

Ezek alapján a Newton-törvények nem tarthatóak fenn eredeti alakukban. Ez azt jelenti, hogy a gyorsuló rendszer nem inerciarendszer. Ebben az esetben a számítások úgy végezhetőek el, ha bevezetünk egy fiktív erőt, amely a mozgástörvényben a ható erőkből vonódik le, és értéke a koordinátarendszer gyorsulása szorozva a tekintett test tömegével:

$$F - F' = ma$$

a' ekkor a relatív gyorsulás.

Ha a koordinátarendszerünk forgó mozgást végez, akkor az szintén nem lesz inerciarendszer. Belátható, hogy ekkor tetszőleges V vektor nyugalmi rendszerben vett időderiváltjára és a forgórendszerben vett deriváltjára a következő kapcsolat áll fennt:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d'V}{dt} + \omega \times V$$

Ezt alkalmazva a helyvektorra kétszer, megkapjuk a gyorsulásokat és a tömeggel beszorozva a fiktív erőket. A kifejezés ekkor:

$$F - ma_0 - m\left[\omega \times (\omega \times R)\right] - 2m\left(\omega \times v'\right) - m\left(\frac{d\omega}{dt} \times R\right) = ma$$

Az első korrekciós tag az egyenes gyorsulásnál is fellépett transzlációs tag, a második a centrifugális erő, a harmadik a Coriolis-erő, a negyedik az Euler-erő.

Jelenségek a forgó Földön

A fentiek egy életszerű alkalmazása a forgó Földön megfigyelhető jelenségek számolása. A Föld gyakorlatilag egyenletesen forog, így az Euler-erő nem lép fel. A centrifugális erő a kettős keresztszorzat hatására a forgási tengelytől kifelé mutat. Ennek hatására a nehézségi erő csökken, továbbá irányát is megváltoztatja egy kicsit. A centrifugális erő hatása a Föld lapultsága is. Igen kis mértékben a nehézségi erő vektora érzékeny a közelében levő anyagsűrűség eloszlására. Ezt igen érzékeny műszerekkel, például az Eötvös-ingával ki lehet mérni, ennek segítségével próbáltak több helyen az országban kőolajat keresni.

Mozgó testek esetén játszik szerepet a Coriolis-erő. Célszerű lehet a szögsebességet a lokális felszínre merőleges és érintőleges komponense bontani. Ekkor a Coriolis-erőnek három tagja lesz amelyek három rokon jelenségért felelősek:

- A vízszintesen elindított test az északi féltekén jobbra, délen balra térül el,
- A lefelé mozgó testek keletfelé, a felfelé mozgó testek nyugatra térülnek el,
- A kelet felé mozgó testekre az erő függőlegesen felfelé hat, a nyugatfelé mozgókra lefelé.

A második pont igen nagy jelentőségű a mérsékeltövi ciklonok leírásában, amelyek mozgására igen nagy hatással van a Coriolis-erő.

Foucault-kísérlet

Szintén az előbbiekhez tartozik a Jean Foucaoult által demonstrált kísérlet, amelyben egy felfüggesztett és lengésbe hozott inga lengéssíkja lassan elfordul, ahogy a lengés vízszintes sebessége miatt a fenti első pontban leírt erő hat rá.

Munka tétel

Definiáljuk F erő *munkáját* úgy, mint az erő és az erő irányába eső elmozdulás szorzatát: $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$, ha F erő α szöget zár be az elmozdulás irányával. Az erő azonban helyről helyre változhat, vezessük be az elemi munkát, amelyen olyan kis szakaszokon nézzük az erőt, ahol az állandónak tekinthető. Az *elemi munka* definíciója: $\delta W_i = F_i \cos\alpha_i \Delta s_i$.^[3] A teljes munka ekkor: $W = \sum_i \delta W_i = \sum_i F_i \Delta s_i \cos\alpha_i$ $\overline{\Delta s \to 0}$ $W = \int_0^s (F_i \cos\alpha_i) \, ds_i \to W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_{(\text{ahol } \mathbf{F} \text{ és s vektorok})}.$

Eddig egyenes pályával és változó erővel foglalkoztunk, most nézzük a teljesen általános, görbe vonalú pályát (g). Ezen felvehetünk tetszőlegesen kicsiny ívdarabokat, amelyeket az ívdarab kezdőpontjából a végpontjába mutató elmozdulásvektorral helyettesítünk. Az ívdarabok hosszával a nullához tartva a következőt kapjuk (egyébként az F erő (g) görbe mentén vett vonalintegrálját): $W = \int_{(g)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A,(g)}^{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. A munka skalármennyiség, értéke pozitív és negatív is lehet. Dimenziója: ML^2/T^2 , mértékegysége: $1J = 1N \cdot m = 1\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$

A munkatétel leírásához induljunk ki az impulzustételből: $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, és szorozzuk meg az egyenletet a pálya kicsiny szakaszát megadó $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \Delta t$ elemi elmozdulással. Ekkor az elemi munka:

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} \cdot \Delta t = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \Delta t = m\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v}, \text{ mivel } \Delta \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Delta t.$$

És használjuk fel azt is, hogy: $\Delta \left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right) = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v})^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = m\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{2}m(\Delta \mathbf{v})^2,$
amiből elemi sebességmegváltozás esetére az következik, hogy:
 $\Delta \left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right) = m\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} \rightarrow \delta W = \Delta \left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right).$ Az elemi munkára adódó járulékokat a teljes pályára
összeadva a következőt kapjuk: $W = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2$, ahol \mathbf{v}_2 és \mathbf{v}_1 rendre a test sebessége a pálya

Az
$$E_k = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$$
mennyiséget *kinetikus*, vagy *mozgási energiának* nevezzük.

Impulzus-tétel

Pontosabb megfogalmazása Newton második törvényének: $\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d \mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m \cdot \mathbf{v})}{dt} = \frac{d \mathbf{p}}{dt}$, azaz az erő az impulzus - lendület - idő szerinti első deriváltja. Ezt az összefüggést impulzustételnek nevezik.

Impulzusmomentum-tétel

Írjuk fel a dinamika alaptörvényét pontszerű testre és szorozzuk balról vektoriálisan a test helyvektorával:

 $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$. Az egyenlet jobb oldalát alakítsuk át a differenciálási szabályok figyelembe vételével a következőképpen: $\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$. Mivel \mathbf{r} idő szerinti első deriváltja, azaz a sebességvektor párhuzamos \mathbf{p} impulzusvektorral, ezért a vektoriális szorzatuk nulla, a jobb oldal első tagja ezért zérus.

Vezessük be az *impulzusnyomatékot (perdületet)*: $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. Ami a forgatónyomatékkal a következő kapcsolatban áll: $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{N}}{dt}$.

A dinamika alaptörvényének közvetlen következményeként kapott összefüggés azt fejezi ki, hogy a pontszerű testre ható erők forgatónyomatékainak eredője megegyezik a test impulzusnyomatékának időderiváltjával. Ezt az összefüggést nevezik impulzusmomentum-tételnek, vagy más néven perdülettételnek.

Pontrendszerek

Pontrendszerről akkor beszélünk, ha tömegpontoknak olyan halmazát tekintjük, amelyek között csak centrális erők hatnak. A tömegponok közötti erőket *belső erőknek*, a környezetből eredő erőhatásokat *külső erőknek* nevezzük.

Pontrendszerek tételei

Az egyes tömegpontok mozgásegyenleteinek összegzéséből kapható a következő összefüggés:

$$\sum_{i} \mathbf{F}_{i}^{(k)} + \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i} m_{i} \ddot{\mathbf{r}}_{i}$$

A hatás-ellenhatás törvénye miatt a belső erők teljes szummája zérus.

Impulzus-tétel

A fenti szummából egy időderiváltat kiemelhetünk:

$$\sum_{i} \mathbf{F}_{i}^{(k)} = \frac{d}{dt} \sum_{i} m_{i} \mathbf{v}_{i}$$

Az időderiválás mögött a pontrendszer teljes impulzusa áll, ez a pontrendszer impulzus-tétele.

Tömegközéppont-tétele

Egy pontrendszer mozgása jellemezhető dinamikai szempontból egyetlen pont mozgásával, amely pontban egyesül a pontrendszer összimpulzusa. Másképp megfogalmazva, bármely pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha benne a rendszer össztömege lenne egyesítve, és rá a rendszerre ható erők eredője hatna. Ennek a pontnak a helyvektora:

$$\mathbf{r}_{TKP} = \frac{\sum_{i} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i} m_i}$$

Impulzusmomentum-tétel

Ha az N darab tömegpont mozgásegyenleteit vektoriálisan megszorozzuk a helyvektorral, és összeadjuk őket, akkor a belső erők forgatónyomatékai megfelelő felbontások után kiejtik egymást, hasonlóan az impulzustételben látottakhoz. A végeredményben az időderiváláts hasonlóan kiemelve:

$$\sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{i}^{(k)} = \frac{d}{dt} \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{p}_{i}$$

Baloldalon a rendszerre ható erők eredő forgatónyomatéka áll, jobboldalon a deriválás alatt pedig a rendszer összeimpulzusnyomatéka (perdülete). Ez a pontrendszerre vonatkozó impulzusmomentum-tétel.

Az impulzusmomentum felbontható egy saját- és egy pályaösszetevőre. A pályaösszetevő időbeli megváltozása a tömegközéppontra ható külső erők forgatónyomatéka. A sajátösszetevőre a változás a tömegközépponti rendszerben felírt helyvektorokkal felírt forgatónyomatékok összege a külső erők hatására.

Munka-tétel

A mozgásegyenleteket most kis elmozdulásokkal beszorozva az erők által végzett munkák összegét kaphatjuk meg. Itt nem esnek ki az erők, ezért az eredményben is megmarad a külső erők összmunkája, és a belső erők összmunkája. A kettő összege egyenlő a kinetikus energia megváltozásával:

$$W_k + W_b = \Delta \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v_i}^2$$

Az energiakifejezés átírható a tömegközéppont mozgásából származó járulék és az akörüli mozgásból származó járulék összegáre:

$$\frac{1}{2}\sum_{i}m_{i}\mathbf{v_{i}}^{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i}m_{i}\right)\cdot\mathbf{v}_{0}^{2} + \frac{1}{2}\sum_{i}m_{i}\epsilon_{i}^{2}$$

ahol ϵ_{i-k} a tömegközépponthoz viszonyított sebességek.

Merev testek

Merevnek nevezzük azt a testet, amelyre tetszőleges kölcsönhatás során fennáll, hogy közben bármely két pontjának távolsága állandó. Matematikai alakban ezt a következőképpen fejezhetjük ki: legyen a merev test tetszőleges két pontjának valamely O vonatkoztatási pontból húzott helyvektora r_A és r_B (A és B pontba mutatnak). Ekkor a két pont közötti

$$|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B| = d(A, B)$$

távolság állandó. A merev test helyzetét három, nem kollineáris pontjának koordinátáival jellemezhetjük. A test egy A pontjának rögzítése után a merev test pontjai a rögzített pont körüli gömbfelületen mozoghatnak. Ha a testnek egy másik, B pontját is rögzítjük, akkor a test az A és B ponton átmenő tengely körül még elfordulhat. A tengely egyenesén kívül fekvő, egyébként tetszőleges harmadik, C pontjának rögzítésével már az egész test helyzete megadható. A három pont helyének megadásához kilenc koordináta szükséges. A merev kötés miatt azonban ezek között három összefüggést írhatunk fel; például azt, hogy a három pont közül bármely kettőnek a távolsága állandó. Mivel a kilenc adat közül három nem független, a merev test helyzete általában 6 független adattal jellemezhető. Ezt úgy mondjuk, hogy a szabad merev testnek 6 szabadsági foka van (ebből három egy tetszőleges pont x,y,z koordinátája, a másik három pedig az Euler-szögek).

Sztatika: az egyensúly feltétele

Ha egy szabad merev test mozgását le akarjuk írni, két út áll rendelkezésre. Az egyik az, hogy bevezetjük a merev test helyzetét jellemző 6 független koordinátáit, és ezekben, mint általános koordinátákban a Lagrange-féle egyenleteket felírjuk; a másik pedig az, hogy kiindulunk a bármely pontrendszerre érvényes tömegközéppont-tételből és impulzusmomentum-tételből:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_{0} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{i[1]}$$
$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_{i}(\mathbf{r}_{i} \times \dot{\mathbf{r}}_{i}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{i[2]}$$

Egy anyagi pontnál az egyensúly szükséges és elégséges feltétele, hogy a pontra ható összes erők eredője zérust adjon. Merev testnél az ennek megfelelő feltétel nem elegendő, mert [1] szerint csak a tömegközéppont gyorsulásának hiányát jelenti, így a körülötte történő forgó mozgások lehetségesek (pl. erőpár). Tehát a forgómozgás akkor nem lép fel, ha az erők forgatónyomatékának eredője is zérus. Az összes egyensúlyi feltételt megkaphatjuk a virtuális munka elvéből:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Ez a d'Alembert elv speciális esete $\ddot{\mathbf{r}}_i = 0$. Így szabad merev testre az alábbi feltételek adódnak:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{i} = 0_{\text{és}} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{i} = 0$$

Egy nem szabad merev testnél ugyanezek a feltételek érvényesek, ha a külső erőkbe beleértjük azokat a külső kényszererőket is, amelyek a kényszerfeltételekből – az adot testnek más testekkel való érintkezéséből- származnak. Tehát: Merev test egyensúlyának szükséges és elégséges feltétele, hogy a testre ható összes külső erők eredője és a külső erők (tetszőleges pontra vonatkozó) forgatónyomatékainak eredője zérus legyen.

Az egyensúly típusai

Az egyensúly típusai alatt az egyensúlyi helyzet stabilitását értjük. Ez úgy vizsgálható, hogy a testet kissé kimozdítjuk egyensúlyából és magára hagyjuk. Ha a test a kitérítés után eredeti helyzetének környezetében marad (esetleg visszatér kiinduló helyzetébe), akkor az egyensúlyi stabilis. Ha a test a kimozdítás után eltávolodik az egyensúlyi helyzetéből, és nem tér oda vissza, az egyensúlyi helyzet labilis. Abban az esetben, amikor a test a z új helyzetben is egyensúlyban marad, indifferens egyensúlyról van szó.

Dinamika: forgások

A merev testek forgásának vizsgálatához két koordinátarendszert veszünk fel: az ábrán pirossal jelölt koordinátatengelyeket tartalmazó K'-t és a kékkel megrajzolt K koordináta-rendszert. Az ábrán látható szögeket Euler-szögeknek nevezzük. Segítségükkel (és a koordinátákkal) egy merev test helyzete egyértelműen megadható a Descartes-koordinátarendszerben. Az N vonal az ún. csomóvonal, azaz az a vonal, ami a két sík metszéspontja.



Az alábbi összefoglalásban az egyes szögek mellett az általuk felvett szögintervallum látható, ill. az, hogy melyik tengely körüli helyzetváltozást írja le.

β	$[0,\pi]$	csomóvonal
γ	$[0, 2\pi]$	piros Z
α	$[0, 2\pi]$	kék z

A forgási szögsebesség pedig kifejezhető a K és K'-beli koordináták, ill. az adott tengelyek és csomóvonal irányú egységvektorok segítségével:

$$\begin{split} \omega &= \dot{\beta} \cdot \mathbf{n_{cs}} + \dot{\gamma} \cdot \mathbf{n_{Z}} + \dot{\alpha} \cdot \mathbf{n_{z}} \\ \text{Az egységvektorok K-beli és K'-beli koordinátái pedig leolvashatóak az ábráról.} \end{split}$$

A tehetetlenségi-tenzor

Tehetetlenségi tenzor

Vegvünk fel egy Descartes-koordinátarendizerti Ebben a merev test tömegközépontjának helyvektorát jelöljük r_0 -val. Rögtlsünk a tömegközépponthoz is egy koordináta-rendszert, amiben egy, a nerev testhez tartozó tetszöleges pontnak a helykoordinátája r_i . Egy merev test pontjának a sebessége a testre jellemző transzlációs sebességből és a forgásból származó kerületi sebesség határozza meg: $v_i = v_0 + \omega \times r_i$ A merev test kinetikus energija:

$$\begin{split} T &= \sum \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_0^2 + \sum m_i \mathbf{v}_0 (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) + \sum \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)^2 \\ &= T_{haladd} + T_{kblccombs} + T_{forgisi} \end{split}$$

A második tag akkor lesz nulla, ha a testhez rögzített koordinátarendszer kezdőpontját a tömegközéppontba helyezzük, vagy ha rögzítjük a testet.

A harmadik tag felírásához először kifejtjük a vektoriális szorzatot, majd a kapott kifejezés négyzetét vesszük. Ennek eredményeképpen kapjuk az alábbi kifejezést:

 $T_{forg} = \frac{1}{2} \omega \theta \omega$

ahol heta tehetetlenségi tenzor elemei:

Másik felírási módja:

 $\theta_{ij} = \sum m_k (\mathbf{r}_k^2 \, \delta_{ij} - (r_k)_i (r_k)_j) = \int \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{ij} - r_i r_j) dV$

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_{xx} & -\theta_{xy} & -\theta_{xx} \\ -\theta_{yx} & \theta_{yy} & -\theta_{yx} \\ -\theta_{xx} & -\theta_{xy} & \theta_{xx} \end{pmatrix}$$

A tenzor egyes elemeit deviációs nyomatékoknak nevezzük, a főátló egyes elemei pedig a tehetetlenségi nyomaték komponensei.

Ha a testen kívüli pontból húzunk egy forgástengelyt a testen keresztül, és egy tetszőleges pontot kíválasztunk a merev testen belül, aminek a tengelytől mért távolsága I, a ponttól vett távolsága r_i és a tengely irányú egységvektor n, akkor a test tehetetlenségi nyomatéka:

 $\boldsymbol{\theta} = \sum m_i l_i^2 = \sum m_i |\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i| = \boldsymbol{n} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{n}$

A Steiner-tétel segítségével megadhatjuk a test egy O pontján átmenő tetszőleges forgástengelyre vett tehetetlenségi nyomatékát.

 $\theta = \theta_{TKP} + ms^2$

Részletesebb leírás: Merev test impulzusmomentuma:

$$\sum_{i} \vec{r_i} \times \vec{p_i} = \sum_{i} m_i \vec{r_i} \times \vec{v_i} = \sum_{i} m_i \vec{r_i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) = \sum_{i} m_i (r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r_i} \vec{\omega}) \vec{r_i}) = \sum_{i} m_i (\mathbf{I} r_i^2 - \vec{r_i} \otimes \vec{r_i}) \omega = \mathbf{\Theta} \vec{\omega}$$

Ahol Θ a tehetetlenségi tenzor. A forgómozgás egyenlete:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}$$

ekkor a következő alakú:

$$\frac{d(\vec{\Theta \vec{\omega}})}{dt} = \vec{M}$$

Rögzített tengely körüli forgás esetén a tengely irányába mutató egységvektorral az arra a tengelyre vontkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

 $\Theta = \vec{e}\Theta\vec{e}$

A rögzített tengely körüli forgómozgás egyenlete:

$$\Theta \dot{\omega} = M$$

Pörgettyűk

Pörgettyűnek hívunk minden olyan merev testet, amelynek csak egy pontja (a támaszpontja) van rögzítve, vagy általánosabban, amelynek az alátámasztási pontja körüli mozgása ennek a pontnak mozgásától elkülönítve tárgyalható. A pörgettyűnek 3 szabadsági foka van. A mozgásegyenletek felírásához a pörgettyűt belehelyezzük egy forgó és egy nyugvó koordinátarendszerbe. A két koordinátarendszer origója megegyezik, a forgó rendszer nem feltétlenül forog együtt a pörgettyűvel.

Legyen $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ valamely **A** vektor változásának sebessége a nyugvó koordináta-rendszerben (K). Ha a forgó rendszerhez képest A nem változik, a nyugvó rendszerben a változás csak a forgásból áll:

 $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$

Amennyiben a pörgettyű a forgó rendszerhez képest mozgást végez, az egyenlet így módosul (K'-ben):

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \omega \times \mathbf{A}$$

Ha $\mathbf{A} = \mathbf{N}$, akkor az egyenletünk:

$$\frac{d \mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{N}$$

Ha K' főtengely-rendszer: $N_i^{,i} = \omega_i^{,i} \theta_i; \omega^{,i} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

A fenti egyenletből a forgatónyomatékot kifejezve és a keresztszorzás elvégezve komponensenként megkapjuk az Euler-egyenleteket:

$$\theta_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (\theta_2 - \theta_3) = M_1$$

$$\theta_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 (\theta_1 - \theta_3) = M_2$$

$$\theta_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (\theta_2 - \theta_1) = M_3$$

Erőmentes pörgettyű

 $\mathbf{M} = 0$; két főtehetetlenségi nyomaték megegyezik : $\theta_1 = \theta_2$, ezek pedig nem egyeznek a harmadikkal. Így $\theta_3 \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = all. = \omega_0$. Jó közelítéssel a Föld is ez.

Ha bevezetjük az $\alpha = \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_1} \omega_0$ mennyiséget, és ezt, valamint az előbbi feltételeket behelyettesítjük, lineáris

oszcillátort leíró eredményt kapunk: $\omega' = (A\cos(\alpha t + \delta), A\sin(\alpha t + \delta), \omega_0)$

A szögsebesség az Euler-szögekkel is kifejezhetők. A felíráskor fel kell írni a szögsebesség komponenseit az Euler-szögekkel kifejezve nyugvó koordináta-rendszerben. Ezután az egyes komponenseket egyenlővé tesszük az oszcillátor rezgését leíró megfelelő komponensekkel, és a kapott egyenletrendszer megoldjuk.

Erőmentes aszimmetrikus pörgettyű

 $\theta_3 > \theta_2 > \theta_1$

az energiamegmaradás:

$$2E = \theta_1 \omega_1^2 + \theta_2 \omega_2^2 + \theta_3 \omega_3^2 [1]$$

impulzusmomentum:

 $N^2 = \omega_1^2 \theta_1^2 + \omega_2^2 \theta_2^2 + \omega_3^2 \theta_3^2$ [2] = $N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 \Rightarrow$ gömbfelület Az $\omega_{1\text{és}} \omega_{3\text{az}}$ alábbi Knorr rafinériával határozható meg:

 $\theta_1 \cdot [1] - [2] \to \omega_3^2$ $\theta_3 \cdot [1] - [2] \to \omega_1^2$

A második komponens pedig a 2. Euler-egyenletből fejezhető ki.

Szimmetrikus súlyos pörgettyű

Ennek a pörgettyűnek a mozgását csak abban az esetben vizsgáljuk, amikor a pörgettyűnek van szimmetriatengelye, a rögzített O pont ennek egyik pontja, és az S tömegközéppont is a szimmetriatengelyen van, O-tól OS=s távolságra. A térben rögzített koordinátarendszer Z tengelye mutasson függőlegesen felfelé, a testhez rögzített X'Y'Z' fő tehetetlenségi rendszer (amelynek tengelyeire rendre az A,A,C fő tehetetlenségi nyomatékok és a p,q,r szögsebesség-komponensek vonatkoznak) helyzetét jellemezzük az Euler-szögekkel. A probléma megoldásához felhasználhatjuk a mozgásegyenletek első három integrálját (három elsőrendű differenciálegyenlet a szögekre). Az egyik integrált a T+V=const. energiatétel adja. Ha m a pörgettyű tömege, a potenciális energia (az Euler-szöges ábra!

a TKP a Z' tengelyen van):

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Aq^2 + Cr^2) + mgscos\beta = const.$$

A másik két integrálhoz úgy jutunk, hogy tudjuk azt, hogy a nehézségi erő forgatónyomatéka a Z és Z' által alkotott tengelyre merőleges, ezért a forgatónyomaték z komponense 0. Az impulzusmomentum tétele alapján $N_z = const$. ; $N_z^2 = const$.

A további számítások: $N_z = \mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_z$ felírjuk, majd az energiatételbe p,q,r-et az Euler-szögekkel és deriváltjaival felírva behelyettesítjük. Végül megoldjuk az egyenletrendszert (a megfelelő kezdeti feltételek felírása után: $\dot{\beta} = 0$; $\dot{\alpha} = 0$; $\dot{\gamma} = r_0$).

Gyors pörgettyű

Ez a fajta pörgettyű az előbbinek egy speciális esete: ilyenkor $r_0 \gg \frac{2mgsA}{C^2}$ Ha a mozgást teljesen leírjuk, azt kapjuk, hogy a szimmetriatengelynek a függőlegessel bezárt szöge periodikusan ingadozik a kezdeti és egy ettől kicsit eltérő érték között. Ezt az ingadozást nutációnak nevezzük. Az ingadozások annál kisebbek, így egyúttal annál gyorsabbak, minél nagyobb a pörgettyű kezdeti ^roszögsebessége. A szimmetriatengely vízszintes vetülete pedig állandóan meghatározott irányban forog. A szimmetriatengely e mozgásának, a precessziónak a szögsebessége periodikusan változik 0 és egy maximális érték között. A precesszió és a nutáció együttesen az ún. pszeudoreguláris precessziót eredményezi: a szimmetriatengely végpontja az O rögzített pont köré írt gömbfelület két paralel köre között cikloisszerű görbét ír le.

[1] Tasnádi-Skrapits-Bérces: Mechanika I., 4, 8, 10. §

- [2] Tasnádi-Skrapits-Bérces: Mechanika I., 12, 17, 18, 21, 29. §
- [3] A δW jelölés arra utal, hogy kicsiny munkavégzésről beszélünk. Mivel a munka nem a vizsgált rendszerre jellemző mennyiség, ezért a megváltozásáról nem beszélhetünk, innen a megkülönböztetés.

Záróvizsga tematika Tételek A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktul megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszerkezet | A magfizika alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok | Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása

A mechanika elvei

A klasszikus mechanika alapvető törvényeinek megfogalmazását Newton megtette. Azonban ugyanezek az elvek megfogalmazhatóak számos, a Newton-i axiómákkal ekvivalens, azonban matematikailag más alakban, ami sokszor szemléletesebb, illetve egyszerűbb tud lenni. Ezek a mechanika elvei, amelyek nem bizonyítható axiómák, ezek helyességét a tapasztalatok adják.

A virtuális munka elve

Vegyünk egy N anyagi pontból álló mechanikai rendszert, amelynek koordinátái x_i , y_i , z_i , a ható erőt pedig F_i jelöli. Legyen δr_i az i-edik anyagipontnak a kényszerek által megengedett infinitezimális és **virtuális** elmozdulása. Itt a virtuális alatt azt értjük, hogy nem tartozik ezen elmozulásokhoz időtartam. A tárgyalt rendszer akkor lesz egyensúlyban, ha a ható erők virtuális munkája zérus:

$$\sum_{i=1}^{N} F_i \delta r_i = 0$$

Szabad mozgás esetén minden δr_i tetszőleges, tehát az erővektoroknak kell zérusnak lenniük. Ha van N pontunk, akkor azokhoz 3N darab koordináta tartozik, és ennél kevesebb kényszerfeltétel lehet adott, különben nincs mozgás. Itt most feltesszük, hogy a kényszereink egy felületre korlátozzák a rendszert, és ezért alakjuk így írható:

$$\phi(r_1, r_2, ..., r_N) = 0$$

A kényszerfeltételek a virtuális elmozdulások alatt is kell, hogy teljesüljenek, ebből valamint egy infinitezimális elmozduláshoz tartozó Taylor-sorfejtésből belátható, hogy a kényszerfeltételek a kövektező általános alakba írhatóak:

$$\sum_{i=1}^{N} \operatorname{grad}_{i} \phi_{k} \delta r_{i} = 0 k = 1, ..., s < 3N$$

Ezeket a Lagrange-multiplikátorok módszerével vehetjük figyelembe: egy ismeretlen λ_k szorzóval hozzáadjuk őket a virtuális munka egyenlethez:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(F_i + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \operatorname{grad}_i \phi_k \right) \delta r_i = 0$$

Most a szabad esettel szemben csak (3N-s) darab együttható lesz zérus, de a többinél a Lagrange-multiplikátorokat választjuk úgy, hogy a maradék együtthatók is eltűnjenek. Ekkor úgy tekinthetjük, mintha a virtuális elmozdulások függetlenek lennének, ezért az egyenlőség teljesüléséhez az erők összegének kell zérusnak lennie, ezért:

$$F_i + \sum_{k=1}^s \lambda_k \operatorname{grad}_i \phi_k = 0$$

A második tagot elnevezhetjük kényszererőknek, és ekkor a az egyensúly feltétele, hogy a szabad és kényszererők összege zérus legyen. A $\lambda grad\phi$ -s definícióból az is látható, hogy felületen mozgásnál a kényszererő merőleges a felületre (mivel grad ϕ a felületi normális irányába mutat).

d'Alembert elv és a Lagrange-féle elsőfajú egyenletek

Jean le Rond d'Alembert a virtuális munka elvéhez hasonló kifejezést vezetett be, de az nem csak az egyensúlyt írja le, hanem egyben mozgástörvény is:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{F}_{i} - \dot{\mathbf{p}}_{i} \right) \delta \mathbf{r}_{i} = 0$$

A mechanikai rendszer az elv értelmében úgy mozog, hogy a fenti kifejezés minden időpillanatban teljesül. Szabad rendszerre ez a Newton mozgásegyenletet adja, hiszen tetszőleges : $\delta \mathbf{r}_i$ -re el kell tűnnie a zárójelnek, azaz $\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$. Ha kényszerek is jelen vannak, akkor ismér a Lagrange-multiplikátoros átalakítást végezzük el:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{F}_{i} + \sum_{k=1}^{s} \lambda_{k} \operatorname{grad}_{i} \phi_{k} - \dot{\mathbf{p}}_{i} \right) \delta \mathbf{r}_{i} = 0$$

A virtuális munka elvéhez hasonlóan itt is formálisan függetlenként kezelhetők a megváltozások, így

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^s \lambda_k \operatorname{grad}_i \phi_k$$

Ha feltesszük, hogy a tömeg állandó, akkor $\dot{\mathbf{p}}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$, tehát:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^s \lambda_k \operatorname{grad}_i \phi_k$$

Ezt az egyenletet nevezzük a Lagrange-féle elsőfajú egyenleteknek (N darab van belőlük). Mivel ezek vektor egyenletek, így tulajdonképpen 3N darab egyenletünk van, és ezenkívül az *s* darab kényszeregyenlet. Ez éppen annyi, mint az ismeretlenek száma: 3N darab térkoordináta az idő függvényében, és az *s* darab multiplikátor.

A Gauss-féle legkisebb kényszer

Gauss bevezette a kényszer mértékét:

$$Z = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{m_i} \left(m_i \ddot{x}_i - X_i \right)^2$$

Itt X_i szabaderő. A zárójelben tehát a szabad mozgástól való eltérés áll a kényszerek hatására. Gauss elve a következőt mondja: a kényszerek által megengedett gyorsulásváltozások közül a legkisebb valósul meg. Variációs módszerrel alakítható ez tovább, amikoris csak a gyorsulást variáljuk. Holonom-szkleronom kényszerekre $\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \delta x_i = 0$. Ez időderiválás után: $\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \delta \ddot{x}_i = 0$. Ugyanakkor a kényszert is megvariáljuk:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{M} \left(m_i \ddot{x}_i - X_i \right) \delta \ddot{x}_i = 0$$

Ehhez hozzáadva a szokásos módon Lagrange multiplikátorral a kényszereket:

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(m_i \ddot{x}_i - X_i - \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \right) \delta \ddot{x}_i = 0$$

Ismét a megszokott módon a megválasztás független, illetve ahol nem, ott a Lagrange együtthatókat választjuk meg, tehát:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i - \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}$$

Általános koordináták és a Lagrange-féle másodfajú mozgástörvény

Az eddigi tárgyalásokban a kényszerek, mint független egyenletek voltak figyelembe véve. Ha azonban olyan koordinátákra térünk át, amelyek illeszkednek a kényszerekhez, akkor ezekben ezek a feltételek eltűnnek, így egyszerűbb alakot kapunk a mozgásegyenletekre. Az állítás az, hogy ilyen transzformációk léteznek, az ilyen áttéréssel kapott új koordinátákat általános koordinátáknak nevezzük, és q_k -val jelöljük, az általános sebességeket pedig \dot{q}_k -val. Itt kell megjegyezni, hogy ezek nem feltétlen hosszúság illetve sebesség dimenziójú változók.

A koordináta transzformációs függvények deriváltjaival és kis megváltozásaival átírható a d'Alembert-elv varióciós módszerrel. Ha bevezetjük a $Q_k = \sum_{l=1}^{3N} X_l \frac{\partial x_l}{\partial q_k}$ általánosított erőt, amely nem feltétlen erő dimenziójú, de a

 $\sum_{i} Q_i \delta q_i_{\text{munka dimenziójú. Továbbá bevezetjük a mozgásienergiát: } K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x_i}^2.$ Ezekkel átírva a

d'Alembert-elv a következő alakú lesz:

$$\sum_{k=1}^{f} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0$$

Itt f a szabadsági fokok száma (a 3N szabadság az s darab kényszerrel csökkentve). A tetszőleges variáció miatt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q_k}} - \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k, k = 1, ..., f$$

Ezek a Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek. Ha az erők konzervatívak, akkor felírhatók potenciál deriváltjaként, és ekkor minden K helyére K-V írandó, amelyet elnevezhetünk Lagrange-függvénynek, így a képlet a jól ismert alakot ölti:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, k = 1, ..., f$$

Ezek felhasználásával általános módszert adhatunk a mechanikai problémák megoldására: Ismerjük fel a rendszert jellemző általános koordinátákat, és írjuk fel a transzformációs függvényeket. Az így definiált általános koordinátákkal fejezzük ki a potenciált (V), az általános sebességekkel pedig a kinetikus energiát (K). Végül írjuk fel a Lagrange-függvényt (L = K - V), és belőle a Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenleteket. Az így kapott mozgásegyenlet pedig elvileg megoldható.

Hamilton-féle variációs elv és az Euler-Lagrange egyenletek

A Hamilton által kimondott variációs elv, az eddigieken azért mutat túl, mert nem csupán a mechanikai problémák általános megfogalmazásában használható, hanem az optika és a kvantummechanika törvényeit is egyszerűen meg lehet általa fogalmazni. Konzervatív rendszerre az állítás a következő:

$$S = \int_{t1}^{t2} Ldt =_{\text{extrémum}}$$

Itt S a hatás, L a Lagrange-függvény. Az állítás az, hogy ebből $q_k(t)$ meghatározható. A problémát variációszámítási módszerekkel lehet megoldani, amely egy funkcionált szélsőértékbe vívő függvényeket határozza meg. Ez pont az itteni probléma, hiszen a Lagrange az általánosított koordinátáktól, sebességektől és esetleg az időtől függ, és mi az általánosított koordinátákat keressük. A variációs módszerből adódó egyenletk a következőek:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} = 0, k = 1, ..., f$$

Ezek az Euler-Lagrange egyenletek.

Kanonikus egyenletek, Hamilton-függvény

Az eddig használt Lagrange leírásban másodrendű differenciálegyenletket kaptunk. Az úgynevezett kanonikus egyenletek azzel szemben elsőrendű differenciálegyenleteket szolgáltatnak, amelyek a másodrendűekkel egyenértékűek, azonban kétszer annyi van belőlük. Bevezetjük a kanonikusan konjugált impulzust:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}}$$

És bevezetjük a Hamilton-függvényt:

$$H = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q_k} - L$$

Az Euler-Lagrange egyenletek figyelembevételével, és a Hamilton-függvény teljes differenciájának felhasználásával kapjuk a kanonikus egyenleteket:

$$\begin{split} \dot{q_k} &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p_k} &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{split}$$

Továbbá:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Ha a rendszer konzervatív, és az általánosított koordinátákra való áttérés időfüggetlen, akkor a Hamilton-függvény a mechanikai energiát adja. Ennek a formalizmusnak kiemelkedő szerepe van a kvantummechanika és a kvantumtéreleméletek tágyalásánál.

Ciklikus koordináták, kanonikus transzformáció

Ha a Hamilton-függvény nem függ valamely koordinátától, akkor az ahhoz a koordinátához tartozó konjugált impulzus állandó a kanonikus egyenletek miatt, és azonnal megoldást szolgáltat a mozgásegyenletre ($q_k(t) = \dot{q}_k \cdot t + c = \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot t + c$). Az ilyen tulajdonságú koordinátát ciklikus koordinátának nevezzük.

Értelemszerűen minél több ciklikus kooridnátánk van, annál egyszerűbb megoldani az adott problémát. Ezért érdemes foglalkozni azokkal a transzformációkkal, amelyek változatlanul hagyják a kanonikus egyenleteket, de ciklikus koordinátákra térhetünk át segítségükkel. Ezek a transzformációk tehát olyan koordináták között visznek át, amelyek teljesítik a kanonikus egyenletket továbbá a variációs elvnek is eleget tesznek (a kanonikus egyenletek is abból származtathatóak). Ezek alapján belátható, hogy a variált funkcionálban van egy szabadságunk egy tetszőleges függvény időszerinti deriváltjának erejéig. Ezt a függvény nevezzük alkotó függvénynek, mert segítségével kifejezhetőek a transzformációs szabályok. Az alapján, hogy az alkotó függvényt melyik két változóval fejezzük ki a négy (régi és új koordináta, régi és új impulzus) közül, különböző összefüggéseket kapunk a koordináták és az alkotó függvény között, valamint megkapjuk a Hamilton-függvény transzformácóját is.

Maupertuis-elv (*)

A Maupertuis-elv energiamegmaradó rendszerekre vonatkozik, vagyis a Lagrange-függvény nem függ explicite az időtől. Az elv kimondja, hogy a rendszer által megtett út olyan, hogy a rövidített hatás

$$S_0 = \int p dq = min.$$

ahol az integrált a pályára vett vonalintegrálként kell érteni.

A Hamilton-Jacobi egyenlet

A mozgásegyenletek megoldhatóak egy szélsőséges tanszformációval is, amennyiben a a Hamilton-függvényt zérusra transzformáljuk. Ekkor mind a koordináták, mind az impulzusok deriváltjai nullával egyenlőek a kanonikus egyenletek értelmében. A Hamilton-függvényre vonatkozó transzformációs egyenlet az alkotófüggvénnyel kifejezve a következő:

$$\bar{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}$$

Mivel a végső Hamiltonnak zérust szeretnénk, ezzel a feltétellel egy speciális alkotófüggvényt definiálhatunk, amely a következő egyenletet elégíti ki:

$$0 = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

A Hamilton-függvény a koordináták, az impulzus és az idő függvénye lehet. Ezek közül az alkotó függvénnyel az impulzus is kifejezhető, ezért:

$$0 = H\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Ez a Hamilton-Jacobi egyenlet, és S a hatásfüggvény, amelyet már korábban bevezettünk a Hamilton-féle variációs elvnél. A Hamilton-Jacobi egyenlet abban különbözik az eddigiektől, hogy parciális differenciálegyenlet, ezért határfeltételek is kellenek hozzá, és nehezebb megoldani, ennek ellenére ha nem közvetlenül a mozgásegyenletet akarjuk megkapni, csak összefüggéseket a hatás és a koordináták között, akkor sokfelé jól használható.

A Liouville-tétel(*)

A Hamilton-i mechanikai rendszerekre kimondható a Liouville-tétel, ami azt fogalmazza meg, hogy nem-disszipatív rendszerre a fázistérfogat állandó marad. Ha ρ a fázistérbeli eloszlás függvény, és a rendszer d dimenziós:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial\rho}{\partial q^{i}} \dot{q^{i}} + \frac{\partial\rho}{\partial p^{i}} \dot{p^{i}} \right) = 0$$

Ez azért fontos egyenlet, mert nem csak egyensúlyi szituációkban használható, hanem sokrészecskés bonyolult dinamikai problémákra is, ezért alapvető fontosságú a statisztikus jelenségek tárgyalásában.

Megmaradási tételek, mint szimmetriák következményei

A közismert és a klasszikus mechanikában előbukkanó megmaradási tételek igen egyszerűen következnek a Hamilton-függvényes formailzmusból.

Impulzusmegmaradás

Az impulzusmegmardás a tárgyalási koordinátarendszer eltolásával szembeni invarianciából vezethető le. Ez tulajdonképpen a tér homogenitása: mindegy hogy hova tesszük a mechanikai rendszert, a Hamiltonja ugyanaz, és az események ugyanúgy zajlanak.

Impulzusmomentum megmaradása

Az impulzusmomentum megmaradása a koordinátarendszer elforgatásával szembeni invarianciából vezethető le. Ez tulajdonképpen a tér izotrópiája: mindegy hogy hogyan forgatjuk el a mechanikai rendszert, a Hamiltonja ugyanaz, és az események ugyanúgy zajlanak.

Energiamegmaradás

Ez az időbeli eltolásból következik, azaz mindegy, hogy egy adott kísérletet mikor végzünk el, a lefolyása ugyanaz, a Hamiltonja ugyanaz.

Noether-tétel(*)

A Noether-tétel azt mondja, hogy a Lagrange-függvény szimmetriáihoz hogyan lehet megmaradó mennyiséget rendelni.

Állítás: Ha a Lagrange-függvénynek szimmetriája a:

 $\begin{aligned} q_i &\to q_i' = q_i + \epsilon f_i(q, \dot{q}) \\ \dot{q}_i &\to \dot{q}_i' = \dot{q}_i + \epsilon \dot{f}_i(q, \dot{q}) \end{aligned}$

akkor a következő mennyiség megmaradó:

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} f_i$$

Bizonyítás:

$$L(q_i + \epsilon f_i, \dot{q}_i + \epsilon \dot{f}_i) - L(q_i, \dot{q}_i) = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \epsilon f_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon \dot{f}_i = \sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \epsilon f_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon \dot{f}_i = \epsilon \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i \right) = 0$$

	Záróvizsga tematika
Tételek	A klasszikus mechanika alapjai A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása A relativitás elmélet alapjai Egzaktul
	megoldható fizika problémák Folytonos közegek mechanikája Fenomenologikus termodinamika Elektro- és
	magnetosztatika, áramkörök Elektrodinamika Hullámegyenlet és hullámoptika Geometriai optika és alkalmazásai A
	kvantumelmélet alapvető kísérletei A kvantummechanika elméleti háttere Atom- és molekulaszerkezet A magfizika
	alapjai A termodinamika statisztikus alapozása Kvantumstatisztikák Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok
	Kristályos anyagok fizikája Nemegyensúlyi folyamatok leírása Az asztrofizika alapjai

A relativitás elmélet alapjai

Alapgondolatok

Az idő és a távolság csak absztrakt fogalmak. Attól függ, ki nézi. :)

Vonatkoztatási rendszer

Amikor egy test pozícióját, vagy pályáját akarjuk megadni, valamihez azt viszonyítanunk kell. Viszonyítási alapként felveszünk egy koordinátarendszert (origó, és bázisvektorok, illetve a rendszer időfejlődése, pl.: mozgása, forgása) és ebben tárgyaljuk a mozgásokat. Vannak kitüntetett vonatkoztatási rendszerek, ezeket Newton első törvényével tüntetjük ki: ahol a tehetetlenségi axióma teljesül, azok inerciarendszerek. Különböző mozgású koordinátarendszerekben fellépnek egyéb nemfizikai erők is, az inerciarendszerekben definícióból kifolyólag ilyenek nincsenek. A többi Newton-törvény is inerciarendszerekre érvényes.

Galilei-transzformáció

Newton második axiómája a mozgásokra vonatkozik, azonban az itt tárgyalt differenciálegyenletben van egy szabad konstans, amely a deriválások miatt kiesik, ezért erre invariáns a második axióma. Ez az invariancia a Galilei-transzformációban foglalható össze:

$$r' = r + vt$$
$$t' = t$$

Szavakban elmondva az egymáshoz képest egyenes vonalú egyeneltes mozgást végző koordinátarendszerekben a mechanikai jelenségek azonosan mennek végbe. Az egyes rendszerek között a Galilei-transzformációval térhetünk át.

A Lorentz-transzformáció

Amikor a XIX.-XX. század fordulóján a megpróbálták egységes képbe összehozni a mechanikát és az elektrodinamikát, egyre problémásabb lett az a felismerés, hogy a hullámegyenlet nem invariáns a Galilei-transzformációra. Úgy tűnt, mintha az elektrodinamikában lenne kitüntetett koordinátarendszer, szemben a mechanikával. A korabeliek három feloldását képzelték el a problémának, csökkenő valószínűség szerint:

- A Maxwell féle elmélet hibás, a valódi elmélet Galilei-invariáns.
- A mechanika Galilei-invariáns, az elektrodinamikában van kitüntetett koordinátarendszer, amelyben a fény terjedését lehetővé tevő éter nyugszik.
- Létezik egy mind a mechanikára, mind az elektrodinamikára érvényes relativitási elv, ami nem a Galilei-féle, és ez egyben azt is jelenti, hogy a mechanika törvényeit kell megváltoztatni.

A Maxwell-féle leírást rengeteg kísérlet támasztotta alá, és minden jóslatát sikerült ellenőrizni. A második lehetőséget nem sikerült alátámasztani kísérletekkel, azonban egyre irreálisabb megszorításokat lehett rá adni, amik végső soron tarthatatlanná tették az elméletet. Az új relativitási elmélet kidolgozását Einstein végezte el, két posztulátumra építve:

- A természet törvényei, és a kísérleti eredmények azonosak az egymástól csak egyenes vonalú egyeneltes mozgásban különböző inerciarendszerekben.
- A fénysebessége véges, és forrásának mozgásától független.

Ha feltesszük, hogy a tér izotrop, továbbá az új transzformáció is csoportot alkot a Galileihez hasonlóan, és megengedjük, hogy az idő is transzformálódjon az áttéréskor (és nem szeretnénk véges sebességekből kiindulva végtelen sebességeket kapni a transzformációk és sebességösszeadások során), akkor a 2. posztulátumból és az

izortópiából következik az ívelemnégyzet állandósága ($ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$), a többi feltételből pec Lorentz-transzformációk alakja (1+1 dimenzióban):

$$\begin{split} t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ _{\text{ahol}} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{a Lorentz-faktor.} \end{split}$$

A c konstans értékét a kísérletek adják meg, itt csak az derül ki, hogy határsebesség, mégpedig felső, az kísérleti tény, hogy ez egyezik a fénysebességgel.

A Michelson-Morley kísérlet

A relativitás elmélet kialakulása felé az egyik nagy lökést ez a kísérlet szolgáltatta azzal, hogy nem mutatta ki az éter hatását. Az elméletileg feltételezett éter a fény terjedésének közege lett volna. Ha ez igaz lenne, akkor a közeghez képest relatív mozgást végző megfigyelő másnak méri a fénysebességet. A kísérletet ezért félév különbséggel megismételték, ekkor ugyanis a Föld éppen ellenkező irányban halad a feltételezett éterben, akármilyen mozgást is végez az. A kísérleti elrendezés egy fényforrásból állt, annak a fényét egy féligáteresztő tükörrel kettéosztották, majd az azonos utakon visszaverődő fénysugarakkal interferenciát hoztak létre. Ez az elrendezés ha az azonos utakon más a fénysebesség eltérést tesz láthatóvá az interferencia segítségével. Az elméletileg megjósolt eltérések a vizsgálati időpontokban nem jelentkeztek, ezért erőteljesen kétségessé vált az éter elmélet tarthatósága.

A Lorentz transzformációk következményei

A Lorentz-transzformációk képleteiből több a klasszikus gondolkodással szembenálló jelenség vezethető le. Ezeken felül hasznos, a különböző rendszerek közötti összefüggések is levezethetőek.

Az inerciarendszerek relatív sebessége

Ahogy korábban láttuk, a Lorentz-transzformációk is csoportot alkotnak. Belátható, hogy a transzformáció csak a sebességtől függ, ezért egyparaméteres a csoport, ekkor van úgynevezett kanonikus paramétere. Ez azt jelenti, hogy ha egymásután csoportelemeket hattatunk, akkot az eredő transzformáció előállítható az egyes elemek paramétereinek összegeként (analógiaként gondoljunk 2D-s forgatásokra: az eredő forgatási mátrix előállítható a részforgatások szögeinek összegeként). A Lorentz-transzformációk ezen paraméterét *rapiditásnak* nevezzük, ez tehát összeadódik. Definíciója: $\chi = \operatorname{arcth} \frac{v}{c}$

Levezethető a transzformációs szabályokból, hogy bármely két inerciarendszer (amelyek között a χ paraméterű Lorentz-transzformáció visz át) relatív sebessége:

$$V = c \cdot \mathrm{th}\chi$$

amiből az is következik, hogy ez a sebesség nem lehet c-nél nagyobb. **VIGYÁZAT** Ez az egész csak 1 idő és 1 tér dimenzióban igaz, amikoris a tér-tengely egyirányú a sebességgel. Az általános eset bonyolult, azt érdemes megjegyezni, hogy két egymás utáni, de különböző irányú rendszerbe való áttranszformáció (boost) eredője egy megfelelő irányú boost és egy *forgatás*. Ennek ellenére a rapiditás paraméter az egyirányú boostok kezelésére igen alkalmas, például egy kísérletben a nyaláb és a labor rendszer közötti transzformációkra, amikor a lényeges mozgások egy irányba esnek.
Sebességek összeadása

Az előző formulából a tangens-hiperbolikusz szögösszeadási formuláját felhanszálva:

$$V_3 = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}}$$

Ennek kis sebességű (v << c) határesete visszaadja a klasszikus $V_3 = V_1 + V_2$ formulát.

Paradoxonok

A paradoxonok az egyidejűség relativitására vezethetőek vissza: ha egy koordinátarendszerben adott egy két esemény, akkor létezik olyan koordinátarendszer is, amelyekben ezek egyidejűek, illetve olyanok is, ahol az egyik, és olyanok is, ahol a másik történik hamarabb.



A legfontosabb paradoxonok a következőek:

- Az álló megfigyelő a mozgó tárgyakat rövidebbnek látja: Lorentz-kontrakció
- Az álló megfigyelő a hozzáképest mozgó rendszerekben eltelő időt hosszabbnak látja: idődilatáció.
- Ikerparadoxon: két iker közül az egyik a Földön marad, a másik egy gyorsuló űrhajóban elmegy, majd visszajön a Földre. Ez utóbbi személy fiatalabbként ér vissza. A gyorsuló rendszerekben inerciarendszerváltás történik, ezekben a pillanatokban változik az egyidejűség is.

Relativisztikus fizika

A relativitáselméletben csak olyan mennyiségeket engedünk meg, amelyek invariánsak a Lorentz-transzformációra. Ez azt jelenti, hogy a klasszikusan ismert mennyiségeket valahogy át kell alakítani, hogy ne a Galilei-transzformációra legyenek invariánsak, hanem a Lorentzre. Az általános an levezethető 3+1 dimenziós Lorentz-transzformáció az ívelemnégyzetet változatlanul hagyja:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Ez úgy interpretálható, hogy a relativitáselméletben a tér és az idő együtt alkot egy kovariáns mennyiséget. Hasonlót láthattunk a klasszikus geometriában, az ottani transzformációk a térbeli távolságnégyzetet (skalárisszorzatot) tartották változatlanul, ezzel definiáltuk a vektorokat. Ezzel az analógiával élve vezetjük be itt is a vektorokat, melyeket megkülönböztetésképpen négyesvektornak nevezünk, a négyesvektorok skalárisszorzatát a Lorentz-transzformáció változatlanul hagyja. A klasszikus mennyiségekből tehát négyesvektorokat kell létrehoznunk. Például:

$$k = \left(\frac{\omega}{c}, k_1, k_2, k_3\right)$$
$$p = \left(\frac{E}{c}, p_1, p_2, p_3\right)$$

Ez utóbbi különösen jelentős, hiszen ennek a hossznégyzete a részecske nyugalmitömegével áll kapcsolatban:

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |p|^2 = m^2 c^2$$

Ebből az is következik, hogy ez minden rendszerben ugyanaz. Belátható, hogy az itt definiált négyesimpulzussal egybefoglalható az energia és az impulzusmegmaradás, mert a négyesimpulzus maga a megmaradó mennyiség a relativitáselméletben. Ezt átrendezve az E-p összeüfggést kaphatjuk meg, ami diszperziós relációként is felfogható:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$$

Ez pedig álló részecskére a híres:

$$E = mc^2$$

képletet adja. Nemrelativisztikus esetekben továbbra is visszakapjuk a klasszikus képleteket. A relativisztikus dinamika alaptörvényeként a Newton-törvény relativisztikus megfogalmazását vehetjük. A klasszikus F = ma-val egyenértékű kis sebességekre az

$$F = \frac{d}{d\tau}p$$

ez utóbbi azonban relativisztikusan is igaz, itt τ a részecske nyugalmi rendszerében mért idő (sajátidő), ami kis sebességekre a mindenkori idővel helyettesíthető. Fontos, hogy az időderiválás alól a tömeg nem emelhető ki, hiszen ez is függ a sebességtől, tehát sebességváltozáskor ez is változik.

A fenti energia kifejezésnek van még egy fontos következménye. Ha egy rendszer két állapota közötti átmenet energia kisugárzással, vagy elnyeléssel jár, akkor az a rendszer tömegét is megváltoztatja. Ennek legékesebb példája a periódusos rendszerben megfigyelhető moláristömegek értéke. A periódusos rendszerben szereplő magok mélyebb energiaszinten vannak, mint az alkotóik külön-külön összeadva, ezért a két állapot közötti különbség valamikor felszabadult, és ekkor tömeget is elvitt, tehát a periódusos rendszerbeli tömegek mindig kisebbek, mintha a protonok, és neutronok szabad tömegét adnánk össze. Ezt az effektust nevezik tömegdefektusnak.

Az elektrodinamika relativisztikus formája (*)

Az elektrodinamika már eleve egy relativisztikus diszciplína, így a Maxwell-egyenletek relativisztikus általánosára nincs szükség. Ez úgy fejezhető ki, hogy a Maxwell-egyenletek átírhatók szembeötlően kovariáns egyenletekké.

$$div\vec{B} = 0$$

Következésképpen B felírható mint egy vektorpotenciál rotációja:

$$\vec{B} = rot \vec{A}$$

Ha ezt behelyettesítjük az elektromos tér rotációját leíró egyenletbe, akkor akövetkezőt kapjuk:

$$rot\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

így a zárójelben lévő kifejezés felírható, mint egy skalártér gradiense:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -grad\phi$$

Ez a ϕ skalár- és \vec{A} vektorpotenciálok szokásos definíciója. Könnyen belátható, hogy a potenciálok egyértelműen meghatározzák a térerősségeket, de ez fordítva nincs így. A potenciálok rögzítéséhez mértéket szokás előírni. Ezt a feltételt pedig érdemes úgy megadni, hogy maga is szembeötlően kovariáns legyen. Olyan megszorítást érdemes megtenni, hogy a skalár- és vektorpotenciálokból egy (ϕ, \vec{A})négyesvektort lehessen csinálni.

Belátható, hogy a $j_{\mu} = (\rho, \vec{j})$ áramsűrűség egy négyesvektor. Ekkor az elektrodinamika kontinuitási egyenlete: $\partial^{\mu} j_{\mu} = 0$

Most emlékezzünk vissza Lorenz-mérték definíciójára:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \vec{A} = 0$$

és arra, hogy ezen mértékben a négyespotenciálokra a következő hullámegyenletek adódtak:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \end{pmatrix} \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{A} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0}$$

Namost, mivel a jobboldal négyesvektor, és a d'Alembert operátor a koordinátarendszer megváltozásával nem változik, ezért az $A_{\mu} = (\phi, \vec{A})$ is négyesvektor. Négyesvektor jelölésben a hullámegyenlet:

$$\partial_{\nu}\partial^{\nu}A_{\mu} = \frac{j_{\mu}}{\epsilon_0}$$

Záróvizsga tematika

 Tételek
 A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktul

 megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és

 magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A

 kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszerkezet | A magfizika

 alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok |

 Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

Egzaktul megoldható fizika problémák

Rezgések

Harmonikus oszcillátor

Az egész kvantitatív fizika legalapvetőbb megoldható rendszere a harmonikus oszcillátor. Ez egy olyan tömegpont mozgása, amely $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ alakú potenciálban végez csillapítatlan rezgőmozgást. Ekkor:

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = -kx$$

És a mozgásegyenlet:

$$F = m\ddot{x} = -kx$$

Az általános matematikai alak:

$$\ddot{x} = -\alpha x$$

Ennek megoldása:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

A kezdőfeltételek határozzák meg A-t és ϕ -t, a körfrekvenciára:

$$\omega = \sqrt{\alpha}$$

Csillapított és gerjesztett harmonikus oszcillátor

A fenti probléma két további, bonyolított változata is egzaktul megoldható. Hozzáadhatunk az egyenlethez, egy sebességgel arányos csillapítást:

$$\ddot{x} = -\alpha x - \beta \dot{x}$$

Ekkor a megoldás:

$$x(t) = \exp\left[\frac{1}{2}\left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}\right)t\right],$$

Három elkülönülő régió van, a négyzetgyök alatti mennyiség előjele alapján:

- Ha negatív: alulcsillapított, létrejön oszcilláció, ami lecseng,
- Ha nulla: kritikusan csillapított, egy félhullám lehet az egyensúly felé tartásban, de nincs nullátmenet,
- Ha pozitív: túlcsillapított: a kitérés mindig az egyensúlyi helyzet felé húz, hullámok nélkül.

A fenti differenciál-egynlethez állandó periodikus gerjesztőerőt is hozzáadhatunk:

$$\ddot{x} = -\alpha x - \beta \dot{x} + F(\omega_D)$$

Az előbb részletezett három régió most is ugyanaz, a kezdeti állapotból a rendszer a csak csillapítottnál megfigyelhető relaxációval kerül be a gerjesztési amplitúdó és frekvencia által megszabott oszcillációhoz. Az explicit megoldásokat lásd itt ^[1].

Regések összetétele

Egyszerű trigonometriával belátható, hogy azonos frekvenciájú, de tetszőleges amplitudójú és fázisú harmonikus rezgőmozgások eredője is harmonikus rezgőmozgás, ugyanazzal a frekvenciával. Az amplitudóra az összegzés eredménye:

$$A^{2} = A_{1}^{2} + A_{2}^{2} + 2A_{1}A_{2}\cos(\phi_{1} - \phi_{2})$$

és a fázisszögre:

$$\mathrm{tg}\delta = \frac{A_1\mathrm{sin}\phi_1 + A_2\mathrm{sin}\phi_2}{A_1\mathrm{cos}\phi_1 + A_2\mathrm{cos}\phi_2}$$

Ezek a formulák tetszőleges számú, azonos frekvenciájú harmonikus rezgés összeadására általánosíthatóak.

Két eltérő frekvenciájú, de azonos amplitudójú és fázisú rezgés összetételének eredménye pedig:

$$x(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

$$A_E(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

Az eredő amplitudó időbeli harmonikus változása a lebegés jelensége.

Csatolt rezgések

Csatolt rezgésről akkor beszélünk, hogyha a testeket nem csak az egyensúlyihelyzetükhöz, hanem egymáshoz is harmonikus erő köti. A mozgásegyenletek ekkor:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -D_1 x_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -D_2 x_2 - k(x_2 - x_1)$$

Megfelelő változócserével a csatolás kitranszformálható, és két független harmonikus rezgőmozgást kapunk eredményül. Ezek összege és különbsége adja a helyfüggvényeket. Az itt megjelenő frekvenciákat normálfrekvenciáknak nevezzük. Ha megvizsgáljuk az energiaviszonyokat, akkor azt tapasztaljuk, hogy a két test harmonikus energiáján ($E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2$) kívül fellép egy csatolási energia is:

$$E_{csat} = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$$

A teljes energiamegmaradás ennek a három energiának az összegére érvényes. Az időfejlődés során periodikusan változik az egyik és a másik test rezgési amplitudója, szemléletesen az energia oda-vissza vándorol a két test között.

Lineáris lánc

Tekintsünk egy *N* tömepontból álló sorozatot, amelyet ideális rugók kötnek össze. Tekintsünk el a külső erőtértől. Ekkor az egyes mozgásegyenletek a következő alakúak:

$$m_1 \ddot{x}_1 = k_{12} (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_{12} (x_2 - x_1) + k_{23} (x_3 - x_2)$$

$$\vdots$$

$$m_{N-1} \ddot{x}_{N-1} = -k_{N-2,N-1} (x_{N-1} - x_{N-2}) + k_{N-1,N} (x_N - x_{N-1})$$

$$m_N \ddot{x}_N = -k_{N-1,N} (x_N - x_{N-1})$$

Osszunk át a tömegek *négyzetgyökével* és vezessük be a következő jelölést: $y_i = x_i \cdot \sqrt{m_i}$. Az egyszerűség kedvéért, csak szemléltetésül az egyik középső egyenlet így alakul:

$$\ddot{y}_i = -\frac{k_{i-1,i}}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{y_i}{\sqrt{m_i}} - \frac{y_{i-1}}{\sqrt{m_{i-1}}} \right) + \frac{k_{i,i+1}}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{y_{i+1}}{\sqrt{m_{i+1}}} - \frac{y_i}{\sqrt{m_i}} \right)$$

Az így kapott egyenletrendszer sokkal áttekinthetőbb, ha mátrixos alakba írjuk.

$$\ddot{\mathbf{Y}} = \mathbf{M}\mathbf{Y}$$

Az itt bevezetett **M** mátrix tartalmazza a tömegekből, és rugóállandókból adódó konstansokat. A fenti változócserére azért volt szükség, hogy ez a mátrix szimmetrikus legyen, így a sajátértékei valósak. Ez pedig azért jó, mert ekkor a sajátértékprobléma megoldásával megkapott sajátértékek a normálfrekvenciák négyzeteit adják, a sajátvektorok pedig a rezgési módusokat (azaz, hogy az egyes pontok mekkora amplitúdóval, milyen irányba rezegnek). A mátrixnak mindig lesz egy 0 sajátértéke, ez a transzlációt írja le. Az általános megoldás most is az egyes meghatározott frekvenciák és amplitúdók által definiált harmonikus rezgőmozgások eredője, amiben a szabad paramétereket (összesen 2N darab) a kezdőfeltételek szabják meg.

A Kepler-probléma

A Kepler-probléma a Newtoni-gravitációs erőtörvény hatására mozgó test mozgásegyenletének vizsgálata. Ez tulajdonképpen egy centrális erőtérben történő mozgás, azonban kitüntetett jelentősége volt a csillagászat fejlődésében, hiszen jó közelítéssel írja le a Bolygók mozgását a Nap körül.

A bolygók mozgása

Adott a Newton-i gravitációs erőtörvény, itt most vektoros alakban felírva:

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

itt m az adott bolygó, M a Nap tömege. Ez az erő centrális, azaz a tekintett testek középpontján keresztül hat. Ebből következik, hogy a mozgás síkmozgás, amihez tartozik egy megmaradó mennyiség, az impulzusmomentum:

$$r^2\omega = \lambda$$

A mozgásegyenleteket polárkoordinátákban felírva a gyorsulás radiális egyenlete:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = -\gamma \frac{mM}{r^2}$$

És a síkszöghöz tartozó egyenlet:

$$m\ddot{\phi} = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0$$

hiszen az erőnek nincs ilyen irányú komponense. Ezt az egyenletet az impulzusmomentum állandósága megoldja, tehát csak az első egyenlet megoldása marad hátra. Ennek érdekében az idő szerinti deriváltakat átírjuk szögszerinti deriváltakra, azaz áttértünk a szögre, mint paraméterre. Az eredményül kapható differenciál-egyenlet:

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{\gamma M}{\lambda^2}\right) = -\left(\frac{1}{r} - \frac{\gamma M}{\lambda^2}\right)$$

ami nem más, mint egy harmonikus oszcillátor egyenlete. Ennek ismert a megoldása, amelyből a sugár kifejezhető:

$$r(\phi) = \frac{\lambda^2}{\gamma M} \frac{1}{1 + \frac{A\lambda^2}{\gamma M} \cos(\phi + \alpha)}$$

A koszinuszos tag szorzófaktora az ekcentricitás, a külső tört szorzófaktora a pálya paramétere. A kapott egyenlet egy kúpszelet egyenlete.

A Kepler-mozgások és a kúpszeletek kapcsolata

Az előzőekben bemutattuk, hogy a Kepler-probléma kúpszelet egyenletre vezet, amelyek általános alakja:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\phi + \alpha)}$$

Ekkor három alapvetően különböző mozgás jöhet létre, amelyeket az excentricitás különböztet meg:

- $\epsilon < 1$: Ellipszis (speciálisan, 0 esetén kör),
- $\epsilon = 1$: Parabola,
- $\epsilon > 1$: Hiperbola.

Ezek kifejezhetőek az energiával is:

- E < 0: Ellipszis,
- E = 0: Parabola,
- E > 0: Hiperbola.

Kozmikus sebességek

A fenti energiák fontosak az űrkutatásban. Ha a Földről indítunk egy testet, akkor a legkisebb energiájú stabil pálya a valamely ellipszis pálya elérése. Első kozmikus sebességnek nevezzük a föld sugarával egyező körpálya eléréséhez szükséges sebességet, ez kb. 7,9 km/s. A második kozmikus sebesség a Föld gravitációs terének elhagyása, azaz a fenti esetek közül a parabolikushoz tartozó sebesség, ez kb.: 11,2 km/s. A harmadik kozmikus sebesség az előző, de a Napra viszonyítva, azaz ebben az esetben a naprendszer elhagyásáról beszélünk. Ez megközelítőleg 42,1 km/s.

Kvantummechanikai problémák

Oszcillátor Sommerfeld-módszerrel

A lineáris harmonikus oszcillátor energia operátora:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + \frac{\omega^2 \mu}{2} \mathbf{x}^2$$

Az **x**operátor helyére az x szerinti szorzást, a **P**helyére pedig a $\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ -t írva a sajátérték-egyenlet:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\omega^2\mu}{2}x^2\psi = E\psi, \text{ ebből:}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\Big(E - \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2\Big)\psi = 0.$$
Bevezetve a $k = \frac{2E}{\hbar\omega}$ jelölést és x-ről áttérve a $\xi = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}x$ változóra az egyenlet a következőképpen néz ki:
$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (k - \xi^2)\psi = 0.$$

Az egyenlet aszimptotikus alakja: $\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi^2\psi = 0$. Ennek megoldása: $\psi_a = e^{-\xi^2/2}$. Az eredeti egyenlet megoldását a Sommerfeld-féle polinom-módszer segítségével szeretnénk megkapni, ezért a pontos megoldást $\psi = e^{-\xi^2/2}v(\xi)$ alakban keressük. Ezt beírva a differenciálegyenletbe kapjuk: $\frac{d^2v}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dv}{d\xi} + (k-1)v = 0$. $v(\xi) = \sum_{r=0}^{n} c_r\xi^r$ alakban felírva képezzük $v(\xi)$ első és második deriváltját: $\frac{dv}{d\xi} = -\frac{1}{2}e^{-\xi^2/2}v(\xi)$

$$\frac{dv}{d\xi} = \sum_{r} rc_{r}\xi^{r-1}, \\ \frac{d^{2}v}{d\xi^{2}} = \sum_{r} r(r-1)c_{r}\xi^{r-2}.$$

Ezt beírva *v*differenciálegyenletébe: $\sum_{r} \left((r+2)(r+1)c_{r+2} - (2r+1-k)c_r \right) \xi^r = 0.$

Ez akkor igaz, ha ξ minden hatványának együthatója 0. Így egy rekurzív összefüggést kapunk a ^Cregyütthatók között:

$$c_{r+2} = \frac{2r+1-k}{(r+2)(r+1)}c_r.$$

Belátható, hogy r = n fokszámtól kezdve az összes együtthatónak azonosan 0-nak kell lennie, ezért 2n + 1 = k. Az E és k közötti összefüggés alapján így az energia sajátértékek: $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Az egyes energia sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények: $\psi_n = e^{-\xi^2/2} v_n(\xi)$, ahol $v_n(\xi) = H_n(\xi)$ ún. Hermite-polinom.

Oszcillátor léptető operátorokkal

A harmonikus oszcillátor Hamilton-operátora némi alakítgatás után:

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \frac{m\omega}{2\hbar} \left(x^2 + \frac{1}{m^2\omega^2} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{i}{m\omega} p \right) \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right) + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega (a^{\dagger}a + \frac{1}{2})$$

A léptetőoperátorok:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right)$$
$$a^{\dagger} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{i}{m\omega} p \right)$$

ezek természetesen egymás adjungáltjai. A felcserélési reláció:

 $[a, a^{\dagger}] = 1$

Legyen $a^{\dagger}a = N$ a részecskeszám-operátor. Koncentráljunk ennek a sajátállapotaira:

$$N|n\rangle = n|n\rangle$$

Könnyen megmutatható, hogy ha $|n\rangle$ sajátállapota N-nek, akkor $a|n\rangle$ és $a^{\dagger}|n\rangle$ is:

$$Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle$$

 $Na'|n\rangle = (n+1)a|n\rangle$

az így kapott sajátállapotok nem normáltak. Mivel $a|n\rangle$ normája n, ezért a normált állapotok:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

és hasonlóan:

$$a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

Tehát elindulva egy n sajátérékről, az a eltüntető operátor n-1,n-2,... sajátértékkel generál új N sajátállapotokat. Ezek sorozata viszont nem mehet negatívba, hiszen az N sajátérétke egyben a : $a|n\rangle$ normája ami nem negatív. Ez csak úgy lehet, ha n egész értékéről indulunk, majd elérünk n=0-hoz és akkor:

 $a|0\rangle = 0$

Ebből az egyenletből rögtön adódik az alapállapoti hullámfüggvény, a keltő operátor alkalmazással pedig a gerjesztett állapotok hullámfüggvényei. A spektrum is azonnal leolvasható.

Rotátor

A forgó mozgást végző tömegpontot rotátornak nevezzük. Szabadon forgó tömegpont energia sajátérték egyenlete: $-\frac{\hbar}{2\mu}\Delta\psi = E\psi$. A problémához leginkább a térbeli polárkoordináta-rendszer illeszkedik, ugyanis a forgás

centrumától mért r távolság állandó.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \cot(\vartheta)\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{(\sin(\vartheta))^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right).$$
rendszerben:

r = állandó, ezért $\psi = \psi(\vartheta, \varphi)$ csak a szögektől függ:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{(\sin(\vartheta))^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\frac{2\mu r^2}{\hbar^2} E\psi.$$

Legyen $\mu r^2 = \Theta$ (a tehetetlenségi nyomaték a forgás centrumára vonatkozóan). Az egyenlet a következő alakra módosul:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{(\sin(\vartheta))^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2\Theta}{\hbar^2} E\psi &= 0. \\ \psi(\vartheta, \varphi) = F(\vartheta) G(\varphi) \text{alakban keresve a megoldást:} \end{aligned}$$

$$\begin{split} F''G + \cot(\vartheta)F'G + \frac{1}{(\sin(\vartheta))^2}FG'' + \frac{2\Theta}{\hbar^2}EFG &= 0.\\ \text{\acute{A}talakítva:} & \frac{F''}{F}(\sin(\vartheta))^2 + \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\frac{F'}{F} + \frac{2\Theta}{\hbar^2}E(\sin(\vartheta))^2 + \frac{G''}{G} &= 0.\\ \text{A} \ \vartheta\text{-t\acute{o}l} \text{ \'es a } \varphi\text{-t\acute{o}l} \text{ függő részek külön-külön állandók kell, hogy legyenek:} \end{split}$$

 $\frac{G'}{G} = -m^2$, azaz $G = e^{im\varphi}$.

Az azimutszöget 2π -vel növelve ugyanabba a pontba jutunk vissza, ezért meg kell követelnünk, hogy $e^{im2\pi} = 1$ legyen.

Az F-et meghatározó egyenletnél érdemes a $\xi = \cos(\vartheta)$ változóra áttérni, így az eredeti egyenletet $F/(1-\xi^2)$ -tel megszorozva ($(1-\xi^2) \neq 0$) kapjuk:

$$(1-\xi^2)\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} - 2\xi\frac{\partial F}{\partial\xi} + \left(\frac{2\Theta}{\hbar^2}E - \frac{m^2}{(1-\xi^2)}\right)F = 0.$$

A $\xi = 1$ -ben a differenciálegyenletnek szingularitása van, hogy a megoldás itt is véges legyen, ezért $F(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{|m|}{2}} v(\xi)$. Ezt visszaírva és a kapott egyenlet megoldását a polinom-módszer alapján $v(\xi) = \sum_{r=0}^{r} c_r \xi^r$ alakban keresve kapjuk:

$$\sum_{r} \left((r+2)(r+1)c_{r+2} - \left[(r+|m|)(r+|m|+1) - \frac{2\Theta E}{\hbar^2} \right] c_r \right) \xi^r = 0$$

$$(r+|m|)(r+|m|+1) - \frac{2\Theta}{\hbar^2}$$

Ez alapján a ^Cregyütthatókra egy rekurziós képletet kapunk: $c_{r+2} = \frac{(r+|m|)(r+|m|+1) - \frac{2\Theta E}{\hbar^2}}{(r+2)(r+1)}c_r$. Ahhoz, hogy a sajátfüggvény reguláris legyen egy bizonyos fokszámú együtthatótól kezdve az összes értéke

azonosan 0 kell hogy legyen. A lehetséges energia-sajátértékek így: $E_l = \frac{\hbar^2}{2\Theta} l(l+1)$, ahol $k + |m| \ge 0$ -t jelöltük l-el (l = 0, 1, 2, ...).

A differenciálegyenletet kielégítő polinom neve módosított Legendre-polinom, amit P_l^m szimbólummal jelölünk. A forgó mozgást végző tömegpont sajátfüggvényei tehát a gömbfüggvények:

$$\psi_{lm}(\vartheta,\varphi) = Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m[\cos(\vartheta)] e^{im\varphi}.$$

A teljes energia: $E_l = \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} l(l+1).$

Az impulzusmomentum négyzete: $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$,a zirányú vetülete pedig $L_z = \hbar m$.

A Schrödinger-egyenlet megoldása Coulomb-potenciálban, H-atom

A szögfüggő tagok leválasztása után:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)R_l(r) = E \cdot R_l(r)$$

Bevezetve u = rR-t:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}u''(r) + \left(\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E\right)u(r) = 0$$

Ezek után dimenziótlanítunk. Legyen $\rho = r/r_{B}$ és $\epsilon = E/Ry$, ahol a Bohr-sugár $r_{B} = \frac{4\pi\epsilon_{0}\hbar^{2}}{M_{e}e^{2}}$ és a Rydberg-állandó $Ry = \frac{e^{4}M_{e}}{(4\pi\epsilon_{0})^{2}2\hbar^{2}}$. Ekkor:

$$-\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \left(\frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} - \epsilon\right) u = 0$$

- A szükséges határfeltételek:
- $\rho \to \infty_{\text{-ben u=0.}}$
- *ρ* → 0_{-ban}?

Ha $\rho \rightarrow a \neq 0_{akkor} R \propto \rho^{-1}$, erre hattatva a Laplace operátort az origóban Dirac-deltát kapunk, vagyis nem elégítjük ki a Schrödinger-egyenletet. Ezért itt is u=0 lesz a határfeltétel.

Az egyenlet megoldási módszere Sommerfeld féle polinom módszer:

• Megoldjuk az egyenletet aszimptotikusan.

Az aszimptotikus megoldás $\rho \to \infty$ -ben $e^{\pm \alpha \rho}$ ahol $\alpha = \sqrt{|\epsilon|}$. A norma miatt csak a negatív előjel jó.

- A megoldást $f(r) \cdot \psi_a(r)$ alakban keressük, ahol $f(r) = \sum a_n r^n$ hatványsor. Az f(r) eredeti egyenletbe való visszahelyettesítése után kapunk egy rekurziót az a_n -ekre.
- A rekurzió megoldása elrontja az aszimptotikát, az egyetlen megoldás, ha a hatványsorunk véges, vagyis valamilyen n-re $a_n = 0$. Ebből a feltételből közvetlenül kapjuk az energiaszinteket. Az együtthatók kiszámolásával pedig a sajátfüggvényeket.

Az energiaszintek:

$$\epsilon = -\frac{1}{n^2}$$

Minden energiaszint $\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$ -szeresen degenerált.

Klasszikus határesetek

Záróvizsga tematika

 Tételek
 A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktul megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszerkezet | A magfizika alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok | Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

Hivatkozások

[1] http://mathworld.wolfram.com/DampedSimpleHarmonicMotion.html

Folytonos közegek mechanikája

Rugalmas és képlékeny alakváltozások

Nyújtás



Ha egy homogén, A keresztmetszetű, l hosszúságú huzalt terhelünk megfelelően (nem túl) kicsi F erővel, akkor a megnyúlásra a következő arányosság (illetve egyenlőség) fog teljesülni:

$$\Delta l \sim \frac{Fl}{A} \Longrightarrow \Delta l = \frac{1}{E} \frac{Fl}{A},$$

ahol *E* a Young-modulus [nyomás dimenziójú]. Ez utóbbi nem más, mint a nyúlásra vonatkozó *Hooke-törvény*. Bevezetve a relatív hosszváltozást $\left(\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}\right)$ és a (mechanikai) feszültséget $\left(\sigma = \frac{F}{A}\right)$, a Hooke-törvény a

következőképp alakul:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Ez az összefüggés már lokális törvény (tetszőleges keresztmetszetre igaz). Mivel ε teljes hosszon egyenletes, ezért homogén deformációról beszélünk. Ellenkező esetben inhomogén deformációról van szó (pl.: saját súlyával terhelt rúd megnyúlása).

Munka és energiasűrűség nyújtás közben:

Ha Δl -lel megnyújtunk egy l hosszúságú rudat, akkor nyújtás közben x megnyújtásnál $F(x) = \frac{EA}{l}x$ erő ébred a rúdban. Így a lineárisan növekvő erő összes munkája (összevetve a rugóerővel):

$$E_r = W = \int_0^{\Delta l} F(x) dx = \frac{EA}{l} \int_0^{\Delta l} x dx = D \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\Delta l} = \frac{1}{2} D(\Delta l)^2,$$

ahol *D* a huzal direkciós állandója. Mivel homogén deformációról van szó, ezért alkalmazhatjuk a következő felírást az **energia sűrűségre**:

$$u = \frac{E_r}{V} = \frac{\frac{1}{2}\frac{EA}{l}(\Delta l)^2}{Al} = \frac{1}{2}E\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

Nyújtást kísérő harántösszehúzódás:

Kísérletek alapján nyújtás során a harántmérték relatív változása $\left(\frac{\Delta d}{d}\right)$ egyenesen arányos a hosszméret relatív

változásával $\left(\frac{\Delta l}{l}\right)$: $\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l}$ és $\mu \ge 0$,

ahol μ a **Poisson-szám**. Tehát nyújtáskor harántösszehúzódás, összenyomáskor haránt irányú méretnövekedés lesz. Ennek következtében a rúd térfogata megváltozhat. Tapasztalat szerint az anyagok térfogata nyújtáskor általában nem csökken, tehát

$$0 \le \mu \le \frac{1}{2}.$$

Speciális anyagú testek térfogata nőhet is, ekkor a Poisson-szám negatív.

Térfogati összenyomás

A test felületén egységesen eloszló térfogati összenyomást úgy valósíthatunk meg, ha például folyadékba tesszük, és úgy fejtünk ki a rendszerre nyomást:

Tapasztalat szerint a térfogat csökkenés arányos a test térfogatával és a testre gyakorolt nyomással/nyomás változással:



$$\Delta V = -\kappa V p = -\kappa V \Delta p$$

ahonnan:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\Delta V}{\Delta p} \right)$$

az anyag kompresszibilitása. Ez utóbbi megadja, mekkora a relatív térfogat csökkenés egységnyi nyomásnövekedés hatására. Ez összefüggésben van a fentebb bevezetett Young és Poisson számokkal:

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

Nyírás

Ha egy rugalmas hasábra lapjával párhuzamosan erőt fejtünk ki, akkor a hasáb egy bizonyos γ szöggel fog deformálódni. Ez a nyírás, és a szög (tapasztalatok szerint) megfelelően kis erő esetén arányos az erővel és fordítottan arányos a lap területével. Továbbá függ az anyagi minőségtől:



 $\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{A}$, ahol G az anyagi minőségtől függő nyírási modulus. Ha ez nagy érték, akkor az anyag erősen ellenálló a nyíró erőknek.

Mindezt úgy értelmezhetjük, hogy külső F erő hatására az erővel párhuzamos rétegek elcsúsznak egymáson, így ennek megfelelően visszahúzó τ nyírófeszültség ébred. Az ebből származó erő kiegyenlíti a külső erőt:

$$\tau A = F_{, azaz} \tau = G \gamma_{.}$$

 γ -t kifejezve a Hooke-törvénnyel analóg kifejezést kapunk. Mindkét egyenletnek a lényege, hogy *a deformáció arányos a feszültséggel*. A nyújtáshoz hasonlóan itt is bevezethető (és hasonlóan számolható is) a munka (W) valamint az energiasűrűség (u).

Csavarás

Az ábrákon látható módon deformáljuk a hengert, és a megértés érdekében felbontjuk koncentrikus hengerekre/csövekre (2. ábra).

Az r és $r + \Delta r$ falvastagságú hengerek a csavarás során nyíródnak egymáson. (Tehát az eredetileg hasáb formájú palást paralelepipedonná torzul.) Így a deformációt leíró két szög között az összefüggés:



$r\varphi = l\gamma$

Tehát γ és így vele a deformáció mértéke is r-rel arányos. A fentiekből:

 $\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{1}{G}\frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{1}{G}\frac{\Delta F}{2\pi r\Delta r}\frac{r}{r} = \frac{1}{G}\frac{\Delta M}{2\pi r^2\Delta r}, \text{ and } \Delta M \text{ az erőnyomaték}.$

A nyomatékot kiszámítva (integrálva) a teljes hengerre, megadható az elcsavarodás szöge (\mathcal{P}), amiből azt kapjuk, hogy az elfordulás szöge egyenesen arányos a szabad végen ható forgatónyomatékkal és fordítottam arányos a sugár negyedik hatványával. Ez utóbbi tulajdonság miatt széleskörben alkalmaznak torziós mérlegeket.

Hajlítás

Rugalmas rúd hajlítása esetén a keresztmetszeti lapok mozdulnak el egymáshoz képest. Az egyes rúddarabok úgy deformálódnak, hogy egy réteg felett nyúlik, alatta pedig összenyomódik az anyag (ezek mértéke függ a köztes résztől való távolságtól). A köztes részt, melynek hossza nem változik, neutrális zónának nevezzük. Egyik jól használható példa, ha egy oldalán rögzített rúdnak a másik végére F erőt fejtünk ki, lásd az ábrát.

Továbbá eltekintünk a rúd hossztengelyére merőleges síkkeresztmetszetének torzulásától. Így feltételezhetjük, hogy mindig érvényes a Hooke-törvény (Ekkor a neutrális réteg egy neutrális görbe lesz csupán).



Mindezek alapján megadható mekkora erő ébred az egyes tartományokban, mekkora a Young-modulus, mekkora a belső feszültségek eredő forgatónyomatéka stb. További tipikus hajlítási módszerek:





Feszültség- és deformációs tenzor

Feszültség tenzor felírása

A pontos vizsgálat céljából vegyünk egy ΔA nagyságú felületelemet a testben, ami tartalmazza a P pontot. **n** a felületre merőleges normálvektorunk.



Ha szétvágjuk a testet ΔA mentén, akkor ahhoz hogy újra összeillesszük, egy ugyanakkora, ellentétes irányú erőre lesz szükségünk. Tehát

$$\mathbf{F}_{(\mathbf{n})} + \mathbf{F}_{(-\mathbf{n})} = 0$$

Bevezetve a feszültségvektort: $\sigma_{(\mathbf{n})} = \frac{\mathbf{F}_{(\mathbf{n})}}{\Delta A} \Longrightarrow \sigma_{(-\mathbf{n})} = -\sigma_{(\mathbf{n})}$

A feszültségek felületi erők, tehát egy adott felületen keresztül fejtik ki hatásukat. Továbbá belső erőkből származnak és rövid a hatótávolságuk. Valamint léteznek még térfogati erők, melyek tetszőleges ΔV térfogatelemre hatnak:

 $\mathbf{F} = \mathbf{f} \Delta V$, ahol \mathbf{f} a térfogati erősűrűség (amely helyfüggő).

Ha a P pontban felveszünk egy X,Y,Z (1,2,3) irányú egyégvektorok által kifeszített tetraédert, akkor a következő ábrát kapjuk (ΔA_i -k rendre az oldalak területei):



A térfogati erőkkel a 4 lapon működő feszültségekből származó erők tartanak egyensúlyt:

 $\sigma_{(-1)}\Delta A_1 + \sigma_{(-2)}\Delta A_2 + \sigma_{(-3)}\Delta A_3 + \sigma_{(-n)}\Delta A_n + \mathbf{f}\Delta V = 0$

 ε (ábra fent) nem más, mint ΔA_n távolsága P ponttól, mellyel a térfogati erők nagyságrendje köbösen, a felületi erőké pedig négyzetesen változik. Ezért $\varepsilon \to 0$ határesetben:

$$\sigma_{(-1)}\Delta A_1 + \sigma_{(-2)}\Delta A_2 + \sigma_{(-3)}\Delta A_3 + \sigma_{(-n)}\Delta A_n = 0$$

Mivel az egyes felületek kifejezhetők ΔA_n segítségével ($\Delta A_i = \Delta A_n \cos \angle (i, n) = \Delta A_n n_i$), ezért az egyenlet a következőképp egyszerűsödik:

 $\sigma_{(\mathbf{n})} = \sigma_{(1)}n_1 + \sigma_{(2)}n_2 + \sigma_{(3)}n_3$



Tehát ha ismerjük a koordinátasíkokon fellépő feszültséget, akkor bármilyen \mathbf{n} irányban meg tudjuk határozni a feszültséget:

 $\sigma_{(\mathbf{n}),\mathbf{i}} = \sigma_{(\mathbf{1}),\mathbf{i}}n_1 + \sigma_{(\mathbf{2}),\mathbf{i}}n_2 + \sigma_{(\mathbf{3}),\mathbf{i}}n_{3(\mathbf{i}=1,2,3)}$

Így bevezethetjük a $\sigma_{i,j} = \sigma_{(\mathbf{j}),\mathbf{i}}$ feszültség tenzort, amellyel a fenti egyenlet:

$$\sigma_{(\mathbf{n}),\mathbf{i}} = \sigma_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j$$

(Tenzorról akkor beszélünk, ha a mátrix homogén, lineáris vektortranszformációban szerepel.) A feszültség tenzor j-edik oszlopában a feszültség komponensek állnak. A főátló komponensei a nyújtási/összenyomási feszültségek, a többi elem pedig nyírási feszültség. Továbbá bizonyítható, hogy a feszültségtenzor szimmetrikus^[1].

Deformációs tenzor felírása

Síkbeli deformációt vizsgálva (amit később kiterjesztünk 3D-ra):

A P pont és környezete elmozdulása leírható egy egyszerű u(r) vektor-vektor függvénnyel.

 Q_X elmozdulásából Q'_X helykoordinátái:



$$\left(\left(x + \Delta x\right) + u_x\left(x + \Delta x, y\right), y + u_x\left(x + \Delta x, y\right)\right)$$

A $\overrightarrow{P'Q'_X}$ vektor x komponense:

$$(x + \Delta x) + u_x \left(x + \Delta x, y \right) - \left[x + u_x(x, y) \right] \simeq \Delta x \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)$$

A $\overline{P'Q'_X}$ vektor y komponense:

$$y + u_y (x + \Delta x, y) - [y + u_y (x, y)] = \Delta x \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)$$

(Itt alkalmaztuk a skalár-vektor függvények megváltozására vonatkozó összefüggést:

$$\Delta \phi = \phi(r + \Delta r) - \phi(r) = \partial_x \phi \Delta x + \partial_y \phi \Delta y + \partial_z \phi \Delta z)$$

Az X-tengely irányában fekvő szakasz relatív megnyúlása tehát:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta x \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) - \Delta x}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \to (A \text{ kettős index mutatja a szakasz irányát és a változás irányát is})$$
Ugyanezzel a gondolatmenettel: $\varepsilon_{yy} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)$

A $\overrightarrow{P'R'_Y}$ vektor Y tengellyel bezárt szöge: $\gamma_2 \simeq \frac{\partial u_x}{\partial y}$, ami alapján a nyírás szöge:

$$\gamma \simeq \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Tehát a az alakváltozást leíró elmoztulásfüggvény parciális deriváltjai közvetlen fizikai jelentéssel bírnak.

$$\varepsilon_{xx} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right); \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right); \quad \varepsilon_{yy} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \implies \varepsilon = \left(\begin{array}{cc} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{array}\right),$$
ahol ε_a deformációs tenzor.

Általánosan 3D-ban:
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3$$

Ennek főátlóbeli komponensei a koordinátatengelyek irányában történő hosszváltozásokat, a vegyes indexű tagok a hozzájuk tartozó egyenesek közötti szögváltozások felével egyenlőek. A tenzor spurja a relatív térfogatváltozást adja meg. Fontos tétel még, hogy tetszőleges deformáció felírható egyenletes összenyomás és egy nyírás összegeként.

Általános Hooke-féle törvény

Éremes a Hooke-törvényt olyan deformációkra általánosítani, amelyek során a feszültség-tenzor elemei a deformációs-tenzor elemeinek lineáris függvényei. Mivel ezek a tenzorok szimmetrikusak, így hat független elemük van, és helyettesíthetők a következő kifejezéssekkel:

$$\tilde{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}), \quad \tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz})$$

És az általános Hooke-törvény szerint ezek közt lineáris kapcsolat van: $\tilde{\sigma} = \hat{C}\tilde{\varepsilon}$, ahol \hat{C} egy 6x6-os mátrix és a rugalmas állandók tenzora (ez is mindig szimmetrikus). Komponensekkel felírva: $\sigma_j = \sum_{j=1}^{6} C_{ij}\varepsilon_j$; j = 1, 2...6

Tehát az általános Hooke-törvény egy 6 egyenletből álló egyenletrendszer, melyhez 36 rugalmas állandó szükséges. Ha figyelembe vesszük, hogy C is szimmetrikus, a deformáció homogén és izotrop és a koordináta rendszert is úgy választjuk, hogy a tengelyek egybeessenek a főfeszültségi irányokkal, akkor a Hooke-törvény 3 egyenletre egyszerűsödik:

$$\sigma_{I} = C_{1}\varepsilon_{I} + C_{2}\varepsilon_{II} + C_{3}\varepsilon_{III}$$

$$\sigma_{II} = C_{1}\varepsilon_{II} + C_{2}\varepsilon_{III} + C_{3}\varepsilon_{I}$$

$$\sigma_{III} = C_{1}\varepsilon_{III} + C_{2}\varepsilon_{I} + C_{3}\varepsilon_{III}$$

ahol $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ a főfeszültségek, $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ a fődilatációk, C_1, C_2, C_3 pedig a rugalmas állandók. Mivel a σ_I irányra merőleges másik két irány közül egyik sem kitüntetett, ezért $C_2 = C_3$. Így bevezethetőek a következő jelölések:

$$C_1 - C_2 = 2\mu'$$
és $C_2 = C_3 = \lambda'$
Ezekkel a fenti egyenletek átírhatók:

$$\sigma_{I} = 2\mu'\varepsilon_{I} + \lambda' (\varepsilon_{I} + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})$$

$$\sigma_{II} = 2\mu'\varepsilon_{II} + \lambda' (\varepsilon_{I} + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})$$

$$\sigma_{III} = 2\mu'\varepsilon_{III} + \lambda' (\varepsilon_{I} + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})$$

Tehát izotrop test esetén a deformáció és a feszültség állapot között két rugalmas állandó teremt kapcsolatot, melyek itt μ' és λ' . Ezeket hívjuk **Lamé-féle állandóknak**. Ezek segítségével a korábban definiált deformációk állandói felírhatóak, néhány példa: Young modulus:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}$$

A Poisson-szám (itt most : ν):

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

Kis deformációkra a kompresszibilitás:

$$\kappa = \frac{3}{2\mu + 3\lambda}$$

Nyírási modulus:

 $G = \mu$

A kompresszibilitás és a hangsebesség

Érdemes még tudni két differenciális összefüggést a deformálható anyagokkal kapcsolatban, az egyik a kompresszibilitás:

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}$$

A másik a hangsebesség:

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

Hullámterjedés deformálható testekben, Doppler-effektus.^[2]

Rugalmas hullám: rugalmas közegben keltett deformáció térbeli terjedése.

Attól függően, hogy gömb vagy sík mentén terjed a hullám, beszélhetünk gömb- vagy síkhullámról.

- · Transzverzális hullám: a részecskék elmozdulása merőleges a terjedés irányára
- · Longitudinális hullám: a részecskék elmozdulása megegyezik a terjedés irányával

Transzverzális hullámok terjedési sebessége:

Egy kötélen levő hullám-hegy terjedését vizsgáljuk. Felfoghatjuk úgy, hogy a hullám csúcsa (egy, a csúcs mozgásához rögzített koordinátarendszerben) hullámsebességű körmozgást végez. Ehhez a centripetális erőt a kötél két végén levő feszítőerők eredője adja.



Felhasználva, hogy $\Delta \alpha \ll 1 \Longrightarrow \sin \frac{\Delta \alpha}{2} \approx \frac{\Delta \alpha}{2}$

$$F_e = 2F\sin\frac{\Delta\alpha}{2} = F\Delta\alpha$$

Az ív tömege: $R\Delta\alpha q\rho$, ahol q a kötél keresztmetszete, ρ a sűrűsége. A körmozgás dinamikai egyenlete alapján:

$$F\Delta\alpha = R\Delta\alpha q\rho \frac{c_t^2}{R}$$
,ahonnan a terjedési sebesség: $c_t = \sqrt{\frac{F}{\rho q}}$
Bevezetve a kötélben levő húzófeszültséget: $\sigma = \frac{F}{q} \implies c_t = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$

Hullámfüggvény

Egy kötél egyik felén T periódusidővel hullámokat keltünk. Egy periódusidő alatt a deformáció cT távolságra jut, ez a hullámhossz: λ .

Egy általános pont rezgésére az összefüggés:

$$y(x,t) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$
 shol

y a kötél kitérése, A a rezgés amplitúdója, ω_a körfrekvencia, $\frac{x}{c}$ az adott ponthoz tartozó időkésés. Ez a hullámfüggvény az eddigiek alapján átírható a következő alakba:

$$y(x,t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$
 shol ha bevezetjük a *hullámszám*ot: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
 $y(x,t) = A \sin (\omega t - kx)$ egyenletet kapjuk, mint végső formát.

Hullám-tulajdonságok

A tulajdonságok demonstrálására jól alkalmas pl. a hullámkád...

Visszaverődés (reflexió):

Az akadályhoz érkező és visszavert egyenes síkhullám ugyanakkora szöget zárnak be a fallal.



Törés (refrakció):

Pl. ha megváltozik a medence mélysége, akkor az más közegnek számít. A mélyebb vízben gerjesztett, adott hullámhosszúságú, egyenes hullámok a határfelületen irányváltozást és hullámhossz-rövidülést szenvednek.



Interferencia:

Két pont pontszerű hullámforrás a víz felszínén állandó interferenciakképet mutat.



A létrehozott körhullámok hol erősítik, hol kioltják egymást. A két hullámegyenlet:

$$y_1(x, r_1) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right), \qquad y_2(x, r_2) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$$

A két hullám fáziskülönbsége egy adott P pontban: $\delta = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$,útkülönbsége: $\Delta s = r_2 - r_1$
Erősítés maximális helye ott van, ahol $\delta = 2n\pi, \quad (n \in \mathbb{Z})$ illetve $\Delta s = n\lambda$
Kioltás pedig, ahol $\delta = 2(n+1)\pi$,és $\Delta s = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$

Elhajlás (diffrakció):

Ha hullámvonulat útjába akadályt teszünk, melyen rést hagyunk, akkor azt tapasztaljuk hogy a fal mögötti "árnyéktérben" is keletkeznek hullámok. Sőt, ha a rés a hullámhosszal egy nagyságrendű, illetve kisebb, akkor a rés mögött körhullámok keletkeznek (mint egy pontforrás esetén).



Ez magyarázható a Huygens-elvvel, mely szerint:

- A hullámfelületek minden pontjából elemi hullámok indulnak ki
- Az új hullámfelületet egy későbbi időpontban az elemi hullámok burkoló felülete adja.

Doppler-effektus

Ha egy hullámforrás mozog a közeghez viszonyítva, akkor a forrás előtt a hullámoknál hullámhossz rövidülés, mögötte hullámhossz növekedés figyelhető meg. Ennek megfelelően a mozgás irányában nagyobb a rezgés frekvenciája, mint a mögötte levő térrészben. Ez a **Doppler- effektus**.



Nézzük a hangtani esetet, mert ez "látványos". Ha feltesszük, hogy a megfigyelő nem mozdul, a forrás közeledik, illetve hogy a terjedési sebesség kisebb, mint a hangsebesség (v < c), akkor a frekvenciaváltozás a következőképp adható meg:

A forrás egységnyi idő alatt f darab hullámot bocsájt ki, melyekből az első c távolságra jut. Ez alatt v távolságra jut a forrás, tehát az f darab hullámnak c-v hosszon kell elhelyezkednie, ami csak úgy lehet, ha megváltozik a hullámhosszuk:

 $c - v = f \lambda$ ', ahol λ 'az észlelt hullámszám.

Az észlelt frekvencia pedig:

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = f \frac{c}{c-v}$$

Ugyanezen gondolatmenet alapján, ha távolodik a forrás: $f' = f \frac{c}{c+v}$

Hasonló gondolatmenet alapján, ha nyugvó forrásnál közeledik/távolodik az észlelő: $f' = f \frac{c \pm v}{c}$

Ha a hullámforrás **gyorsabban mozog a hangsebességnél**, akkor a hanghullámok már nem tudják megelőzni a forrást:



A hang ekkor olyan kúpfelület mentén terjed, melynek csúcsában a hangforrás van. Az ábra alapján a kúp nyílásszöge:

 $\sin \alpha = \frac{c}{v}$ (Ennek reciprokát nevezzük Mach-számnak [M])

Folyadékok tulajdonságai

Hidrosztatika

Pascal-törvény: A nyomás a folyadékokban egyenletesen tejed, vagyis a külső nyomásból származó nyomás a folyadék belsejében és a határfelületén minden iránybban uagyanakkora.

Demonstrációs példák:

• Vizibuzogány: minden irányban egyenlő mértékben áramlik ki a víz.

• Vékonyfalú üvegpohárban (bolognai) üvegcsepp: ha megroppantjuk a csepp végét, akkor az üveg porrá esik szét és a gyors folyamat széttöri a poharat is.

• Hidraulikus emelő: $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$



A hidrosztatikai nyomás egyenesen arányos a felszíntől mért mélységgel és a folyadék sűrűségével:

 $G = Ah\rho g$ (A - a folyadék oszlop alapterülete, h - a magassága, ρ - a sűrűsége)

A hidrosztatikai paradoxon: Különböző formájú, de azonos alapterületű edények esetén a mérleg egyensúly mutat, ha ugyanakkora magasságú folyadék van bennük. (Ilyenkor is a folyadék oszlop nyomása fontos... "Az edény fala vagy tartja, vagy nyomja a folyadékot")



Közlekedő edények: Szintén a Pascal-törvény értelmében (és a fentiek alapján is látható), a folyadékszint az ábrán látható rendszerben ugyanolyan magasan lesz mindenhol. (A hidrosztatikai nyomások egyenlőek!)



Felhajtóerő

Egyszerű alakú testre (h magasságú, A keresztmetszetű henger sűrűségű folyadékba) a felhajtóerő:



A hidrosztatikai nyomásnál az oldallapra ható erők eredője 0, az alsó és felső lapra hatók összege pedig megadja a felhajtóerőt:

$$F_{f} = F_{2} - F_{1} = h_{2}\rho_{f}gA - h_{1}\rho_{f}gA = (h_{2} - h_{1})\rho_{f}gA = hA\rho_{f}g = V_{f}\rho_{f}g$$

Ez a törvény általánosan is igaz: bármely folyadékba merülő testre a test által kiszorított folyadék súlyával megegyező nagyságú felhajtóerő hat. Ez **Archimédész törvénye**.

A testek úszása és annak stabilitása

Attól függően, hogy a test súlya vagy a testre ható felhajtó erő nagyobb, a test úszhat, elmerülhet vagy lebeghet.

$$F_e = F_{nehezsegi} - F_{felhajto} = V_t(\rho_t - \rho_f)g$$

- Ha $\rho_t > \rho_f \Rightarrow F_e > 0_{:a \text{ test elmerül}}$
- Ha $\rho_t = \rho_f \Rightarrow F_e = 0$: a test lebeg
- Ha $\rho_t < \rho_f \Rightarrow F_e < 0$: a test úszni fog.

Úszás esetén a test részben belemerül a folyadékba úgy, hogy $V_t \rho_t = V_f \rho_f$ feltétel teljesüljön (ahol V_f a test folyadékban levő része).

Ahhoz, hogy **stabil úszás**ról beszéljünk, további feltétel szükséges: a felhajtó- és a nehézségi erő ne fejtsen ki forgatónyomatékot. Hiszen a test súlypontja (S) és a kiszorított folyadék súlypontja (S') nem mindig esik egybe.



Ha a kibillentett úszó test vissza áll eredeti helyzetébe, akkor **stabilis az úszás**. Ha ha kibillentve mindig ugyanúgy marad, akkor az egyensúlyi helyzet **indifferens** (pl. homogén gömb esetén). Ha pedig másik helyzetbe megy át, akkor **labilis** volt.

Felületi feszültség

Ha megnézzük egy folyadék molekula hatásgömbjét a folyadékon beljebb, akkor azt láthatjuk, hogy a kölcsönhatások eloszlása jóformán egyenletes. Viszont a felületen levő molekulákra ez nem igaz.



Tehát kísérletek és elméleti számítások alapján a felszíni réteg lazább, nagyobb az átlagos molekulatávolság, mint a folyadék belsejében. Ezért a felületi réteg feszítetté válik. És ennek a felszínnek a növeléséhez/átszakításához munkát kell végeznünk.

Ha egy keretre - aminek egyik oldala mozgatható - szappanhártyát feszítünk ki, akkor azt tapasztaljuk, hogy az erő (ami húzza az l hosszúságú oldalt) nem függ a hártya területétől:

 $F = \alpha \cdot 2l$

Ebből arra következtethetünk, hogy összehúzódáskor a hártya szerkezete/struktúrája nem változik. Továbbá a potenciális energiaminimum-elve következében létrejönnek a minimálfelületek. Az energiaminimumot pedig a felületi energia minimuma adja. (pl.: szappanos vízbe mártott kocka...)

Görbült felület görbületi nyomása:



Az adott hártyadarabka nyomását a következő összefüggéssel kaphatjuk meg, mely Laplace I. törvénye:

$$p_g = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

(Ennek segítségével lehet magyarázni a kapilláris emelkedést is ^[3])

Nedvesítő és nem nedvesítő folyadékok:

Az üvegre cseppentett folyadékok alakját a nehézségi erő és a felületi feszültség együttesen alakítják ki.



Az ábrán láthatóak a 3 anyag érintkezési vonalában ható felületi feszültségek. (Jelmayarázat: v-víz, h-higany, ü-üveg, l-levegő) Az egyensúlyt a következő összefüggés írja le:

 $\alpha_{ul} = \alpha_{vu} + \alpha_{vl} \cos \vartheta$, ϑ_{az} illeszkedési szög. (Higanyra hasonló az egyenlet.)

Ezt az összefüggést nevezzük Laplace II. törvényének.

Torricelli-kísérlet

A levegő súlyából adódó légnyomás meghatározásához Torrichelli egy 1 m hosszú kémcsövet megtöltött higannyal és higgannyal telt edénybe helyezte a cső nyitott végét. A csőben a higany szintje az edényben levő higanyhoz képest 76 cm-re esett (függetlenül az üvegcső dőlésszögétől). Ezzel a magasságú higannyal tud a levegő nyomása egyensúlyt tartani (közlekedő edények elve).

További példák: befőttes üveg behorpadt celofánnal, magdeburgi féltekék....

Áramlások

Lagrange-féle leírás

Folyadékot a szilárd testekhez hasonlóan kezeljük, és részekre bontjuk. Majd minden részelemnek külön megadjuk a helykoordinátáját és a pályavonalát. De ez a felírás nagyobb időre túl kusza pályákat eredményez.

Euler-féle leírás

Nem a közeg egyes pontjait, hanem az áramlási teret nézzük a következőképp: minden pontban megadjuk a sebességet (v), a nyomást (p) és a sűrűséget (P) időtől függően. Ekkor nem számít, hogy egy adott részecske éppen hol tartózkodik. A szemléltetéshez használjuk az *áramvonalakat*, melynek deriváltja megadja az adott pontban a sebességvektor egyenesét.



Áramlási cső: az áramlási térben egy elméleti zárt görbe pontjain ármenő áramvonalak összessége.

Áramlások osztályozása:

• Súrlódásos/súrlódás mentes: súrlódásos, ha a folyadékrészek relatív mozgásából származó nyíróerők nem elhanyagolhatók.

- Örvényes/örvény mentes: örvényes, ha a folyadékrészek forgómozgást is végeznek.
- Stacionárius/nem stacionárius: stacionárius, ha v,p és ρ nem függnek az időtől.

Tökéletes folyadék áramlása

Vegyünk egy ΔV térfogatú folyadék részecskét egy r(x,y,z) helyen. A rá ható erők x komponense az X-tengelyre merőleges lapjaira ható nyomásból származik. Így:

$$F_x = \left[p(x, y, z, t) - p(x + \Delta x, y, z, t)\right] \Delta y \Delta z = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Felhasználva, hogy $\Delta m = \rho \Delta V = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$, a részecske mozgásegyenletének x komponense:

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$
ugyanez felírható az y komponensre is.

A z komponensnél viszont figyelembe kell venni a nehézségi erőt: $\rho \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$

Vektoriálisan megkapjuk az ideális folyadékokra vonatkozó dinamikai alapegyenletet(Euler-egyenlet):

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \rho \mathbf{g}$$

Ahol a teljes időderivált kifejtésénél figyelembe kell venni azt, hogy mire kis idő múlva odanézek, a részecske már nem ott lesz, ahol eddig volt, így a deriváltat a láncszabály szerint írhatjuk le:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}grad)\vec{v}$$

Ez az egyenlet még nem elég az áramlás problémájának megoldásához, hiszen ez csak 3 egyenlet míg az ismeretlenjeink száma: 3(sebességek)+1(nyomás)+1(sűrűség) Kell még a kontinuitási egyenlet és egy állapotegyenlet.

A peremfeltételek nem súrlódó folyadék esetén azt mondják, hogy a sebesség a falakra merőleges komponense 0.

Kontinuitási egyenlet:

Az összenyomhatatlanság miatt az áramlási cső két tetszőleges keresztmetszetén egyenlő térfogatú folyadég halad keresztül.



 $A_1v_1\Delta t = A_2v_2\Delta t$, ahonnan: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$ adódik, ami a stacionárius áramlásra vonatkozó kontinuitási egyenlet.

Szűkületben tehát nagyobb sebességgel áramlik a folyadék.

Általános esetben a kontinuitási egyenlet a következőképpen írható fel:

• Egy térfogatot kiválasztva a folyadékon belül, a térfogaton belüli tömeg megváltozása:

$$\frac{d}{dt}\int\rho(\vec{r})dV$$

• Ennek egyenlőnek kell lennie a térfogat szélein(felületén) kiáramlott tömeggel:

$$-\int \rho(\vec{r})\vec{v}dF$$

A felületi integrálra Gauss-Oszrogradszkij tételt alkalmazva, majd kihasználva, hogy ez minden térfogatra igaz, kapjuk a szokásos alakú kontinuitási egyenletet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0$$

A leggykrabban választott állapotegyenlet $\rho = konst.$ vagyis az összenyomhatatlan folyadék esete. Ekkor az előző egyenlet így egyszerűsödik:

 $div\vec{v} = 0$

A Bernoulli-egyenlet



Vizsgáljuk meg az ABCD folyadék rész elmozdulását (A'B'C'D'-be megy át Δt idő múlva). Mivel az ábrán fehéren hagyott rész nem változik az áramlás szempontjából, ezért úgy tekintjük, mintha ABA'B' folyadék CDC'D'-be jutott volna át. A munkatétel szerint a folyadék mozgásenergiája megegyezik a ráható erők munkájának összegével. Súrlódásmentes esetben csak a nehézségi erő és a p_1 , p_2 nyomásokból származó erőt kell figyelembe venni. A nehézségi erő munkája:

$$W_1 = A_1 v_1 \Delta t \rho g (h_1 - h_2)$$

A nyomóerőé pedig:

$$W_2 = p_1 A_1 v_1 \triangle t - p_2 A_2 v_2 \triangle t$$

Felhasználva a kontinuitási egyenletet: $V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$, és a munkatételt:

$$\frac{1}{2}V\rho v_2^2 - \frac{1}{2}V\rho v_1^2 = V\rho g(h_1 - h_2) + V(p_1 - p_2), \text{ melyet átrendezve a következő összefüggést kapjuk:} p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Ezt az összefüggést hívjuk **Bernoulli-egyenlet**nek. Ez alapján ez az összeg bármely áramfonal esetén állandó - összenyomhatatlan folyadék súrlódásmentes, stacionárius áramlása esetén:

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = C$$

Viszkózus folyadék áramlása

Amikor a folyadékrészek relatív sebességük nem 0, akkor a részek közötti belső súrlódási erő már nem hanyagolható el általában.

Tapasztalat: egymásra rétegzett színes és színtelen glicerinből kihúzunk egy üveglapot. Az üveglapon lévő folyadékok sebessége a legnagyobb, a távolabbiaké kisebb. A relatív sebesség és belső súrlódás miatt a lasabb rétegek lassítják a gyorsabbakat és fordítva.

Mégjobban vizsgálható, ha két párhuzamos lap közötti folyadék áramlását vizsgáljuk, úgy hogy csak a felső lapot mozdítjuk el.



Ekkor legfelül a leggyorsabb a folyadék, míg legalul 0 a sebessége. Ekkor a folyadék sebességének az áramlásra merőlegesen gradiense van. Eredményül azt kapjuk, hogy a belső súrlódási erő egyenesen arányos az egymáson csúszó folyadékrétegek felületének nagyságával és a keresztmetszetben vett egységnyi távolságra eső sebességváltozással:

$$F = \eta A \frac{dv}{dy}$$

Ezt az összefüggést Newton belső súrlódási törvényének nevezzük. (Ahol η_a dinamikai viszkozitás.)

Stokes törvénye:

Áramlási térbe helyezett közelében réteges áramlás alakulhat ki. A belső súrlódással a közeg erőt fejt ki a golyóra, ami arányos a golyó relatív sebességével, a golyó sugarával, és a közeg dinamikai viszkozitásával:

 $F = 6\pi\eta rv$

Ezt a törvényt használta fel Millikan is a kísérlete során, amikoris megmérte az elemi elektromos töltést.....

További pl.: Brown-mozgáskor felhasznált mozgásegyenlet: $m \frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\eta a \frac{dx}{dt} + F_{veletlen}$

Turbulencia

Azt tapasztaljuk, hogy ha egy áramlási csőben lamináris (stacionárius) áramlás sebességét növeljük, akkor egy adott sebességnél az áramlás kavargó, turbulens áramlásba csap át. Ugyanezt tapasztaljuk, ha a sebességet nem vátoztatjuk, de az áramlási cső méretét növeljük. Egyes vizsgálatok alapján a turbulenssé válás függ az áramlási sebességtől (v), az áramlási cső harántméretétől (r), a közeg sűrűségétől (ρ) és a dinamikai viszkozitástól (η). Az átmenet akkor történik meg, ha

 $R = \frac{\rho r v}{\eta}$, ahol R a Reynolds-szám.

Ez a számérték hozzárendelhető az adott testekhez is, melyeket az áramlási csatornába helyezünk. Két test körüli áramlások pedig akkor lesznek hasonlóak, ha $R_1 = R_2$. (Tehát pl egy 10x kisebb repülőgép modellhez 10x nagyobb szél kell...)

Áramlások hasonlósága

Az előző pontban említett Reynolds-szám csak egy a hidrodinamika rengeteg dimenziótlan száma közül. Általánosan elmondható, hogy két áramlás akkor hasonló, ha az adott probléma szempontjából jelentős dimenziótlan számai egyenlőek. Két áramlás hasonlósága alatt itt azt értjük, ha dimenziótlanított formában megegyező függvények írják le a sebesség és nyomáseloszlásukat(ha más lényeges változóink is vannak, pl.: hőmérséklet, akkor azokat is). Ennek óriási jelentősége van, mivel a hidrodinamika egyenletei nemlineárisak, és sokszor megfelelő közelítő megoldás sem található rájuk, így a mérnökök/kutatók kénytelenek modellkísérleteket alkalmazni, pl. a vizsgálandó hajótest kicsinyített másán.

Örvények

Két, nem azonos sebességű lamináris áramlás határfelületén a nyíróerők vékony sávban forgásba hozzák a folyadékot, örvények jönnek létre.



Ha egy testet (pl. hengert) helyezünk lamináris áramlásba, akkor a testtől távolabb az áramlás nem változik, de a test közelében a folyadéknak nagy lesz az áramlásra merőleges sebesség-gradiense. (Ez a Prandtl-féle határréteg.) Ez amiatt van, mert a test felületén a folyadékrészek sebessége nulla, a határréteg másik szélén pedig maximális. A belső súrlódás miatt nem tudnak elhaladni a test mellett, hogy mögé jussanak (a magas nyomású részhez), hanem már hamarabb lefékeződnek és visszakanyarodnak a kisebb nyomású rész felé. Viszont itt a nagysebességű áramlás elkapja a visszaáramló folyadékot és így forgásba jön. Ez a kialakuló örvény egyre nagyobb lesz, majd leválik a testről. Ez a jelenség periódikusan ismétlődik, és ellentétesen forgó örvénypárok szakadnak le egymás után. Ezt nevezzük **Kármán-féle örvénysor**nak.



A Navier-Stokes-egyenlet(*)

Összenyomhatatlan folyadák esetén:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}.$$

Az Euler-egyenlethez képesti egyetlen új tag a viszkozitás hatását írja le. μ a kinenatikai viszkozitás

$$\mu = \frac{\eta}{\rho}$$

^[4] A peremfeltételek viszkózus folyadékra azt mondják, hogy a falak mentén a víz áramlási sebessége nulla.

Hivatkozások: Forrás: Tasnádi-Skrapits-Bérces - Általános fizika I.2.

- [1] könyv: 151§ 1. (50-51. oldal)
- [2] Tasnádi-Skapits-Bérces: Általános fizika I.2. IV. C) Hullámtan
- [3] 171.§ 1. (110. o)
- [4] http://en.wikipedia.org/wiki/Navier-Stokes

Záróvizsga tematika				
A klasszikus mechanika alapjai A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása A relativitás elmélet alapjai Egzaktul				
megoldható fizika problémák Folytonos közegek mechanikája Fenomenologikus termodinamika Elektro- és				
magnetosztatika, áramkörök Elektrodinamika Hullámegyenlet és hullámoptika Geometriai optika és alkalmazásai A				
kvantumelmélet alapvető kísérletei A kvantummechanika elméleti háttere Atom- és molekulaszerkezet A magfizika				
alapjai A termodinamika statisztikus alapozása Kvantumstatisztikák Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok				
Kristályos anyagok fizikája Nemegyensúlyi folyamatok leírása Az asztrofizika alapjai				

Fenomenologikus termodinamika

A tétel korábbi változata megtekinthető a Fenomenologikus termodinamika (2010) címszó alatt. Kevésbé struktúrált, de részletesebb, mint az új.

Termodinamikai állapotjelzők

Az **állapotjelző** a termodinamikai rendszernek egy olyan jellemzője, amely csak a rendszer állapotától függ, és nem függ attól, hogyan jutott a rendszer ebbe az állapotba. Az állapotjelző a rendszer egyensúlyi állapotát írja le. Például a belső energia, az entalpia, entrópia, nyomás és hőmérséklet állapotjelzők, mivel kvantitatíve jellemzik egy termodinamikai rendszer egyensúlyi állapotát. Ugyanakkor a mechanikai munka és a hő nem állapotjelző, mivel kvantitatíve a termodinamikai rendszerek egyensúlyi állapotai közötti átmeneteket írják le. Megkülönböztetünk intenzív és extenzív állapotjelzőket.

Hőtágulás

Hőtágulásnak nevezzük azt a fizikai jelenséget, amikor valamely anyag a hőmérsékletének változásával megváltoztatja a méretét. Melegítéskor az anyagok általában tágulnak, a tágulás relatív mértékét a hőtágulási együttható fejezi ki. A hőtágulás általában közelítőleg lineárisan függ a hőmérséklettől, ez alól kivétel, ha halmazállapot-változás történik, illetve néhány speciális, vagy bomlékony anyag zsugorodik (negatív hőtágulás). Léteznek kerámiák és fémötvözetek, amelyek gyakorlatilag nem változtatják a méretüket.

A lineáris hőtágulási együttható a szilárd anyag hőmérséklet változásra adott hosszméret változásának a mértéke:

$$\alpha = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial T} [\mathbf{K}^{-1}]$$

A térfogati hőtágulási együttható az anyagok termodinamikai tulajdonsága, melyet az alábbi összefüggéssel definiálnak^[1]:

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P [\mathbf{K}^{-1}]$$

ahol Ta hőmérséklet, Va térfogat, ρ a sűrűség, a deriválást állandó nyomás mellett hajtják végre; β pedig a sűrűség változásának mértéke állandó nyomáson, a hőmérsékletváltozás hatására.

Ideális gáz, kinetikus modell

A gázok törvényszerűségei leírhatók a mozgó testekre vonatkozó fizikai törvényekkel, ha feltételezzük ideális voltukat, amihez a következő kritériumoknak kell teljesülniük:

- A gázmolekulák saját térfogata elhanyagolható a gáz által betöltött térfogathoz képest
- A gázmolekulák egymásra sem vonzó, sem taszító hatást nem fejtenek ki, az ütközésektől eltekintve
- A gázmolekulák egymással illetve az edény falával való ütközése rugalmas
- A gázmolekulák átlagos sebességét és kinetikai energiáját a gáz hőmérséklete adja meg
- Azonos hőmérsékleten, azonos számú gázmolekula kinetikai energiája megegyezik, és független a gáz anyagi minőségétől

Az ideális gázokra, és csak az ideális gázokra teljesül az egyesített gáztörvény.

Általában számításoknál a gázokat – első közelítésben – ideális gázoknak tekintjük. A légnemű közegek jellemzően akkor közelítik meg a tökéletes gázokra jellemző tulajdonságokat, ha hőmérsékletük kritikus hőmérsékletüknél nagyobb (ahol a párolgáshő nulla). Azokat a légnemű anyagokat, amelyeknek hőmérséklete a kritikus hőmérséklet alatti, gőznek hívjuk.

Nyílt és zárt folyamatok

Nyílt rendszer

A nyílt rendszerek jellemzője az anyag és az energia áramlása a rendszer és környezete között.

Ilyen például egy pohár lefedetlen víz.

Carnot-folyamat

A Carnot körfolyamat, ha hőerőgépként működik, négy állapotváltozásból áll:



- 1. A gáz **reverzibilis izoterm tágulása** (expanziója) a $T_H^{[2]}$ nagyobb hőmérsékleten (izoterm hőközlés). Ez alatt az állapotváltozás alatt (Az 1. ábrán A állapotból *B* állapotba) a táguló gáz munkát végez a dugattyún. A gáz tágulását a nagy hőmérsékletű tartályból beáramló hő okozza.
- 2. Izentrópikus (*reverzibilis adiabatikus*) tágulás. Ennél az állapotváltozásnál (*B*-ből *C*-be) feltesszük, hogy a henger és a dugattyú hőszigetelt: nem kap, és nem is veszít hőt a rendszer. A gáz tovább tágul, munkát végezve a környezetén. Ennek eredményeképp a gáz a hidegebb $T_C^{[3]}$ hőmérsékletre hűl.
- 3. Reverzibilis izotermikus

összenyomódás (sűrítés, kompresszió) a T_C hideg hőmérsékleten (izoterm hőleadás). (C-ből D-be). Ekkor a

környezet végez munkát a gázon, miközben hő áramlik a gázból a hideg tartályba.

4. A gáz izentrópikus összenyomódása. (D-ből A-ba) Ismét felételezzük, hogy a dugattyú és a henger hőszigetelt. A környezet végez munkát a gázon miközben összenyomja azt, ezáltal a hőmérsékletét T_H-ra emelve. Az állapotváltozás végén a gáz a kiindulási állapotba jut vissza.

Főtételek



0. főtétel: a termodinamikai rendszer egyensúlya

A nulladik főtétel tulajdonképpen nem egyetlen "törvényt", hanem több posztulátumot jelent, amelyek a termodinamikai rendszer egyensúlyával kapcsolatosak. Ezek:

- bármely magára hagyott termodinamikai rendszer egy idő után egyensúlyi állapotba kerül amelyből önmagától nem mozdulhat ki;
- egy egyensúlyban levő termodinamikai rendszer szabadságfokainak száma a környezetével megvalósítható kölcsönhatások számával egyenlő;
- a két testből álló magára hagyott termodinamikai rendszer egyensúlyban van, ha a testek között fellépő kölcsönhatásokat jellemző intenzív állapothatározóik egyenlők;
- az egyensúly tranzitív (ha A rendszer termodinamikai egyensúlyban van C rendszerrel és B rendszer is termodinamikai egyensúlyban van C rendszerrel, akkor ebből következik, hogy A és B rendszer is termodinamikai egyensúlyban van egymással).

I. főtétel – Energiamegmaradás törvénye

A termodinamika első főtétele mennyiségi összefüggést állapít meg a mechanikai munka, a cserélt hő és a belső energia változása között. Egy nyugvó és zárt termodinamikai rendszer belső energiáját, amennyiben annak belsejében nem zajlik le fázisátalakulás vagy kémiai reakció, kétféleképpen lehet megváltoztatni: munkavégzéssel és hőközléssel. A rendszer ΔU belső energiájának megváltozása tehát a vele közölt **Q** hőmennyiség és a rajta végzett **W** (bármilyen) munka összege:

$$\Delta U = Q + W$$

Áramló közegre a hő és a technikai munka összege így számolható:

$$q_{12} + w_{t12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)$$

ahol q a hő, w(t12) a technikai munka, h az entalpia, c a közegáramlás sebessége, g a gravitációs állandó, és z a vizsgált pont magassága (helyzete). Differenciális alakban:

$$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W$$

Következménye: Nincs olyan periodikusan működő gép, ú.n. elsőfajú perpetuum mobile (örökmozgó), mely hőfelvétel nélkül képes lenne munkát végezni.

II. főtétel

A második főtétel a spontán folyamatok irányát szabja meg. Több, látszólag lényegesen különböző megfogalmazása van.

- Clausius-féle megfogalmazás (1850.): A természetben nincs olyan folyamat, amelyben a hő önként, külső munkavégzés nélkül hidegebb testről melegebbre menne át. Csakis fordított irányú folyamatok lehetségesek.
- Kelvin-Planck-féle megfogalmazás (1851., 1903.): A természetben nincs olyan folyamat, amelynek során egy test hőt veszít, és ez a hő munkává alakulna át. Szemléletesen egy hajó lehetne ilyen, amelyik a tenger vizéből hőenergiát von el és a kivont hőenergiával hajtja magát. Ez nem mond ellent az energiamegmaradásnak, mégsem kivitelezhető.

Az ilyen gépet másodfajú perpetuum mobilének nevezzük, tehát az állítás szerint nem létezik másodfajú perpetuum-mobile.

A két megfogalmazás egymásból következik, de a levezetése nem teljesen egyszerű.

A második alaptörvénynek ezek és az ezekhez hasonló megfogalmazásai zavarbaejtőek, hiszen a fizika többi, összefüggéseket megállapító törvényeivel szemben valaminek a létezését tagadják. Egy jobb megfogalmazás végett egy új fogalom került bevezetésre: az entrópia. A termodinamika második alaptörvénye az entrópia felhasználásával a következőképpen fogalmazható meg: a spontán folyamatok esetében a magukra hagyott rendszerek entrópiája csak növekedhet.

III. főtétel

Nernst megfogalmazása szerint az abszolút tiszta kristályos anyagok entrópiája nulla kelvin hőmérsékleten zérus. Olyan abszolút tiszta kristályos anyag, amelyre a Nernst megfogalmazása érvényes lenne, a természetben nem fordul elő, ideális fogalom, tehát nulla entrópiájú anyag nem létezhet. Az entrópia határértékét a harmadik főtétel pontosított megfogalmazása a következőképpen rögzíti: a termodinamikai rendszerek entrópiája véges pozitív érték felé, az entrópia hőmérséklet szerinti deriváltja pedig a zéró felé tart, amikor a rendszer hőmérséklete az abszolút nulla érték felé közelít. Nernst posztulátumát később egy újabb megfogalmazásban hozta nyilvánosságra, mely szerint az abszolút nulla hőmérséklet tetszőlegesen megközelíthető, de nem érhető el. E kijelentés a harmadik főtétel előbbi megfogalmazásának következménye: mivel az abszolút nullához közeli hőmérsékleten az anyagok fajhője nagyon kicsi, igen kis hőmennyiség a hőmérséklet jelentős megváltozásához vezet. Bármilyen módon is valósítjuk meg a hűtést, a lehűtendő test valamilyen fokú visszamelegedése elkerülhetetlen. A folyamat megismétlésével a hőmérséklet tovább csökkenthető, tehát végső soron az abszolút nulla hőmérséklet elvileg tetszőleges pontossággal aszimptotikusan megközelíthető, de nem érhető el.

Termodinamikai potenciálok

Bizonyos termodinamikai paramétereket elterjedten neveznek termodinamikai potenciál-függvényeknek is. Ez annyit jelent, hogy - hasonlóan a mechanikában és az elektrodinamikában értelmezett potenciál-függvényekhez - skálázásuk egy állandó erejéig önkényesen végezhető el, azonban a választott skálától függetlenül szélsőértékük helye egyértelműen kijelöli a vizsgált rendszer egyensúlyi állapotát.

Ötféle termodinamikai potenciált különböztetünk meg^[4]:

Név	Jelölés	Képlet	Természetes változók
Belső energia	E	$TS - pV + \mu N$	$S, V, \{N_i\}$
Helmholtz szabadenergia	F	E - TS	$T, V, \{N_i\}$
Entalpia	Η	E + pV	$S, p, \{N_i\}$
Gibbs szabadentalpia	G	E + pV - TS	$T, p, \{N_i\}$
Landau potenciál	Φ	$E - TS - \mu N$	$T, V, \{\mu_i\}$

A fundamentális egyenlet

Fundamentális egyenletnek azt nevezzük, ami három extenzív változótól függ, pl: S(N, E, V). Fundamentális egyenletből a makroszkopikus rendszerre vonatkozó információk mind kinyerhetőek (ha ezt tudjuk, a rendszer egész termodinamikáját ismerjük).

A fundamentális egyenlet (S(E, V, N)) differenciális alakja:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} dE + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} dV + \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V} dN = \frac{dE}{T} + \frac{p}{T} dV + \frac{\mu}{T} dN$$

Megfelelően alkalmazva Legendre-transzformációkat a többi potenciál differenciális alakja:

$$\begin{split} dE &\leq TdS - pdV + \sum_{i} \mu_{i}dN_{i} \\ dH &\leq TdS + Vdp + \sum_{i} \mu_{i}dN_{i} \\ dF &\leq -SdT - pdV + \sum_{i} \mu_{i}dN_{i} \\ dG &\leq -SdT + Vdp + \sum_{i} \mu_{i}dN_{i} \end{split}$$

Van der Waals gázok

A létező (reális) gázok tulajdonságai többé-kevésbé eltérnek az ideális gázok tulajdonságaitól. Az eltérés oka abból adódik egyrészt, hogy a gázatomok, -molekulák kölcsönösen vonzzák egymást – ún. van der Waals-erők működnek közöttük –, másrészt nem pontszerűek, van kiterjedésük, azaz saját térfogattal rendelkeznek.

Ha az ideális gáz egyenletébe beírjuk a nyomás- és térfogati korrekciókat, akkor *n* anyagmennyiség esetén a:



$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

kifejezést kapjuk, amely a reális gázokra vonatkozó van der Waals-egyenlet.

Ha az összefüggésből kifejezzük a nyomást, az alábbi, viszonylag bonyolult összefüggéshez jutunk:

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket és rendezve az egyenletet, a

$$V^{3} - (b + \frac{RT}{p})V^{2} + \frac{a}{p}V - \frac{ab}{p} = 0$$

kifejezésből látható, hogy a térfogatra nézve a függvény harmadfokú, mint a mellékelt ábra – a szén-dioxid p-V diagramjának – izotermáin is látható.

Reális gázokkal végezhető kísérletek pl. Gay-Lussac, Joule-Thomson
Fázisátalakulások

a régi verzióban: Fázisátalakulások termodinamikai tárgyalása és Fázisegyensúlyok

Jellemzői

A termodinamika által leírt folyamatok közül kiemelkedő fontosságúak azok, ahol a folyamat kezdeti anyaga és a folyamat végén keletkezett anyag lényegesen különböző tulajdonságokkal rendelkezik.^[5]

A fázisátalakulásokat gyakran kíséri a túlhűtés, ritkábban a túlhevítés jelensége. Előbbit használja ki a Wilson-féle ködkamra, utóbbit a buborékkamra.

Típusai

Elsőrendű fázisátalakulás

Elsőrendű fázisátalakulásnak olyan folyamatot hívunk, amikor az intenzív paraméter folytonos változása mellet az extenzív paraméternek ugrása van. A *fázisátalakuás* kifejezésen rendszerint elsőrendű fázisátalakulást értünk.

Másodrendű fázisátalakulás

Másodrendű fázisátalakulás az elsőrendűtől abban különbözik, hogy itt az extenzív paraméter is folytonos, csak a deriváltjában van rendkívüli viselkedés. Ilyenek például a kritikus opaleszcencia, ferromágneses átalakulás a Curie-hőmérsékleten, ferroelektromos katasztrófa, szupravezetés, szuperfolyékonyság, stb.

Gibbs-féle fázisszabály

Egy termodinamikai rendszer egyensúlyi állapotában egyszerre jelen levő fázisok (fizikailag homogén részek) száma (F), a szabadon választható állapothatározók (vagy szabadsági fokok) száma (Sz) és a rendszert alkotó független komponensek száma (K) közötti összefüggés:

$$F + Sz = K + 2^{[6]}$$

A fázistörvény a termodinamika főtételeiből vezethető le. Pl. ha a víz (egykomponensű rendszer, K = 1) csak egy fázisban (pl. gőzként) van jelen (F = 1), akkor nyomása és hőmérséklete (bizonyos határokon belül) tetszőlegesen változtatható (Sz = 2); míg három különböző fázisban (gőz, folyékony víz és jég, F = 3) már csak egyetlen, meghatározott nyomás- és hőmérsékletértéknél (hármaspont) lehet (Sz = 0).

Fázisdiagramok

Az olyan diagramot, amit fázisok szerinti tartományokra osztunk fel, fázisdiagramnak nevezzük. А tengelyeken legtöbbször két választott változó, pl. p-T felmérése mellett, ilyenkor a többi változót rögzítjük. Szemléletesen: a teljes teret egy síkkal metsszük el. Az ábrákon a víz nyomás-hőmérséklet fázisdiagramja és a titán hőmérséklet-koncentráció nikkel ötvözetek diagramja látható.







$$\mu_{\mathbf{i}} = \left(\frac{\partial G}{\partial N_{\mathbf{i}}}\right)_{p,T,N_{\mathbf{j}\neq\mathbf{i}}}, \ [\mathbf{J}]$$

ahol

G a rendszer Gibbs-energiája, [J]

N, az i komponenst alkotó atomok száma, [1]

p a nyomás, [Pa]

T a hőmérséklet, [K].

Az *i* komponens kémiai potenciálja egy intenzív fizikai mennyiség, ami megadja, hogy az *i* komponens változása esetén mennyivel változtatja meg a rendszer szabadentalpiáját, azaz az integrális mennyiségét (miközben a

A folyadék és légnemű fázisok közötti minőségi különbség megszűnik a kritikus pontnál (*K*). A kritikus pont felett a folyadékból folytonosan lesz légnemű anyag. Folyadékállapotból légneműbe fázisátalakulás nélkül is eljuthatunk a kritikus pont megkerülésével.

Kémiai potenciál

A **kémai potenciál** más néven parciális szabadentalpia, parciális Gibbs-energia a rendszer alkotóira jellemző mennyiség.

A kémiai potenciált definiáló összefüggés:

rendszerben a hőmérséklet, a nyomás és az *i* komponens kivételével az összes többi komponens mennyisége állandó marad). A kémiai potenciál abszolút értéke nem ismeretes, gyakorlatban a folyamatokban bekövetkező megváltozása fontos.

Fázisegyensúlyok

Clausius-Clapeyron egyenlet

A Clausius Clapeyron egyenlet írja le kétfázisú rendszerek egyensúlyának feltételét. A szabadentalpia:

 $G = \mu_1(T, p)N_1 + \mu_2(T, p)N_2$

A részecskeszám megmaradás miatt $dN_1 = -dN_2$, akkor az egyensúly dG=0 feltételéből visszakapjuk a korábban is említett $\mu_1 = \mu_2$ feltételt. Ebből az egy mólnyi mennyiségre vonatkozó $d\mu_i = -s_i dT + v_i dp$ Gibbs-Duhem reláció adja a Clausius-Clapeyron egyenletet:

$$(s_2 - s_1)dT = (v_2 - v_1)dp$$
$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} = \frac{l_{12}}{T(v_2 - v_1)}$$

ahol v moláris térfogat, s moláris entrópia, l_{12} moláris látens hő.

Jegyzetek, hivatkozások

- [1] Donald L. Turcotte, Gerald Schubert: Geodynamics, 2nd Edition, Cambridge, 2002, ISBN 0-521-66624-4
- [2] A H jelölés az angol "hot", azaz "forró", "meleg" szót rövidíti
- [3] A C jelölés az angol "cold", azaz "hideg" szót rövidíti
- [4] Alberty (2001) p1353
- [5] Tichy Géza, Kojnok József: Hőtan, Typotex Kiadó, 2001, 75. old., ISBN 963-9326-14-3

[6] J. W. Gibbs, 1878

Záróvizsga tematika

 Tételek
 A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktul

 megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és

 magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A

 kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszerkezet | A magfizika

 alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok |

 Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

Termodinamikai állapotjelzők

Egy termodinamikai rendszer több termodnamikai paraméterrel írható le (ilyen például a hőmérséklet, nyomás, fajlagos térfogat). Az, hogy hány paraméter szükséges az egyértelmű leíráshoz, az az állapottér D dimenziójától függ. Például az egyatomos gáz kétdimenziós rendszert alkot (D=2). Ebben az esetben tökéletesen jellemezhető bármely rendszer két független paraméterrel, mint például a nyomással és a fajtérfogattal vagy esetleg a nyomással és a hőmérséklettel. A választott paraméter-párok egyenértékűek, egyszerűen különböző koordináta-rendszert jelentenek a kétdimenziós termodinamikai állapottérben. Hasonló megállapítások tehetők a többdimenziós állapotterekről is.

Extenzív állapotjelzők

A rendszer méretével arányosan változnak. Ilyenek az entrópia, a részecskeszám, a térfogat és a belső energia.

Intenzív állapotjelzők

Függetleek a rendszer méretétől. Ilyen a hőmérséklet, a nyomás és a kémiai potenciál.

Elektro- és magnetosztatika, áramkörök

Coulomb- és Gauss-törvény, szuperpozíció elve, stacionárius áram

ELektrosztatika

Sztatika esetén nincsen időbeli változás, tehát a Maxwell-egyenletekben ^[1] szereplő, időderiváltakat tartalmazó targok 0-t adnak járulákul. Így a sztatikus Maxwell-egyenletek SI-ben:

$$div \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$
$$rot \mathbf{E} = 0$$
$$rot \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}$$
$$div \mathbf{B} = 0$$

ahol Eaz elektromos térerősség, Ba mágneses indukció, **j**az áramsűrűség, ϱ_{az} elektromos töltéssűrűség, ε_{0a} vákuum dielektromos állandója.

Gauss-törvény

Gauss-törvénynek az első Maxwell-egyenletet nevezzük. Az elektromos töltések, vagy töltéseloszlás, és az elektromos tér kapcsolatát adja meg. Integrális formában azt mondja ki, hogy ha egy qtöltést körbeveszünk egy zárt felülettel, akkor arra integrálva az elektromos teret (**E**), a töltéssel arányos mennyiséget kapunk:

$$\oint_f \mathbf{E} d\mathbf{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

Ahol ε_0 , az arányossági tényező reciproka, a vákuum dielektromos állandója. Általánosabban felírhatjuk töltéseloszlásra is, aminek alesete több ponttöltés:

$$\oint_{f} \mathbf{E} d\mathbf{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V} \varrho(\mathbf{r}) dV$$

Ezt nevezzük a **Gauss-törvény integrális formájának**. $\varrho(\mathbf{r})$ a töltéssűrűség, V pedig az fzárt felület által határolt térfogat. A matematikai Gauss-törvény értelmében egy vektortér divergenciájának térfogatra vett integrálja egyenlő a vektortér határfelületre vett integráljával, vagyis:

$$\oint_{f} \mathbf{E} d\mathbf{f} = \int_{V} \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_{0}} \int_{V} \varrho(\mathbf{r}) dV$$

Mivel az egyenlet két oldalán ugyanarra a térfogyatra integrálunk, az integrandusok is egyenlőek:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\varrho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

Ez a Gauss-törvény differenciális formája.

Coulomb-törvény

Elektrosztatikában minden időderivált eltűnik: $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$. Így a Faraday-törvény (egy másik Maxwell-egyenlet) így alakul:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

Rotációmentes vektorterek előállíthatóak egy skalárfüggvény gradienseként, ezért vezessük be a Φ skalárpotenciált, amelyre igaz:

 $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\Phi$

 Φ skalárpotenciál dimenziója energia/töltés, így adott töltés esetén arányos a potenciális energiával, és egy qtöltést mozgatva elektromos térben Apontból Bpontba, megadja a végzett W munkát:

$$W = \int_{A}^{B} q \mathbf{E} d\mathbf{s} = -\int_{A}^{B} q \operatorname{grad} \Phi d\mathbf{s} = q \left(\Phi(A) - \Phi(B) \right)$$

A gradienses egyenletet beírva a divergenciásba, kapjuk a Poisson-egyenletet:

divgrad
$$\Phi = \Delta \Phi = -\frac{\varrho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

A levezetést mellőzve, Green-módszerrel megoldható az egyenlet, az általános megoldás pedig:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

Ha az Origóban van egyetlen, q_1 töltésű ponttöltésünk, akkor $\rho(\mathbf{r}) = q_1 \delta(\mathbf{r})$. Erre könnyen el lehet végezni az integrált:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{q_1\delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

Az ebbe a térbe helyezett q_2 töltésre ható erő:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = \mathbf{E}_1 q_2 = -grad\Phi \cdot q_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{\mathbf{r}_{12}^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}}$$

Ezt nevezzük Coulomb-törvénynek.

A Maxwell-egyenletek linearitása miatt egy adott pontban különböző töltések által keltett elektromos tér értéke megegyezik az egyéni töltések által létrehozott terek vektoriális összegével. Belátható, hogy ez egyenértékű azzal, hogy az egyes töltések által létrehozott skalárpotenciálok is összeadódnak. Ezt nevezzük a **szuperpozíció elvének**.

Vezetők, szigetelők, dielektrikumok, kondenzátor, magnetosztatika

Vezetők^[2]

Az elektromos vezetők - általában fémek - belsejében a delokalizált elektronok áramlása hozza létre a vezetés jelenségét. Ezt okozhatja például külső elektromos erőtér. Az így létrehozott áramot vagy mozgásban kell tartani egy külső energiaforrással, különben amint az elektronok kisütik a kezdeti teret létrehozó forrásokat, megállnak. Tehát az elektronok addig mozognak, amíg úgy nem rendeződnek, hogy a belső elektromos tér nulla legyen. Mivel a tér belül zérus, így annak divergenciája is nulla, és a Gauss-törvény értelmében akkor a töltéssűrűségnek is 0-nak kell lennie. Tehát a töltéseknek a vezető felületén kell lenniük. Ez képszerűen is logikus: a töltések taszítják egymást, megpróbálnak elszaladni egymás elől, így előbb-utóbb mindenki a falhoz szorulva figyeli a másikat. Ez egy stabil helyzet, amikor nagyjából maximalizálták az egymás közötti távolságot.

Továbbá a vezető felülete ekvipotenciális felület, a térerősségnek itt merőlegesnek kell lennie mindenhol. Ha lenne érintőleges tag, akkor az elektronok elmozdulnának a felület mentén. A töltéssűrűség arányos a felületnél lévő térerősség nagyságával:

$$\varepsilon_0 \mathbf{E} = \eta.$$

Különböző sugarú vezető gömbök esetében:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Azaz a térerősség fordítottan arányos a sugárral, nagyobb görbületű helyeken kisebb a térerősség, végtelen kis görbület esetén nagy a térerősség. Ezt nevezzük csúcshatásnak. Ez alapján működik a Segner-kerék, vagy a villámhárító, a van de Graaff-generátornál is fontos.

A vezető belsejében a térerősség zérus. Igaz ez a vezető belsejében lévő (üres) üregre is. Ez a Faraday-kalitka.

Dielektrikumok^[3]

Először Faraday bácsi fedezte fel, hogy közegekben az elektromos tér lecsökken. A csökkenés szorzófaktorát nevezte ε_r dielektromos állandónak:

$$\varepsilon_r := \frac{E_0}{E} > 1$$

Ahol E_{0az} a térerősség, amit ugyanilyen töltéseloszlás ugyanitt vákuumban hozna létre (pontosabban itt az abszolút értékeket osztjuk egymással). Ennek magyarázata az anyag szerkezetében keresendő. Bizonyos fajta anyagok molekulái rendelkeznek saját **P** elektromos dipólmomentummal.

A dipólmomentummal rendelkező molekulákból álló anyagokat nevezzük dielekktrikumnak. Elektromos tér hatására ezek a dipólok beállnak a térrel ellentétesen, leárnyékolva (csökkentve) ezzel a teret. Ez látható az alábbi ábrán is, egy egyszerű modellen. Itt a dipólok egy szabályos rácsba helyezve ülnek az anyagban.



Vegyünk egy zárt felületet, amibe belelóg a dielektrikum vége. Erre felírva a Gauss-törvényt az elektromos tér integrálja néhol pozitív lesz (ha éppen kettévágunk egy dipólsort), néhol pedig nulla (ha adott számú semleges dipólt fogtunk körbe). Mivel a dipólok igen kicsik, és közel vannak egymáshoz, ezt egy átlaggal közelíthetjük. Ha az f felületen N töltés van, és $\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{P}}{V}$, akkor ez az átlag:

$$\bar{q} = \frac{Nq_1\mathbf{l} + 0\cdot(d-l)}{d} = \frac{Nq_1\mathbf{l}}{d} = \frac{N\mathbf{p}}{df} \cdot f = -\int \mathbf{P}d\mathbf{f}$$

Ez akkor igaz, ha a térfogat, amire integráltunk, tartalmazza a test határfelületét, vagyis van egy effektív, úgynevezett polarizációs töltés a felületen. A Gauss-törvényt módosítva kapjuk:

$$\oint_{f} \mathbf{E} d\mathbf{f} = \frac{q}{\varepsilon_{0}} = \frac{1}{\varepsilon_{0}} \left(q_{valodi} + q_{polarizatios} \right) = \frac{1}{\varepsilon_{0}} q_{valodi} - \frac{1}{\varepsilon_{0}} \oint_{f} \mathbf{P} d\mathbf{f}$$

Ebből:

$$\oint_{f} \left(\varepsilon_{0} \mathbf{E} + \mathbf{P} \right) d\mathbf{f} = q_{valodi} \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{f} \mathbf{D} d\mathbf{f}$$

Ahol D-t nevezzük az elektromos eltolás vektorának.

Kísérleti tapasztalatok alapján lineáris közeg esetén \mathbf{E} és \mathbf{P} között helyfüggetlen lineáris kapcsolat van:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

Ahol χ_{eaz} elektromos szuszceptibilitás. Általános esetben ε_{0egy} szimmetrikus tenzor, de izotrop anyagokban skalár (vagy felfoghatjuk egy konstans és egy egységmátrix szorzatának). Az elektromos eltolás vektor így:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 \left(1 + \chi_e \right) \mathbf{E}$$

Ekkor definíció szerint:

$$(1+\chi_e)=\varepsilon_r$$

Ahol ε_{ra} relatív dielektromos együttható. $\varepsilon_{rés} \varepsilon_{0szorzata} \varepsilon$, a dielektromos együttható (vagy elektromos permittivitás).

Kondenzátor

Az elektromos töltés tárolására készített technikai eszközöket kondenzátornak (régies nevén "sűrítő"-nek) nevezzük. Minden kondenzátor legalább két párhuzamos vezető anyagból (fegyverzet), és a közöttük lévő szigetelő anyagból (dielektrikum) áll. Az első kondenzátor a leydeni palack volt, amelyet Pieter van Musschenbroek készített 1746-ban a leydeni egyetemen.

A kondenzátor kapacitása: $C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ (ahol Aa lemezek területe, dazok távolsága) Kísérleti tapasztalat alapján, ha dielektrikumot teszünk a kondenzátorba, akkor megnő a kapacitás.

 $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}$, ahol ε_r a dielektrikum relatív permittivitása.

Mivel a töltések nem változnak, ezért a feszültségnek kell csökkennie. Viszont ez a potenciálkülönbség nem más, mint a fegyverzetek közötti térerősség vonalintegrálja. Ebből az következik, hogy a kondenzátoron belül csökkennie kellett a térerősségnek.



Itt ugyanúgy alkalmazhatjuk a Gauss-tételt, és az ábrán látható (bekeretezett "dielektrikum") felületre integrálunk, akkor a leutóbbi következtetésünk alapján arra jutunk, hogy kisebb lesz a töltéssűrűség. (Olyan, mintha két kis kondenzátort kötnénk sorba.) Ez csak akkor lehet, ha a szigetelő egyik felén pozitív, másik felén negatív töltés indukálódik. (Vezető esetén tényleg ezt is várnánk...)

Ez okozza a kondenzátor kapacitásának megnövekedését.

Dipólmomentummal nem rendelkező szigetelők molekulái is dipólokká válhatnak külső elektromos tér hatására. Egy elég jól használható magyarázat: az elektronokra és a protonokra más irányú erők hatnak, így torzul a részecske, és az elektronok súlypontja nem esik egybe a protonéval egy részecskén belül. Így kialakul egy dipólus.

Fontos tudni, hogy a polarizáció **NEM** azonos a megosztás jelenvégével. Ez utóbbiban valódi töltések keletkeznek, és *vándorolnak* el a vezetőben, ezzel szemben a polarizációban csak atomi méretű *töltésszétválás* történik!

Számos anyag van, amelyre a fenti lineáris összefüggés nem igaz, a legérdekesebbek talán az elektrétek, amelyek állandó elektromos teret tartanak fenn, hasonlóan az állandó mágnesek mágneses teréhez.

Határfeltételek

Kérdésként merülhet fel, hogy különböző relatív dielektromos állandójú dielektrikumok *határán* Eés Dhogyan viselkedik.

Az Maxwell-egyenletek integrális alakjából következik, hogy sztatika esetén:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0$$
$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{D} d\mathbf{f} = 0$$

Ezeket kell kielégíteni a határfeltételeken is. Felhasználva, hogy $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ megkaphatjuk a többi komponens transzformációját.

E tangenciális komponense folytonosan megy át a határon. Az 1 és 2 közeget elválasztó határfelületen vegyünk fel egy kis (ζ oldalú) négyzetet, a négyzet határfelületre merőleges oldalával tartsunk nullához. Ekkor az első összefüggésből következik, hogy:

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{s} = \mathbf{E}_1^t \zeta - \mathbf{E}_2^t \zeta = 0$$

Azaz két különböző közeg határfelületén az **E**elektromos térerősség érintő irányú komponense folytonosan halad át, a határfelület átlépése során változatlan marad:

$$\mathbf{E}_1^t = \mathbf{E}_2^t$$

A $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ összefüggésből adódik, hogy \mathbf{D} tangenciális komponensének ugrása van a határon:

$$\frac{\mathbf{D}_1^t}{\mathbf{D}_2^t} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Dnormál komponense folytonosan megy át a határon. Az 1 és 2 közeget elválasztó határfelületen vegyünk fel egy kis (ffelületű) kockát, a kocka határfelületre merőleges oldalaival tartsunk nullához. Ekkor a második összefüggésből következik, hogy:

$$\oint \mathbf{D}d\mathbf{f} = \mathbf{D}_1^n f - \mathbf{D}_2^n f = 0$$

Tehát az eltolásvektor normál komponense a két közeg határfelületén folytonosan halad át. Viszont a $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ összefüggés alapján az elektromos térerősség normál komponense ugrik:

$$\frac{\mathbf{E}_1^n}{\mathbf{E}_2^n} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Eés Dvektorok törési törvénye: Vegyünk fel egy beesési merőlegest a közeg határán és jelöljük az **E**és **D** vektorral bezárt szögét α_1 -gyel az egyik közegben (beesési szög) és α_2 -vel a másik közegben (törési szög), ekkor a következő törvény írható fel:

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\mathbf{E}_1^t/\mathbf{E}_1^n}{\mathbf{E}_2^t/\mathbf{E}_2^n} = \frac{\mathbf{D}_1^t/\mathbf{D}_1^n}{\mathbf{D}_2^t/\mathbf{D}_2^n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Magnetosztatika [4]

A mágneses tér jellemzésre a **H** mágneses térerősséget használjuk, a Maxwell-egyenletek alapján sztatika és üres tér estén a következő egyenleteket elégíti ki:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

 $\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

Az divergenciára vonatkozó egyenlet azt írja le, hogy nem létezik mágneses monopólus, szemben az elektromos esettel.

Mágneses tér mágnesezhető anyagok jelenlétében

Hasonlóan mint elektromos tér esetén a polarizáció, itt az közeg mágnesezettsége jelenik meg: div H = -div Mahol Maz anyag mágnesezettsége. Ez pici elemi mágneses dipólokból adódik. Ezt adhatják spinek, és köráramok. A mágneses dipól hasonlóan fogható fel, mint egy elektromos, azon kivétellel, hogy nem lehet monopólusokból előállítani, lévén azok elvileg nem léteznek. A elektrosztatikával analóg módón vezessük be a mágneses térerősség vektort:

$$\mathbf{H} := \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

Párhuzam állítható az elektrosztatikus, és a magnetosztatikus esetek között: \mathbf{E} analógja \mathbf{H} , és \mathbf{D} párja \mathbf{B} .

Lineáris közeg esetén a következő kapcsolat van a mágneses indukció és mágneses térerősség vektor között:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu_0 \left(1 + \chi_m \right) \mathbf{H}$$

Ahol μ_{0a} vákuum mágneses permeabilitása, μ_{raz} anyagra jellemző relatív mágneses permeabilitás, μ_{pedig} a mágneses permeabilitás. χ_{maz} anyag mágneses szuszceptibilitása. Így a közeg mágnesezettsége és mágneses térerőssége közti kapcsolat:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = \mu_r \mathbf{H} - \mathbf{H} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_m \mathbf{H}$$

Az anyagok két csoportra oszthatóak, attól függően, hogy milyen χ_m előjele: ha $\chi_m < 0$ akkor diamágnesről, ha $\chi_m > 0$ akkor paramágneses anyagról beszélhetünk. Diamágnes lerontja, a paramágnes pedig fölerősíti saját magában a külső mágness teret. Meg kell jegyezni, hogy χ_m mindkét esetben igen kicsi szám, így a belső és a külső mágneses tér nem sokban különbözik. A szupravezetőkre $\chi_m = -1$, tehát formálisan hívhatjuk őket tökéletes diamágnesnek, azaz teljesen kiszorítják magukból a mágneses teret, bennük $\mathbf{B} = 0$. Azonban a fizikájuk, és χ_m nagyságrendje is gyökeresen eltér a diamágnesekétől, így a kétféle anyagnak nincs sok köze egymáshoz. De ez már egy másik történet... (Vagyis másik tétel.) Diamágneses anyagok szuszceptibilitása hőmérsékletfüggetlen. Paramágneses anyagoknak szuszeptibilitása fordítottan arányos a hőmérséklettel (Courie törvény). Továbbá vannak ferromágneses anyagok, ezeknél **H**és **M**értéke nem arányos, hanem bonyolultabb kapcsolat figyelhető meg. Fontos megjegyezni a következő összefüggést:

$$\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} = c_0^2$$

Ahol c_{0a} vákuumbeli fénysebesség. Közegek esetén a fény is lassabban terjed, ekkor sebessége: $c^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon}$, így látható, hogy a törésmutató ekképp áll elő: $n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$.

B és H vektorok viselkedése két közeg határán

Az elektrosztatikában felírtakhoz hasonló alakú határfeltételeket kaphatunk. Mivel a gondolatmenet kb. ugyanaz, csak röviden közlöm:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{H}_n d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow \mathbf{H}_1^t = \mathbf{H}_2^t$$
$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{B}_n d\mathbf{f} = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_1^n = \mathbf{B}_2^n$$

Stacionárius áram, áramköri törvények: Kirchhoff-törvények, Ohm-törvény

A stacionárius áram kifejezés arra utal, hogy nincsen időbeli változása az áramnak. Ez állandó mágneses teret hoz létre maga körül. Gyakran használjuk a lineáris vezető kifejezést. Ez hasonló absztrakció, mint a ponttöltés bevezetése sztatikában. Itt arra kell gondolni, hogy adott egy görbe a térben, és ennek a görbének minden pontjában egy **j**áramsűrűség van, amely párhuzamos a görbe irányvektorával. Az áramot valamilyen potenciálkülönbség hajtja körben az áramkörben. Ezt valamilyen hatással (kémiai, mechanikai, stb.) létre kell hozni, és fenn kell tartani. Erre bevezetjük az elektromotoros erőt: ez azzal a térerősséggel egyenlő, amely a töltésszétválasztás során létrejött teret kompenzálja, ha nem folyik áram.

Kirchhoff törvények[5]

A Kirchhoff-törvények a villamosságtanban a töltés és az energia megmaradását tárgyalják. Feladatok esetén is jól alkalmazhatjuk (ablak módszer).

- Huroktörvény (energia megmaradás): Egy zárt áramköri hurokban a feszültségek előjeles összege zérus (feltéve, hogy nincs külső mágneses tér).
- Csomópont-törvény (töltésmegmaradás): Az egy áramköri csomópontban összefutó áramok előjeles összege zérus. Ez a kontinuitási egyenlet speciális esete.

Ohm-törvény

Általában: $R = \frac{U}{I}$ A lokális Ohm-törvény:

 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$

ahol **j**az áramsűrűség, **E**az elektromos térerősség, $\frac{1}{\rho} = \sigma_a$ fajlagos vezetőképesség és ρ_a fajlagos ellenállás.

Fontos megjegyezni, hogy ezt sem tartalmazzák a Maxwell-egyenletek, tulajdonképpen ez is anyagi egyenlet. Lásd a kereszteffektusoknál található levezetést.

Érdemes megyjegyezni, hogy a kontinuitási egyenlet miatt az áramsűrűség normális komponense a határfelületeken egyenlő, azonban ha két olyan anyag van a két oldalon, amelyek vezetőképessége (ellenállása) más, akkor a térerősség is különböző kell, hogy legyen, és az eredmény az, hogy a felületen töltésfelhalmozódás alakul ki.

Mágneses hatások

Az egyenárammal átjárt lineáris vezető egy infinitezinális darabja által létrehozott mágneses teret integrálva a vezető vonalára megkapjuk a mágneses teret. Ezt a Biot-Savart törvény adja meg. Ez levezethető a stacionáruis állapotot leíró Maxwell-egyenletekből:

$$rot \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Az eredmény:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3} d^3 r'$$

Ennek egy speciális alkalmazása, amit igen sokszor használ a fizika, az egyetlen kis áramhurok által látrehozott mágneses tér. Ha a hurokban I áram folyik, akkor bevezetjük a mágneses momentumot (hasonló az elektromos dipólhoz):

$$\mathbf{m} = I \int df$$

ahol az áramot a hurok által behatárolt felület nagyságával szoroztuk meg, az irányt a jobbkéz szabály adja. Ennek sehítségével a kis hurok mágneses tere:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{mr})\mathbf{r}}{r^5} \right) - \frac{\mathbf{m}}{r^3}$$

Az így létrehozott térben a töltésekre természetesen hat a Lorentz-erő. Ennek következménye az is, hogy két párhuzamos lineáris vezető között erőhatás ébred, ha bennük áram folyik. Ennek mértéke:

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

Ha egy irányba folyik az áram a két vezetőben, akkor vonzzák egymást, ha ellentétesen, akkor taszítják egymást.

Tekercsek

Ha feltekerünk hélixbe egy vezetőt, és áramot folyatunk át rajta, akkor az egyes hurkok mágneses tere összeadódik, továbbá jó közelítéssel a tekercsen belül homogén terünk lesz, ami a szélek felé egyre jobban leromlik. A létrehozott **B** tér egyenesen arányos az áramerősséggel, és a menetszámmal (n).

Hivatkozások:

- [1] Teljes Maxwell-egyenletek: itt
- [2] Feynman Mai Fizika 5: 57.9 Elektrosztatika
- [3] Feynman Mai Fizika 5: 62. Dielektrikumok
- [4] http://en.wikipedia.org/wiki/Magnetization
- [5] http://csega.homeip.net/wiki/index.php/Elektrodinamika#RLC_elemek.2C_.C3.A1ramk.C3.B6r.C3.B6k

Záróvizsga tematika

 Tételek
 A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktul megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszerkezet | A magfizika alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok | Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

Elektrodinamika

A Maxwell-egyenletek

A teljes Maxwell-egyenletek differenciális alakban a következőek:

$$c^{2} \operatorname{rot} B = \partial_{t} E + \frac{j}{\epsilon_{0}}$$
$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_{0}}$$
$$\operatorname{rot} E = -\partial_{t} B$$
$$\operatorname{div} B = 0$$

Az első egyenlet az áram mágneses hatását fejezi ki: azaz mágneses hatást a változó elektromos tér, illetve a folyó áram kelt. Az második egyenlet azt fejezi ki, hogy az elektromos tér forrásai a töltések. A harmadik egyenlet szerint a változó mágneses tér elektromos teret kelt. A negyedik egyenlet szerint a mágneses térnek nincs töltése (nincs mágneses monopólus). Az egyenletek kissé variálhatóak kihasználva, hogy:

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}$$

Ezek az egyenletek térrészenként érvényesek. Megfogalmazhatóak a fenti egyenletek integrális alakban is, azok a határokon is leírják a térmennyiségeket, míg a differenciálisokhoz ezeket külön hozzá kell kapcsolni. Továbbá a Maxwell-egyenletek nem tartalmazzák az anyagi hatásokat, azokat külön egyenletekkel kell csatolni, amelyek E és D továbbá B és H közötti kapcsolatokat írják le. Ezen felül a Lorentz-erő sem vezethető le klasszikusan a fentiekből:

$$F = q\left(E + v \times B\right)$$

Az egyenletek implicite tartalmazzák a töltésekre vonatkozó kontinuitási egyenletet, amit például az első egyenlet divergenciájából vezethetünk le:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} j = 0$$

Indukció

Stacionárius áram közelítés: feltesszük, hogy nincs jelen változó elektormos tér, így az ennek megfelelő tag hiányzik a harmadik Maxwell-egyenletből.

Nyugalmiindukció

Az időben változó mágneses tér elektormos teret kelt. A harmadik Maxwell-törvény integrális alakját használva:

$$U_i = \oint E ds = -\int \frac{\partial B}{\partial t} df = -\frac{\partial}{\partial t} \int B df = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi$$

Ahol U az indukált feszültség, Φ a mágneses fluxus.

Mozgásiindukció

A mágneses térben mozgó vezetőben áram indukálódik a Lorentz-erő miatt.

Ha veszünk egy mágneses térben levő téglalap alakú áramkört, amelynek egyik éle L hosszúságú, és ezt a részét mozgatjuk v sebességgel, így a másik él hossza x(t) szerint változik. Ekkor ez áramot tud hajtani az áramkörben:

$$U_i = \oint (v \times B) \, ds = vBL = B \frac{d}{dt} x(t)L$$

Itt felismerhetjük az áramkör keresztmetszetét, így voltaképpen ismét a fluxusváltozás jelenik meg:

$$U_i = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi$$

Kölcsönös- és önindukció

Vegyünk egy áramkörnek egy hurkát (k-dikat) hurkot, és integráljuk körbe az elektromos térerősséget. Kirchhoff huroktörvénye miatt az összes feszültség nulla lenne, ha nem lenne változó mágneses tér. Azonban ha ez mégis jelen van, akkor az megjelenik a jobboldalon:

$$\oint Eds = -\int \partial_t Bdf$$

A baloldalra beírjuk az Ohm-törvényt, és az elektromotoros erőt, a jobboldalra a vektorpotenciált:

$$\oint \frac{j}{\sigma} ds - \oint E' ds = -\partial_t \int \operatorname{rot} A dt$$

Mivel a teljes körre integrálunk, az Ohm-törvényt beírhatjuk a klasszikus formában az áramerősséggel kifejezve, az elektromotoros erőt pedig az összes potenciáljával helyettesítjük. A jobboldalon alkalmazzuk a Stokes-tételt, így a felületi integrált vonalintegrálra írjuk át:

$$I_k \cdot R_k - \mathcal{E} = -\partial_t \oint A ds$$

A jobboldalra beírhatjuk a lineáris vezető vektorpotenciáljának képletét:

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{ds'}{|r - r'|}$$

Visszaírva:

Visszairva:

$$I_k \cdot R_k - \mathcal{E}_k = -\frac{\mu_0}{4\pi} \partial_t \sum_{i=1}^n I_i \int \int \frac{ds_k ds'_i}{|r_k - r'_i|}$$

Az integrálokra a konstansokkla egybeolvasztva bevezetjük az indukciós együtthatót, L-et:

$$I_k \cdot R_k - \mathcal{E}_k = -\sum_{i=1}^n \dot{I}_i L_{ik}$$

Amennyiben L-nek a két indexe azonos, akkor az áramkörben folyó áram által keltett mágnesestérnek az áramkörre való visszahatásának együtthatójáról, azaz az önindukciós együtthatóról beszélünk. Ellenkező esetben kölcsönös indukcióról van szó, azaz egy másik áramkörrészben folyó változó áram kelt ebben az áramkörben feszültséget a mágneses hatása révén.

Az elektromágneses tér makroszkópikus mennyiségei

Energia

Tekintsük első és a harmadik Maxwell-egyenlet. Az elsőt szorozzuk meg $-\epsilon_0 E$ -vel, a harmadikat $\epsilon_0 c^2 B$ -vel, adjuk össze, és integráljuk ki térfogatra:

$$-\frac{d}{dt}\int \left[\frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{\epsilon_0c^2}{2}B^2\right]dV = \int EjdV - \epsilon_0c^2\int \operatorname{div}(B\times E)dV$$

Itt kihasználtuk a jobboldalon, hogy $\operatorname{div}(B \times E) = B \operatorname{rot} E + E \operatorname{rot} B$. A baloldali integrandus az energiasűrűség (jel.: u). A jobboldali első tag tartalmazza a konvektív töltéseken végzett munkát, a Joule-hőt, a telep által szolgáltatott energiát. A második tag a tekintett térfogat felületén átáramlott elektromágneses energiát jelenti, például hullámok formájában. Ez alapján definiáljuk a Poyinting-vektort, másnéven energiasűrűség-vektort:

 $S = \epsilon_0 c^2 E \times B$

Impulzus

Definiálhatjuk az impulzussűrűséget is:

 $g = \epsilon_0 \left(E \times B \right)$

Ha az impulzus megmaradást is fel akarjuk írni:

$$\frac{d}{dt}\left(P_{mechanikai} + P_{mezo}\right) = \oint_{S} \mathbf{Tn} df$$

Itt S egy felület, amely egy V térfogatot határol, n a felület kifelé mutató normálvektora, a jobboldalon felületi integrál van az S felületre, az integrandusban a Maxwell-féle feszültségtenzor jelent meg (részletesebben lásd itt ^[1]). A **Tn** szorzat az S felület egységnyi részén egységnyi idő alatt a V térfogatba áramló impulzus. Az így definiált impulzus segítségével értelmezhető egyszerűen például Lebegyev fénynyomásos kísérlete.

Impulzusmomentum

Definiálhatjuk az elektromágneses mező impulzusmomentum-sűrűségét is:

$$m = \epsilon_0 r \times (E \times B)$$

Az impulzusmomentum fluxusa megint a Maxwell-feszültésgtenzorral fejezhető ki:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T} \times x$$

Vigyázat: M már harmadrendű tenzor! Komponensenként kiírva:

 $M_{ijk} = T_{ij}x_k - T_{ik}x_j$

RLC elemek, áramkörök

RLC körnek nevezzük az olyan áramkört, amelyben ellenállás, induktivitás, és kapacitás is található. Az induktivitásban az áramerősség nem változhat ugrásszerűen, a kondenzátoron a feszültség. Általánosan a következő differenciál egyenletet írhatjuk fel:

$$L\frac{d^2}{dt^2}Q + R\frac{d}{dt}Q + \frac{Q}{C} = \epsilon$$

A jobboldalon az áramforrások elektromotoros erejei állnak összevonva. Ez a differenciál-egyenlet teljesen analóg a mechanikai kényszerrezgésekkel, ezért a megoldása is hasonló eredményekre vezet, exponenciális lecsengésre, vagy periodikus, de csillapított rezgésre.

Az áramkörökre fontosak továbbá a Kirchhoff-törvények, amelyek nem önállóak, levezethetőek a Maxwell-egyenletekből.

- Huroktörvény: Egy zárt áramköri hurokban a feszültségek előjeles összege zérus (feltéve, hogy nincs külső mágneses tér).
- Csomópont-törvény: Az egy áramköri csomópontban összefutó áramok előjeles összege zérus.

Rezgőkör

Tekintsünk egy RL-kört, amelyet egy periodikus feszültségforrás táplál. Mivel most nincs kapacitás, az előző pontban felírt differenciálegyenletből elhagyható a kapacitásos tag, és átírható az egyenlet áramerősségre, így csupán egy elsőrendű egyenletet kell megoldanunk. A megoldásra egy tranziens lecsengő, és egy stacionárius tagot kapunk. Mivel az áramkörökben gyakorlati szempontból igen gyorsan beáll az egyensúly, elég ha a stacionáriust vizsgáljuk. Ebből látható, hogy a megoldás áramerősség frekvenciája ugyanakkora, mint a feszültségforrásé, azonban ahhoz képest késik:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta)$$
$$I_0 = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$
$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a Joule-hő összefügg a rezgőkör paramétereivel:

$$\bar{\epsilon I} = \frac{\epsilon_0 I_0}{2} \mathrm{cos}\delta$$

Általános RLC körben azt érdemes tudni, hogy az áramkörbe tett kapacitás hatására az áramerősség sietni, induktivitás hatására késni fog az elektromotoros erőhöz képest. Az általános formula:

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Transzformátor

A transzformátor feltalálását Nikola Tesla nevéhez kötik. A transzformátorban két induktíven csatolt tekercs van, azaz a bármelyik tekercs mágneses fluxusa átmegy mindkét tekercsen. Az eredmény az, hogy ha váltakozó feszültséggel tápláljuk meg az egyik tekercset, akkor az változó mágnesesteret kelt, az pedig a másik tekercsben változó áramot indukál. A váltakozás frekvenciája **ugyanaz** mindkét áramkörben! Egyedül az áramerősségek értékeiben lesz különbség. A szekunder és primer körök közötti amplitúdó aránya:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_{22}^2}}$$

Ahol L_{12a} két áramkör kölcsönös indukciós együtthatója, L_{22a} szekunder tekercs önindukciós együtthatója, R_{2a} szekunder oldal ohmikus ellenállása, azaz a nevezőben a második kör impedanciája szerepel. Tehát az átfolyó áramot a kölcsönös indukció erőssége és a kör impedanciájának mértéke szabja meg. Fellép egy fáziskésés is a két tekercs között, ennek mértéke:

$$\operatorname{tg}\left(\delta_{2}-\delta_{1}\right)=-\frac{R_{2}}{\omega L_{22}}$$

Váltakozóáram

Mivel a Joule-hő veszteség az áramnak négyzetes függvénye, ezért az elektromos áram szállítását célszerű minél kisebb áramerősséggel tenni, ez az állandó ellenállás mellett nagy feszültséget jelent. Azonban a felhasználás során általában kisfeszültségre és nagy áramra van szükség. Ezért az elektromos távvezetékek két végén transzformátorok vannak, amelyek a feszültséget (áramot) konvertálják. Az egész rendszer tradicionálisan a XIX. század végén alakult ki. Az egész eljárás csak aránylag nagy távolságokon éri meg, kis távolságokra, és speciális helyeken (például

tengeri kábelekben) nagyfeszültségű egyenáramot használnak szállításra.

Elektromos áram a mindennapokban

Előállítás

Az elektromos áramot a kisszámú félvezető elven működő naperőműtől eltekintve valamilyen forgómozgásból nyerik, ahol ezt a mozogást periodikusan változó mágnesestérrel elektromos áram indukálására használják fel. A kezdeti forgómozgást például a széllel meghajtott lapátkerék, vízzel meghajtott turbina, vagy gőzzel meghajtott turbina szolgáltathatja. Az első két esetben a mozgó közeg természetesen rendelkezésre áll. A gőzzel hajtott esetben a gőz előállításához valamilyen hőforrás szükséges, ez vagy valamilyen éghető anyag felhasználásával (tőzeg, lignit, kőszén, olaj, gáz), vagy atomenergiával történik. A felsorolt tüzelőanyagok korlátossága miatt egyre nagyobb figyelem fordítódik ezek kiváltására megújuló vagy alternatív (fúziós erőmű) energiatermelési eljárások alkalmazásával.

Szállítás

Lásd feljebb.

Felhasználás

Igen sokrétű, mivel mind mágneses, kémiai, biológiai hatása van, ezenfelül könnyen és egyszerűen szabályozható, és sok nagyságrenden keresztül megbízhatóan alkalmazható.

Motorok

A motorok az áram mágneses hatását alkalmazzák forítva, mint a generátorok, itt a bejövő áram hatására a mágneses forgórész kerül mozgásba. Megkülönböztetünk egyenáramú és váltóáramú motorokat, valamint léptető motorokat. Különböző alkalmzásokra és különböző árra különböző típusú motorokat alkalmaznak. lásd: itt ^[2].

Záróvizsga tematika

 Tételek
 A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktul

 megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és

 magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A

 kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszerkezet | A magfizika

 alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok |

 Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

Hivatkozások

- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_stress-energy_tensor
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Electric_motor#Comparison_of_motor_types

Geometriai optika és alkalmazásai

Megjegyzés: ez a tétel nagyon erősen követi Cserti József "Optika és Relativitáselmélet" tárgyra készített diáit, lényegében azok kivonata a tétel tematikáját figyelembe véve. Ezekből a diákból is nagyon jól lehet tanulni, megtalálhatóak Cserti József honlapján.^[1]

Bevezető, fény, fénysugár

A geometriai optika nem foglalkozik a fény hullám, vagy részecske tulajdonságával. Pusztán a fény viselkedését írja le olyan távolság- és időértékeknél, melyek jóval nagyobbak, mint a fény néhány mennyiségi jellemzője.

Alapfeltevései^[2]:

- a fény egyenes vonalban terjed, ha homogén közegben halad és semmi sincs az útjában
- közeghatárokon megtörik és/vagy visszaverődik
- visszaverődésnél a beesési és visszaverődési szög megegyezik
- törésnél a beesési és törési szög közötti összefüggést a Snellius-Descartes törvény adja meg:

 $sin\vartheta_b = nsin\vartheta_t$, ahol ϑ_b a beesési, ϑ_t a törési (transzmissziós szög), n egy arányszám, az adott közeg (vákuumhoz viszonyított) törésmutatója.

• a fénysugarak közt egymásra hatás nem mutatkozik

A Fermat-elv

A Fermat-elv, vagy legrövidebb idő elve azt mondja ki, hogy két pont között a fény az összes lehetséges út közül azt választja, aminek megtételéhez a legrövidebb időtartam szükséges.^[3]

Közegben a fény sebessége: $\frac{c_0}{n}$, ahol n a fent említett törésmutató (mely függhet anyagtól, helytől, vagy a fény

színétől), ^Copedig a vákuumbeli fénysebesség, értéke a Maxwell-egyenletek alapján: $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, ahol

 $\epsilon_0 = 8.8510^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$ a vákuum dielektromos állandója. $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ a vákuum permeabilitása. A fentiek alapján: $c_0 = 299792458 \frac{m}{s}$

A Fermat-elv tehát azt mondja ki, hogy a fény két pont között a legrövidebb idő alatt megtehető utat teszi meg. Kicsit pontosabban a fénysugár pályáját sok más szomszédos, csaknem azonos időt igénylő terjedési út közül választja.^[4] Ennek kiszámítása a következőképpen történik:



A fenti pályára vett integrálnak (ahol n(**r**) helyfüggő változó) szélsőértéket kell adnia. $\int_{A}^{B} n(\mathbf{r}) ds = extremum$, ahol **r** a helyvektor^[5]. Pl.:



Az eikonál közelítés

	Homogén eset	Inhomogén eset
Hullámegyenlet	$\frac{\partial^2 \phi({\bf r},t)}{\partial t^2} = c^2 \triangle \phi$	$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = c^2(\mathbf{r}) \triangle \phi$
Megoldása	$\phi(\mathbf{r},t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}$	$\phi(\mathbf{r},t) = A(\mathbf{r},t)e^{i\varphi(\mathbf{r},t)}$

Az inhomogén esetben felírt megoldás csak a lassan változó amplitudójú (A), és gyorsan változó fázisú (ϕ - λ távolságon 2π -t változik) síkhullámokra vonatkozik. Lassan változó alatt azt értem, hogy a karakterisztikus hossz $\left(L \sim \frac{1}{\nabla n}\right)$ jóval nagyobb, mint a hullámhossz (λ). Tehát inhomogén esetben, lassan változó amplitudó és gyorsan változó fázis esetén $\varphi(\mathbf{r}, t)$ hordozza az információt, ez a geometriai optika. ^[6]



$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(A e^{i\varphi} \right) = \left(\frac{\partial A}{\partial t} + i A \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{i\varphi}$$

Tehát:

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + i A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] e^{i(\varphi(\mathbf{r},t))} \approx -A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 e^{i(\varphi(\mathbf{r},t))}$$
$$c^2(\mathbf{r}) \triangle \phi = -Ac^2(\mathbf{r}) (\operatorname{grad}\varphi)^2 e^{i\varphi(\mathbf{r},t)}$$

A fentiek alapján tehát:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = c^2(\mathbf{r})(\mathrm{grad}\varphi)^2 \quad \text{Ez az eikonál-egyenlet.}$$

Ahol $c(\mathbf{r}) = \frac{c_0}{n(\mathbf{r})}$, $n(\mathbf{r})$ pedig a lokális (helyfüggő) törésmutató. A $\varphi = const$ felületek adják meg az állandó

fázisú felületeket, vagyis a hullámfrontokat. Az eikonál-egyenlet ezek mozgását írja le.

Fejtsük sorba a fázist: $\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} t + \dots$ Majd írjuk be $\phi(\mathbf{r}, t)$ helyére: $\phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i\varphi} = Ae^{i\varphi_0}e^{i\left(\nabla \varphi \mathbf{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}t\right)} \sim Ae^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$ A fentiek fényében:

$$\label{eq:k} \boxed{ \begin{aligned} \mathbf{k}(\mathbf{r},t) &= \mathrm{grad}\varphi(\mathbf{r},t) \\ \\ \omega(\mathbf{r},t) &= -\frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{aligned} }$$

Az eikonál-egyenlet egyszerűsödik, ha ω állandó, ekkor: $\varphi(\mathbf{r}, t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$. Az jobb oldal utolsó tagjának neve "rövidített eikonál".

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega(\mathbf{r}, t)$$

És:

$$\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}\psi$$

E kettőből jön ez:

$$\omega^2 = \left(\frac{c_0}{n(\mathbf{r})}\right)^2 (\operatorname{grad}\psi)^2 = \left(\frac{c_0}{n(\mathbf{r})}\right)^2 \mathbf{k}^2(\mathbf{r})$$

Az eikonál közelítés korlátai

A levezetés során a következő közelítéseket használtuk ki:

- Az amplitudó változása a hullámhosszal szorozva kisebb az amplitudónál,
- A hullámfelület görbületi sugara sokkal nagyobb a hullámhossznál,
- Az amplitudófelület görbületi sugara és a hullámhossz aránya sokkal nagyobb a hullámhossz és az amplidutó arányánál,
- A hullámfront lineáris méretei sokkal nagyobbak a hullámhossznál.

Ezek fényében az eikonál közelítés nem használható például fényforrások illetve fókuszpontok közelében, fény-árnyék határán. Továbbá mindezen feltételek erősen függenek a tekintett hullám hullámhosszától.

Analógia a klasszikus mechanikával

A fentiek fényében itt csak egy rövid táblázatban foglalnám össze a legfontosabbakat^[8]:

	Pontmechanika		Geometriai optika	
Hatásintegrál	$S(\mathbf{r},t) = \int\limits_{P_0}^P L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})dt$		$arphi({f r},t)$	Eikonál
	$\mathbf{p} = gradS$		$\mathbf{k} = grad\varphi$	
		$\mathbf{p}\sim\mathbf{k}$		
		$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$		
	$E = -\frac{\partial S}{\partial t}$		$\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$	
		$E\sim\omega$		
		$E=\hbar\omega$		

Hamilton-Jacobi egyenlet	$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = gradS)$	$-\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = grad\phi)$	Eikonál-egyenlet
	$E=H({\bf r},{\bf p})$	$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})$	Diszperziós reláció
E mozgásállandó	$S(\mathbf{r},t) = -Et + S_0(\mathbf{r})$	$\varphi(\mathbf{r},t) = -\omega t + \psi(\mathbf{r})$	$\omega_{ m mozg{\acute{a}s{a}lland\acute{o}}}$
Rövidített Hamilton-Jacobi egyenlet	$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p} = gradS)$	$\omega = \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k} = grad\varphi)$	Rövidített eikonál-egyenlet
Hamilton-féle kanonikus egyenletek	$\dot{r} = \frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial p}$	$\dot{r} = rac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial k}$	Csoportsebesség
Hamilton-féle kanonikus egyenletek	$\dot{p} = -\frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{r}}$	$\dot{k} = -\frac{\partial \Omega(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial \mathbf{r}}$	Hamilton-féle sugáregyenletek
Maupertius-elv	$\delta \int \mathbf{p} dr = 0$	$\delta \int \mathbf{k} dr = 0 = \frac{\omega}{c_0} \delta \int n(\mathbf{r}) dl \sim \delta \int n(\mathbf{r}) dl = 0$	Optikai úthossz ~ Fermat-elv

A Hamilton-féle sugáregyenletekből paraxiális közelítésben levezethető a lencsetörvény.

Megjegyzés: ugyanez Cserti József diáján megvan, (szerintem) kicsit átláthatóbban, ezért ezt az oldalt beszúrtam képként.



Ami az analógiából hiányzik

Pontmechanikában a Lagrange-függvény:

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - H, \text{ abol } \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \acute{es} H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \dot{\mathbf{r}} - L$$

Keressük meg ugyanezt az optikában:

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{k}\dot{\mathbf{r}} - \Omega$$
, and $\Omega = c(\mathbf{r}) |k| \le \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{k}} = c(\mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$

A fentiek alapján a Lagrange-függvény az optikában:

$$\begin{split} L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) &= \left(c(\mathbf{r})\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right)\mathbf{k} - c(\mathbf{r}) |\mathbf{k}| \equiv 0_{\text{A Lagrange-függvény az optikában azonosan nulla.} \\ \text{A mechanikai törésmutató meghatározásánál figyelni kell arra, hogy az analógiát ne a Fermat-elvből levezetett} \\ \omega\delta \int \frac{1}{c(\mathbf{r})}dl$$
és ennek mintájára felírt $\delta \int \frac{1}{v(\mathbf{r})}dl$ egyenlet között vegyük, mert $c(\mathbf{r})$ a fázissebesség, a mechanikai analógiában látott $\frac{1}{v(\mathbf{r})}$ -ben a $v(\mathbf{r})$ a csoportsebességnek feleltethető meg, melynek értéke az optikában: $\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$. A helyes analógia a Fermat-elv és a Maupertius-elv közötti megfeleltetés. Ezt végigszámolva a mechanikában a törésmutató értékére a következőt kapjuk: $0 = \delta \int \mathbf{p}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \delta \int |p| dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))} dl$, mivel $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - V(\mathbf{r})$. Ennek nyomán a törésmutató analogonja a mechanikában: $n(\mathbf{r}) = \sqrt{E - V(\mathbf{r})}$. $V(\mathbf{r}) = eU(\mathbf{r})$ alkalmas megválasztásával

törésmutató analogonja a mechanikában: $n(\mathbf{r}) = \sqrt{E - V(\mathbf{r})}$. $V(\mathbf{r}) = eU(\mathbf{r})$ alkalmas megválasztásáv elektrosztatikus lencsék/tükrök készíthetőek.

Részecske	Optika
$n(E,\mathbf{r})$ függ a részecske energiájától, diszperzív közeg	$n(\omega, \mathbf{r})_{\text{diszperzió}}$
Éles képhez monoenergetikus nyaláb kell.	Éles képhez monokromatikus fény kell.
$n(\mathbf{r})$ -re nincs korlát	$n > 1$, mert $c < c_0$

Paraxiális közelítés

Paraxiális közelítésben hengerszimmetrikus, tengelyközeli rendszereket vizsgálunk^[10].

- A tengelytől való távolság kisebb, mint bármilyen releváns fókusztávolság, vagy rendszerméret.
- A sugarak szögei kicsik a tengelyhez képest. ($\vartheta \ll 1$)
- Ebben a közelítésben: $sin\vartheta \approx tg\vartheta \approx \vartheta$

A fénysugarakat az optikai tengelytől mért (előjeles!) y távolsággal, és szintén az optikai tengellyel bezárt (előjeles!^[11]) szöggel jellemezzük.



Mátrix reprezentáció, leképezési törvények

Tetszőleges paraxiális rendszerben a fény terjedése leírható mátrix-, és vektorműveletekkel^[12]:

$$\left(\begin{array}{c} y\\ n_{1}\vartheta\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} y\\ n_{2}\vartheta\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} y\\ n_{2}\vartheta\end{array}\right) = \mathbf{M}\left(\begin{array}{c} y\\ n_{1}\vartheta\end{array}\right)$$

Három alapesetre felírhatunk mátrixokat, amiket aztán építőkövekként használhatunk összetett rendszerek leírására. Az alapesetek:

Szabad terjedés

A fény adott, ntörésmuattójú közegben dtávolságot tesz meg. Ilyenkor a szög és a törésmutató nyilván nem változik (vagyis kettejük szorzata sem). Viszont $\mathcal{Y} \vartheta$ függvényében igen, mégpedig a következőképpen:

$$y' = y + d \mathrm{tg} \vartheta \approx y + d \vartheta = y + \frac{d}{n} n \vartheta$$

Ebből már könnyű felírni a szabad terjedés mátrixát:

$$\mathbf{M}_{szab} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Törés gömbfelületen

A fény egy gömb felületű közeghatáron halad keresztül az ábra szerint. $\alpha \approx -\frac{y}{R}$, és y' = y.



A Snellius-Descartes-törvény kis szögekre: $n_1(\vartheta - \alpha) \approx n_2(\vartheta' - \alpha)$ Vagyis: $n_2\vartheta' = \frac{n_1 - n_2}{R}y + n_1\vartheta$ A törés mátrixa így:

A tores matrixa igy.

$$\mathbf{M}_{tores} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ \frac{n_1 - n_2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

Fontos észrevenni, hogy egy konvenciót hazsnáltunk: Relőjele a görbület irányától függően lehet pozitív, és negatív. Ha az ábrán látott eset áll fenn, akkor Rpozitív. Ha az ellenkező (a gömb középpontja a másik oldalon van), akkor negatív. Ez nem függ a fénysugár irányától! Ha a fénysugár megfordul, akkor is ugyanezt a konvenciót

kell használni!

Mégegy megjegyzendő, hogy látszik, hogy $R \rightarrow infesetre visszakapjuk az egységmátrixot. Ennek így is kell$ lennie, hiszen ez a sík törőfelület, ahogy \mathcal{Y} és $n\vartheta$ is állandó.

Visszaverődés gömbfelületről

Ez az eset hasonlít az elsőre (jelölések szempontjából is) azzal a kivétellel, hogy a fénysugár nem megtörik, hanem visszaverődik, és ugyanabban közegben halad tovább.

Szintén igazak az előbbi
$$\alpha \approx -\frac{y}{R}$$
, és $y' = y$ összefüggések, ám $\alpha - \vartheta' = \vartheta - \alpha$. Így:

$$n\vartheta' = -\frac{2n}{R}y - n\vartheta$$

Így a visszaverő gömbfelület mátrixa:

 $\mathbf{M}_{tukor} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ -\frac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix}$

Itt is lehet látni, hogy $R \rightarrow infesetben a síktükröt kapjuk vissza.$

Összefoglalva

Szabad terjedés	Törés gömbfelületen	Visszaverődés gömbfelületről
$\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{R} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix}$

A mátrix reprezentációnál a fénysugarat követve a mátrixokat balról jobbra szorozzuk össze, így megkapjuk a teljes rendszert leíró optikai mátrixot. (Fontos, hogy a fénysugarat kövessük, mert menet közben pl. meg is fordulhat.) Tetszőleges paraxiális optikai rendszerre igaz, hogy $det M = \pm 1$.

A leképezés fogalmai

- Fókuszpont: minden párhuzamos fénysugarat egy pontba gyűjtünk össze, y y'-től függetlenül valahol nulla lesz.
- Leképezés: egy pont leképezése során a pontból kiinduló fénysugarat ϑ -tól függetlenül egy másik pontba gyűjtjük össze.

A gömbtükör fókusza

A rendszer leképezési mátrixa egy szabad terjedési mátrixból és egy visszaverődési mátrix szorzatából áll, balról jobbra összeszorozva: $\begin{pmatrix} y \\ \vartheta \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2d}{R} & \frac{d}{n} \\ -\frac{2n}{R} & -1 \end{pmatrix}$ (Theta azért nulla, mert a tengellyel párhuzamosan érkeznek a sugarak:



$$\begin{pmatrix} y \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{2d}{R}\right)y \\ -\frac{2n}{R}y \end{pmatrix} \to y = \left(1 + \frac{2d}{R}\right)y$$
 is mivel a fókuszpontban y' = 0, ezért $d \equiv f = -\frac{R}{2}$

A gömbtükör leképezési törvénye

A rendszer leképezési mátrixa most egy tárgytól a tükörig tartó szabad terjedésből, egy visszaverődésből, és egy tükörtől a leképezésig tartó szabad terjedésből áll. A terjedési mátrix e három szorzata: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2k}{R} & k + \left(1 + \frac{2k}{R}\right)t \\ -\frac{2}{R} & -1 - \frac{2t}{R} \end{pmatrix}$

Mivel y' a leképezésnél független ϑ -tól, ezért a mátrix első sorának második eleme nullát ad, így (a gömbtükör fókuszára voantkozó összefüggés felhasználásával) megkapjuk a már ismert leképezési törvényt: $k + \left(1 + \frac{2k}{R}\right)t = k + \left(1 - \frac{k}{f}\right)t = 0 \rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}$

Vékony lencse fókusza

Egy vékony lencsénél két törőfelületről beszélhetünk, melyek két, R_1 és R_2 sugarú gömbfelületből állnak. A lencse anyagának törésmutatója n, a lencsét körülvevő közegé 1. A bal oldali törőfelület mátrixa M_L , a jobb oldalié M_R :

$$M_{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_{2}} & 1 \end{pmatrix} M_{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_{1}} & 1 \end{pmatrix}$$

Ezek szorzata a rendszert leíró mátrix ezek szorzata (balról jobbra haladva, előjelesen):

$$M = M_R M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

Az optikai tengellyel párhuzamosan beérkező fénysugár változása a rendszeren való áthaladás után:

$$\begin{pmatrix} y \\ \vartheta \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ yM_{21} \end{pmatrix}$$

És mivel:



Így
$$M_{21} = -\frac{1}{f}$$
, tehát a fókusztávolság: $\frac{1}{f} = -M_{21} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

Vékony lencse leképezése

A vékony lencse leképezésének leírásához három mátrixot kell figyelembe vennünk, egyszer a tárgytávolságnyi szabad terjedés mátrixát, egyszer a törés mátrixát (a fent megismert összefüggés alapján), egyszer pedig a lencsétől a képtávolságig terjedő szabad terjedés mátrixát. Ezeket összeszorzova kapjuk meg a teljes optikai rendszer mátrixát, ami a következőképpen néz ki:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{k}{f} & k + t - \frac{kt}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{t}{f} \end{pmatrix}$$

Mivel leképezésnél \mathcal{Y} független ϑ -tól, ezért $M_{12} = 0 \rightarrow k + t - \frac{\pi t}{f} = 0 \rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}$. Azaz itt is igaz a leképezési törvény.

Összetett optikai rendszerek

Összetett optikai rendszereknél nem mindig igaz elsőre a leképezési törvény, de mint látni fogjuk, kis trükkel újra igazzá tehetjük.

- Sok egymás melletti vékony lencse esetén esetén a dioptriák $\left(D = \frac{1}{f} [1/m]\right)$ összeadódnak.
- Vastag lencsék esetén szükség van az úgynevezett fősíkok bevezetésére. A fősíkok (lásd lejjebb) használatával a leképezési törvény újra igazzá tehető:



A tárgy-, és a képtávolságot a fősíkoktól mérve a leképezési törvény ismét igaz lesz. A fősíkok kiszámítása a következőképpen történik:

$$t_0 = f \frac{d}{R_2} \frac{n-1}{n}, k_0 = -f \frac{d}{R_1} \frac{n-1}{n}$$

A fókusztávolságot vastag lencsék esetén a következő összefüggés adja meg (ez a lencsekészítők alapképlete). Egyébként ez három mátrix összeszorzásából ered: a vékony lencse jobb-, és bal oldali törőmátrixa közé be kell iktatni egy n törésmutatójú közegben történő szabad terjedés mátrixát (ezzel jelezzük, hogy vastag lencséről van szó). E három mátrix szorzatából lehet megkapni a vastag lencse, mint optikai rendszer mátrixát.

A fókusztávolságot lencsékre a rendszermátrix második sorának első eleméből lehet megkapni (mint fentebb láthattuk): $\frac{1}{f} = (1-n) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + d \frac{n-1}{nR_1R_2} \right)$

Általános leképezés

Teljesen általános leképezés esetén a leképezési mátrix: $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$. Ezzel az a probléma, hogy nem lehet tudni, hogy hol a rendszer eleje és vége. Így módosítjuk egy kicsit: $M' = \begin{pmatrix} 1 & k_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k_0$ és toalkalmas megválasztásával (és kihasználva azt a tényt, hogy tetszőleges paraxiális optikai rendszer leképezési mátrixának determinánsa $detM = \pm 1$): $t_0 = \frac{1}{M_{21}} (detM - M_{22}) = \frac{1}{M_{21}} (\pm 1 - M_{22}), k_0 = \frac{1}{M_{21}} (detM - M_{11}) = \frac{1}{M_{21}} (\pm 1 - M_{11})$ így M'a következőképpen egyszerűsödik:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-detM}{M_{21}} \\ M_{21} & 1 \end{pmatrix}$$
, ami - mivel $detM = \pm 1$ - $M' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ M_{21} & 1 \end{pmatrix}$. Láttuk, hogy vékony lencséknél a mátrix éppen így néz ki, így meg tudjuk mondani a fókusztávolságot: $\frac{1}{f} = -M_{21}$.

Optikai eszközök (távcső, mikroszkóp), felbontóképesség

Az optikai eszközök közül néhányról csak említés szintjén, és a címben szereplő távcsőről és mikroszkópról részletesebben fogok írni.

Vetítő, fényképező, nagyítólencse, szemüveg

- Vetítő: egy egyszerű lencse (és egy tükör) segítségével a tárgyról távoli, nagyított képet állít elő.
- Fényképező: távoli tárgyról készít kicsinyített, valódi képet tükrök, lencsék és blendék (fényerőszabályzók) használatával. A képek felvétele fényérzékeny anyagra, vagy újabban CCD-chipek segítségével valamilyen digitális tárolóegységre (általában memóriakártya) történik.
- Nagyítólencse (lupe): nagyított, virtuális (k < 0) képet készít a fókusztávolságnál közelebb lévő tárgyakról:



A lupe nagyító tulajdonságát két szempontból is érdemes megvizsgálni, az egyik a **laterális nagyítás** (képméret/tárgyméret): $N = \frac{y_k}{y_t} = \frac{-k}{t} = \frac{f}{f-t}$ A másik a szögnagyítás: $N_{szög} = \frac{\theta_k}{\theta_t} \approx \frac{tg\theta_k}{tg\theta_t} = \frac{y_k/(-k)}{y_t/L_0} = \frac{-k}{t}\frac{L_0}{-k} = \frac{L_0}{t} \approx \frac{L_0}{f}$, mivel $k > L_0 \gg f \rightarrow t \approx f$

A lupe azért hasznos, mert a tisztánlátás távolsága körülbelül $L_0 \sim 25 cm$ (viszonylag szubjektív adat), a lupe segítségével pedig ennél nagyobb távolságú tárgyakat is tisztán láthatóvá tehetünk.

Szeműveg: korrekciós lencse a szemlencse elé (a szemlencse kb. 60-64 dioptriás). *Rövidlátás* esetén a fénytörés túl erős, a kép a retina előtt fókuszálódik, *szórólencse* kell (D < 0). *Távollátás* esetén a fénytörés nem elég erős, a kép a retina mögött fókuszálódik, *gyűjtőlencse* kell (D > 0).

Mikroszkóp és felbontóképesség

A lupe - bár sokmindenre jól használható - alapproblémája az, hogy nem tudjuk elég közel helyezni a szemünket. Ennek megoldására használjuk két lencsét, az egyik levetíti a képet (objektív), a másik pedig a lupe (okulár).



Egy mikroszkópban az objektív és az okulár fókuszsíkjai egymástól a mikroszkóp felépítése által meghatározott, állandó távolságban vannak. Ez az optikai tubushossz ($\overline{F_{obj}}F_{ok} = \Delta$). Egy mikroszkópban ennek szabványos értéke 160 mm.^[13]

Az objektív laterális nagyítása:
$$N_{obj} = \frac{y_k}{y_t} = \frac{k}{t} = \frac{k - f_{obj}}{f_{obj}}$$
. A mikroszkóp szögnagyítása:
 $N_{szög} = \frac{\theta_{obj}}{\theta_t} \approx \frac{tg\theta_{obj}}{tg\theta_t} = \frac{y_k/f_{ok}}{y_t/L_0} = \frac{y_k}{y_t}\frac{L_0}{f_{ok}} = \frac{\Delta}{f_{obj}}\frac{L_0}{f_{ok}}$
A tipikus nagyítás nagyságrendileg 1000 * 10

A tipikus nagyítás nagyságrendileg 1000

Felbontóképesség

Az optikai eszközök felbontóképességét a hullámoptika közelíthetősége határolja be. Tökéletes leképezést feltételezve a Fermat-elv szerint minden képalkotásban résztvevő fényút optikai úthossza megegyezik. A hullámoptika szerint mindenféle pályán haladhat a fény, de ott lesz nagy az amplitudó, ahol körülbelül azonos fázisban érkeznek a hullámok.



Szögnagyítás: $\frac{\delta}{L} < \frac{\lambda}{D}$. Azaz minden lencse megfelel egy résnek, amely $\frac{\lambda}{D}$ nagyságú diffrakciót okoz. Ez azt jelenti, hogy a mikroszkóp maximális felbontása: $f\frac{\lambda}{D}$. A lencsére jellemző $\frac{D}{f}$ hányadost numerikus apertúrának nevezik. (Vannak más definíciók is a numerikus apertúrára, pl: $nsin\alpha$, ahol $tg\alpha = \frac{D}{f}$. D/f tipikus értéke 0,3 körüli, de a maximálisan elérhető felbontóképesség akár a hullámhossz nagyságrendjébe esik.

Távcső

A távcsövek konfokális (egybeeső fókuszponttal rendelkező) összetett lencserendszerek. A tárgy a végtelenben van, a kép is egy végtelen távoli pontban keletkezik. Laterális nagyításról tehát nincs értelme beszélni, csak szögnagyításról.

Mátrixoptikával úgy lehet leírni, hogy egy fókuszálás, majd szabad terjedés, majd még egy fókuszálás megy végbe, ez három mátrix szorzataként írható fel. Formálisan a fókusztávolság végtelen, ha a két lencse közötti távolság $d = f_1 + f_2$.

Szögnagyítás:
$$|M_{22}| = \frac{f_2}{f_1}$$

Távcső felbontása: $\frac{\lambda}{D}$, ahol D a távcső lencséjének átmérője (csillagászati távcsöveknél 10 m nagyságrendű). A különböző típusú távcsövekről:

- Kepler távcső (csillagászati távcső): két gyűjtőlencse, $d=f_{obj}+f_{ok}$



- Galilei-féle távcső (színházi távcső): az objektívje gyűjtőlencse, az okulárja szórólencse, és $d = f_{obj} f_{ok}$, egyébként ugyanaz, mint az előző.
- Newton-távcső: hasonló elvi elrendezésa fentiekhez, ám ezúttal tükrökkel megvalósítva.



• Cassegrian-távcső: szintén tükrös távcső, az alábbi elrendezéssel.



A tükrös távcsövek előnyei a lencsésekkel szemben, hogy olcsóbban, nagyobb átmérőjű tükrök állíthatóak elő, ezáltal jobb felbontást lehet elérni. Valamint ugyanolyan felbontást kisebb méretű távcsővel lehet elérni.

Optikai jelenségek a természetben, kausztikák

Először ejtsünk néhány szót a kausztikákról. A kausztika jelentése: görbesereg burkolója. Az optikában kausztikák akkor alakulnak ki, ha (közel) párhuzamos fénysugarak esnek egy nem sík felületre. Emiatt alakul ki a szivárvány, a tavakon naplementekor látható fényes sávok, valamint a henger alakú üvegalkalmatosságok alján látható furcsa fényfoltok.



 A szivárvány: feltételezzük, hogy a vízcseppek gömb alakúak (nem teljesen igaz, de a jelenség lényegileg nem változik sokat a gömbtől eltérő cseppalak esetén sem). Ha sok párhuzamos fénynyaláb érkezik rá egy irányból, akkor ezek a csepp határán megtörnek, majd a cseppben haladnak, annak falán (akár többször is) visszaverődnek, ezáltal (mivel a különböző színű (frekvenciájú) fénysugarak egy kicsit eltérően törnek ugyanolyan törésmutatójú közegben is) a különböző színek szétválnak, máshol lépnek ki cseppből néhány visszaverődés után. Ha sok ilyen cseppre esnek ugyanolyan irányból érkező párhuzamos fénysugarak, akkor a cseppekből a fény nagy része ugyanolyan irányban jut ki, ezt látjuk szivárványnak.



 Nagyobb tavaknál, például már a Balatonnál is lehet látni naplementekor a következő jelenséget: ha a vízre nézük, fényes csíkot látunk rajta, mintha a Nap ráfolyt volna a vízre egy sávon. Ennek oka, hogy a víz hullámzik, így a fénysugarak különböző irányba verődnek vissza a felületéről, ahogy azt az alábbi ábra is szemlélteti:



A fényes sávot azért látjuk, mert minden hullámnak van olyan része, ami a szemünk irányába veri vissza a fényt, így a sok különböző helyről szemünkbe jutó napfényt egy összefüggő fényes sávnak látjuk.

- [1] Cserti József (http://complex.elte.hu/~cserti/)
- [2] Feynman: Mai fizika 3., 7-8. old.
- [3] Feynman: Mai fizika 3., 10-12. old.
- [4] Feynman: Mai fizika 3., 16-17. old.
- [5] Optika és relativitáselmélet, 1. előadás, 16. oldal, (http://complex.elte.hu/~cserti/okt/O_SpR-1.pdf)
- [6] Optika és relativitáselmélet, 6. előadás, 2. oldal (http://complex.elte.hu/~cserti/okt/O_SpR-6.pdf)
- [7] Optika és relativitáselmélet, 6. előadás, 2. oldal (http://complex.elte.hu/~cserti/okt/O_SpR-6.pdf)
- [8] Optika és relativitáselmélet, 6. előadás, 4. oldal (http://complex.elte.hu/~cserti/okt/O_SpR-6.pdf)
- [9] Optika és relativitáselmélet, 6. előadás, 5. oldal (http://complex.elte.hu/~cserti/okt/O_SpR-6.pdf)
- [10] Optika és relativitáselmélet, 7. előadás, 5. oldal (http://complex.elte.hu/~cserti/okt/O_SpR-7.pdf)
- [11] Negatív: óramutató járásával megegyező, pozitív: óramutató járásával ellentétes.
- [12] A teljes fejezet az Optika és relativitáselmélet 7. órájának fóliáiból lett összeálltva
- [13] Havancsák Károly: Mérések a klasszikus fizika laboratóriumban, 188. old.

Záróvizsga tematika

 Tételek
 A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktul megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszerkezet | A magfizika alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok | Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

A kvantumelmélet alapvető kísérletei

Hőmérsékleti sugázás és a Planck-törvény

A felmelegített testek sugároznak, mégpedig minnél nagyobb hőmérsékletűek, annál jobban. Az már sejthető volt a XIX. század végén is, hogy a hősugárzás is az elektromágneses sugárzás egy formája, ezáltal rá is a Maxwell-egyenletek érvényesek. Ez alapján próbálta meg Rayleigh és Jeans levezetni a sugázás energiasűrűségének frekvencia szerinti eloszlását. Ehhez egy zárt dobozban elhelyezett test által kisugrázott elektormágneses állóhullámok egyenleteit írták fel, és kihasználták az ekvipartíció tételét is, mint a különböző frekvenciáknak megfelelő oszcillátorokra jutó energiát leíró formulát. Az eredmények azonban nem voltak fényesek. A mérésekkel csak kis frekvencián egyeztek, továbbá a kapott eloszlás a nagy frekvenciák felé divergált, nem volt normálható. Ez az úgynevezett ultraibolya-katasztrófa.

Max Planck-nak volt azaz ötlete, hogy az oszcillátor energia esetleg nem folytonosan vehet fel értéket, hanem csak diszkrét csomagokban, ezáltal hibás az ekvipartíció kihasználása. A Planck által levezetett frekvenciaeloszlás:

$$u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

Ez jól írja le a kísérleti eredményeket, továbbá normálható, és kihozható belőle másik két fontos összefüggés a Stefan-Boltzmann-törvény, amely a teljes kisugárzott teljesítményt írja le:

$$u = \sigma T^4$$
$$\sigma = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^4}$$

Továbbá kihozható belőle a sugárzási görbe maximumának hőmérséklet növekedés hatására bekövetkező eltolódása a nagyobb frekvenciák felé, ez a Wien-törvény:

$$v_{max} = \frac{kT}{h} x_{max}$$

Fotoeffektus

Többek között Lénárd Fülöp is vizsgálta azt a jelenséget, amelyben egyes fémek UV fénnyel történő megvilágításának hatására elektronok lépnek ki a fémből. A következő megállapításokat sikerült tenni:

- A kirepülő elektronok sebessége nem az intenzitástól, hanem a frekvenciától függ.
- A kirepülő elektronok száma az intenzitástól függ.
- Bizonyos küszöb frekvencia alatt semmilyen effektus nem mutatkozik.

A korabeli klasszikus elmélet szeirnt a fémbe behatoló fény energiáját szedi össze az elektorn és ezáltal tud kilépni. Ennek utánaszámolva teljesen használhatatlan eredményeket kapunk. A jelenséget csak úgy sikerült megmagyarázni, ha a fény kvantumokban éri el a fémet, és az által hordozott energiát egyben elnyeli az elektron, és az így nyert energia többlete fedezi a kilépésimunkát és a visszamaradó kinetikus energiát, ha azonban nem tudja fedezni a kilépésimunkát, akkor semi nem történik. A jelenség energiamérlege:

$$h\nu = W + \frac{1}{2}mv^2$$

A jelenséget Einstein magyarázta meg.

Compton-effektus

Nagyfrekvenciájú elektromágneses sugárzások anyaggal való kölcsönhatását vizsgálva Compton arra a megfigyelésre jutott, hogy a sugárzás frekvenciája megváltozik az anyagon való áthaladáskor. A tárgyalt sugárzások energiája olyan nagy, hogy azok a kötési energiát messze felülmúlják, ezért a folyamat szabad elktronon való szóródásként tárgyalható, teljesen klasszikus részecske szemléletben is. Felírva az energia és az impulzusmegmaradást, kiszámolható a hullámhosszváltozás:

$$\Delta \lambda = 2\lambda_0 \sin^2 \frac{\Delta \phi}{2}$$

Ahol $\Delta \phi_a$ foton eltérülésiszöge, $\lambda_0 = \frac{h}{mc}$ a foton Compton-hullámhossza, amely annak a fotonnka a hullámhossza, amelynek energiája megegyezik az elektron nyugalmi energiájával. A fenti formula a kísérletekkel jó egyezést mutat, és ezzel a fény korpuszkuláris természetét támasztja alá.

A Frank-Herz-kísérlet

Ebben a kísérletben gyorsított elektronokat ütköztettek ritka gázzal. Az ütközés térmentes környezetben történt, az elektronokat repülésük végén galvanométerrel mérték, azaz gyakorlatilag a beérkezett elektronok számát határozták meg. A kísérletben a gyorsító tér nagyságának függvényében vették fel a mért áramerősséget. Az eredmények szerint bizonyos helyeken az áramerősség maximumokat, majd erős visszaeséseket mutatott, és ezek a maximumok szabályos közönként követték egymást. A jelenséget így lehetett magayrázni, ha feltesszük, hogy az energiaátadás csak bizonyos energiáknál történik meg az atomok és az elektronok között. Ha nincs energia átadás, az ütközés rugalmas, ha van akkor rugalmatlan. Ebből az a következtetés vonható le, hogy az atomok elektronjai nem lehetnek tetszőleges energiájú állapotokban, azaz nem nyelhetnek el tetszőleges energiát, tehát a megengedett energiaszintjeik diszkrétek.

A Rutherford-kísérlet

Ebben a Rutherford által vezetett kísérletben arany fóliát bombáztak alfarészecskékkel és vizsgálták azok eltérülését kezdeti irányuktól. Egyszer a vizsgálatokat az alfarészek érkezésének irányából is megvizsgálták, és arra a megdöbbentő eredményre jutottak, hogy ugyan ritkán, de előfordul, hogy az alfarészecskék visszapattannak a fóliáról. Ismert volt hogy az atom kívülről elektromosan semleges, ugyanakkor tartalmaz elektronokat, amiből az kövekezik, hogy valamilyen pozitív töltésnek is jelen kell lennie a magban, hogy milyen formában, az még vitatott volt. Rutherford eredményei alapján azt lehettt kiszámolni, hogy ez a pozitív töltés az atom mretéhez képest kis helyen, és nagyon sűrűn koncentrálódik az atomban. Egyszerű Coulomb-téren (sztatikus elektromos téren) való szóródási számolásokból értelmezni lehetett a jelenséget.

Atommodellek

Rutherford kísérlete alapján maga is kidolgozott atommodellt az általa leírt szerkezettel összhangban. A Naprendszer analógiáját hasnzálta, úgy képzelte el, hogy az elektronok a pozitív mag körül keringenek, és gravitációs helyett az elektromos erő tartja őket pályán. Ez a feltevés azonban igen rövidéletű volt, hiszen a klasszikus értelmezésben az elektron körpályán haladva sugároz, aminek következtében energiát veszít, és egy idő után beleesik a magba, továbbá az így kisugárzott spektrum folytonos kéne legyen, a valóságban azonban vonalas spektrumokat figyeltek meg.

Ezen vonalas spektrumok leírására tapasztalati törvényt sikerült felírni:

$$\nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

Ezeket a vonalakat nem sikerült megnyugtatóan megmagyarázni, azonban Niels Bohr-nak sikerült ezeket összhangba hoznia a Rutherford-kísérlet eredményeivel és egy atommodellbe egyesítenie a jelenségeket. Feltette a következő posztulátumokat:

- Az atomban mozgó elektronok csak diszkrét pályákon mozoghatnak, a pályákhoz tartozó impulzusmomentum csak diszkrét értékeket vehet fel.
- Ezeken a pályákon tartózkodó elektronok nem sugároznak, sugárzás csak két fentebb definiált pálya közötti átmenetkor történik.
- Az átmenetkor kisugárzott foton energiája a két pálya energiájának különbsége.

Ezeknek a feltételezéseknek Bohr nem tudott hátteret biztosítani, azonban számos jelenséget meg tudott velük magyarázni annak ellenére, hogy a klasszikus gondolkodástól teljesen idegennek hatottak. A vázolt elmélet azonban a Hidrogén, és az ahhoz hasonló alkálifémek spektrumait igen jól leírta. Értelemzni lehetett vele a Frank-Hertz-kísérlet eredményeit is. Azonban az elméletnek igen jelentős korlátai voltak: gyakorlatilag kvantitatíve csak a hidrogénre adott jó leírást a többi atomra nem, és a spektrumvonalak intenzitása sem jött ki. Továbbá a spektrum finomszerkezetét sem magyarázta meg, és az impulzusmomentum függését a kvantumszámoktól is rosszul adja meg. Ennek ellenére alapvető jelentősége volt a mikrovilág kutatásának fellendülésében.

A de Brogile hipotézis és a Davisson-Germer-kísérlet

Planck foton hipotézise alapján de Brogile arra az elméleti feltevésre jutott, hogy nem csak a fény, de az anyagi alkotók is hullámtulajdonsággal rendelkezhetnek, és a hozzájuk rendelhető hullámhossz:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Ezt az elméleti ötletet támasztotta alá Davisson és Germer kísérlete, amelyen a kistályos anyagok vizsgálatánál jólbevált Bragg-féle diffrakciós képletet tudták igazolni elektronokra is:

$$n\lambda = 2d\sin\theta$$

A feltétel alapján n egész értékeire erősítést kell látni az interferenciaképben. A kísérleteket Nikkel kristályon végezték, amelynek simert volt a *d* rácsállandója, és de Brogile hullámhossz képletét felhasználva ismert energiájú elektronokra valóban jó egyezés mutatkozott. Ez a kísérlet alapvető fontosságú az anyag hullámtermészetének igazolásában.

A Stern-Gerlach-kísérlet

Ismert volt klasszikus elektrodinamikából, hogy a töltött részecskék eltérülnek mágneses térben. Ismert volt az is, hogy a köráramokhoz mágneses momentum rendelhető, így azok is kölcsönhatnak a mágneses térrel. Stern és Gerlach tulajdonképpen a Bohr-elméletet kívánta tesztelni, ugyanis a jóslat értelmében az elektron pályáihoz tartozó impulzusmomentum csak diszkrét értékeket vehet fel, amiből az is következik, hogy ehhez diszkrét mágneses momentum tartozik. A kísérletben ezüst atomokat inhomogén mágneses térben térítettek el. Eredményül azt kapták, hogy az atomok a klasszikus folytonos eltérülés helyett diszkrét sávokba rendeződtek, ami a Bohr-féle kvantáltságot támasztotta alá.

A későbbiekben megvizsgálták a kísérletben, hogy mi történik ha elektronokkal (vagy hidrogén atomokkal) végzik el a kísérletet. Ekkor is kvantáltság jelentkezett az elhajlási képben, ami arra vezetett, hogy a részecskéknek van valamilyen saját mágneses momentumként viselkedő jellemzője is. Ez vezetett a spin fogalmának kialakulásához. A későbbiekben megmutatták, hogy az atommagnak is van kvantált mágneses momentuma, ami a magspinből származik.

Az Einstein-de Haas-kísérlet

Ebben a kísérletben egy felfüggesztett ferromágneses hengert vizsgáltak, amely egy tekercsben helyezkedett el, és torziós forgásra volt képes a felfüggesztés körül. Ha a tekercsre elektormos impulzust adtak, a ferromágnes elfordult. Azonban az impulzusmomentum megmaradásának értelmében valaminek el kellett vinnie az impulzusmomentum ellentétes irányú részét. Az eredményeket csak úgy tudták megmagyarázni, ha feltételezték, hogy az elektronok spinje ugyanolyan természetű, mint a klasszikus impulzusmomentum, és a mágneses hatása is van. A kvantitatív elemzésekből kiderült, hogy egy kettes faktor különbség van a klasszikus köráram értelemzés és a mérési eredmények között. Ez egy újabb érv volt a kvantummechanikai tárgyalás sikeressége mellett.

A Zeeman-effektus

A spektrumvonalakat mágneses térben vizsgálva Zeeman arra a megfigyelésre jutott, hogy azok különböző számú vonalakra hasadnak fel a mágneses tér nélkül látható egyes vonalakból. A jelenséget úgy magyarázták meg, hogy alapesetben a vonalak azonos energiájú elektron konfigurációknak felelnek meg, amelyek ezért nem különböztethetőek meg egymástól. Mágneses térbe helyezve azonban ez a degeneráció (egybeesés) megszűnik, hiszen minden kvantumszámban különbözniük kell az elektronoknak, és a vonalak felhasadnak (általában páratlan számú alvonalra).

Ha a párosítatlan spinű elektronok átmeneteit vizsgálták, akkor azonban még az előző módszerrel sem lehetett értelemezni a jelenséget, hiszen a kísérletek idején még nem volt ismert a spin, ezért ez utóbbi, páros felhasadásokkal járó effektust anomális-Zeeman effektusnak neveztél el.

Az elektron adatainak mérése

Az elektron fajlagos töltésének mérése: a Thomson-kísérlet

Tegyük fel, hogy a **Vo**kezdősebességű, adott fajlagos töltésű részecske a **Vo**sebességre merőleges **B** indukcióvektorral jellemzett mágneses térben mozog és az eltérülés kicsi. Ekkor a gyorsulás közelítőleg állandó, merőleges a sebességre, és nagysága: $\mathbf{a} = \frac{q\mathbf{v_0}\mathbf{B}}{m}$. Ha mágneses tér helyett annak irányára és a részecske sebességének irányára merőlegesen homogén, kellően kicsi elektromos teret kapcsolunk be, akkor a részecske ugyanolyan irányban térül el közel állandó, $\mathbf{a} = \frac{q\mathbf{E}}{m}$ gyorsulással. Ha ezt a két teret egyszerre alkalmazzuk megfelelő erősséggel, akkor elérhető, hogy a részecske ne térüljön el.



Thomson 1897-ben a következő módon határozta meg az elektron fajlagos töltését:
Megmérte egy adott sebességű elektronnyaláb eltérülését a sebességre merőleges elektromos térben:

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m}\right) \mathbf{E} \frac{d^2}{\mathbf{v_0}^2}$$

(mivel körülbelül d/v_0 ideig állandó gyorsulással repül az elektron), majd a v_0 -ra és **E**-re merőleges **B**indukciójú térrel visszaállította a nyalábot eredeti helyzetébe. Ekkor a két tér sebességszűrőként működik, csak a: $v_0 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}}$ sebességű részecskék haladnak tovább egyenesen. Ezt felhasználva a sebesség bejövő elektronok sebessége kiküszöbölhető az eltérülési képletből:

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m}\right) \mathbf{E} \frac{d^2 \mathbf{B}^2}{\mathbf{E}^2}.$$

Ebből kifejezhető a fajlagos töltés:

$$\frac{q}{m} = \frac{2y\mathbf{E}}{d^2\mathbf{B}^2}.$$

Az elektron töltésének és tömegének mérése: A Millikan-kísérlet



Cél: az elektromos tér változtatásával és a nehézségi erő kimérésével meghatározni az elektron töltését. Millikan ehhez két fémlemez közé juttatott olajcseppeket (az olajcseppek porlasztáskor töltéshez jutnak). A lemezek közötti feszültség változtatásával a töltött cseppek töltését a következőképpen mérte meg:

A folyamat kezdetén – mivel ekkor még nem aktiváljuk az elektromos mezőt – az olajcseppek szabadon esnek a lemezek között. A cseppek rövid idő alatt elérik a végsebességüket a kamrában lévő levegőrészecskékkel való ütközés következtében létrejövő súrlódás miatt. Ekkor aktiváljuk az elektromos mezőt, és ha az megfelelően nagy, néhány részecske (a töltéssel rendelkezők) emelkedni kezdenek (mivel a rájuk ható F_E elektromos mező által az olajcseppre kifejtett, "felfelé" ható erő nagyobb lesz, mint a "lefelé" ható G nehézségi erő). Egy megfelelőnek tűnő olajcsepp kiválasztása és a mikroszkóp látómezejének közepére mozgatása után a feszültség kikapcsolgatásával elérjük, hogy a kiválasztott cseppen kívül minden más csepp leessen. A kísérlet további részében tehát már csak ezzel az egy cseppel dolgozunk.

A kiválasztott cseppet hagyjuk, hogy szabadon essen. Kis tömegéből kifolyólag gyorsan eléri a végsebességét, amikor már nem hat rá elektromos erő, vagyis a gravitációs erő kiegyenlítődik a közegellenállással, ami meghatározható a Stokes-törvényből:

$$F_K = 6\pi r \eta v_1$$

ahol v_1 a csepp végsebessége, η a levegő viszkozitása, r pedig a csepp sugara. A súlyát a következő képletből számoljuk (beleszámítva a felhajtőerőt):

$$F_G = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_{\text{levego}})$$

Ezt a két erőt kiegyenlítve a csepp sugarára a következőt kapjuk:

$$r^2 = \frac{9\eta v_1}{2g(\rho - \rho_{\rm levego})}$$

Most bekapcsoljuk az elektromos teret, és olyan erősre állítjuk, hogy a csepp egy új v_2 sebességgel emelkedjen. A rá ható erők: gravitáció, a Stokes-erő és az elektromos erő:

$$F_E = qE = q\frac{V}{d}$$

ahol a V a feszültség, a d pedig a két lemez közötti távolság. A három erő kiegyenlíti egymást:

$$F_E = F_G + F_K$$

ha behelyettesítjük az előző mérés ereményét, akkor megkapjuk a csepp töltését:

$$q = \frac{6\pi r\eta}{E} (v_1 + v_2)$$

Millikan azt tapsztalta, hogy a kapott q értékek egy bizonyos érték többszörösei, ez pedig az elektron töltése: $q = 1.602 \cdot 10^{-19} C$

Záróvizsga tematika

 Tételek
 A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktul megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszerkezet | A magfizika alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok | Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

A kvantummechanika elméleti háttere

A XIX. és XX. század fordulóján felhalmozódott kísérleti tapasztalatok abba az irányba mutattak, hogy az atomi szinteken mérhető fizikai mennyiségek a klasszikus szemlélettel szemben diszkrét értékeket vesznek fel folytonos helyett. Ez szükségessé tette olyan matematikai formalizmus bevezetését, amelytől nem idegen a diszkrét értékek megjelenése. Heisenberg, Dirac és Schrödinger voltak a formalizmus kialakulásának legnagyobb úttörői.

A kvantummechanika matematikai alapjai

A kvantummechanikában a fizikai mennyiségekhez operátorokat rendelünk. Az általunk mérhető értékeket a fizikai mennyiség operátorának sajátértékeivel azonosítjuk. Mivel az általunk mért értékek valósak, ez azonnal megkötést ad az operátorokra: azoknak önadjungáltaknak kell lenniük:

 $A = A^{\dagger}$

Az adjungált operátorra definíció szerint:

$$\langle \mathbf{A}^{\dagger} u | v \rangle = \langle u | \mathbf{A} v \rangle$$
[1]

a Hilbert-tér bármely u,v elemeire. Ez mátrixreprezentációban a transzponált komplex konjugáltját jelenti.

A klasszikus mechanikában a kanonikus formalizmus igen koherens és logikus tárgyalásmódot jelentett, ezért ezt tovább visszük axióma szerűen a kvantummechanikában, és megköveteljük a klasszikusan fennálló kanonikus relációk teljesülését. Klasszikusan az anyagi rendszer helykoordinátákkla jellemezzük, az impulzust a a helykoordinátákhoz konjugált mennyiségként vezetjük be:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}}$$

Axiomatikusan megköveteljük, hogy a hely és az impulzus operátora teljesítse a következő, Heisenberg-féle felcserélési relációkat:

$$[p_k, q_l] = \frac{\hbar}{i} \mathbf{I} \delta_{kl}$$
$$[p_k, p_l] = 0$$
$$[q_k, q_l] = 0$$

Itt a [a, b] = ab - ba, kommutátor, δ_{kl} pedig a Kronecker-delta.

Analógia a Poisson-zárójelek és a kommutátorok között (*)

A klasszikus mechanikából ismert Poisson-zárójelek szerepe nagyon hasonlít a kvantummechanikai kommutátorokéhoz, hiszen ha visszaemlékszünk:

$$\{p_i, p_j\} = 0 \\ \{q_i, q_j\} = 0 \\ \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$$

A Poisson-zárjelekkel felírva egy mennyiség időfejlődését a kötekezőt kapjuk:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \{u, H\}$$

ahol a Poisson-zárójel definíciója:

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial q} \frac{\partial b}{\partial p} - \frac{\partial a}{\partial p} \frac{\partial b}{\partial q}$$

ahol a és b az általánosított kooridnáták és impulzusok függvénye.

Ez kísértetiesen hasonlít a kvantummechanikai Heisenberg-képben az operátorok időfejlődését leíró egyenletre (lásd lejjebb).

Kvantummechanikai reprezentációk

A fenti megkötéseket többféle reprezentációban ki lehet elégíteni, Schrödinger hullámmechanikát épített rá, Heisenberg hermitikus mátrixokkal dolgozott. Elvileg integráloperátorokat is használhatnánk, de azokkal bonyolult számolni. Tradícionálisan a differenciál-egyenletek megoldási apparátusa volt készen, ezért ezzel dolgoztak nagyon sokáig. Később megmutatták, hogy a különböző tárgyalásmódok ekvivalensek. A továbbiakban a Schrödinger-féle reprezentációban dolgozunk. Schrödinger a következő operátorokat vezette be:

$$\hat{q} = q$$

 $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}$

Ennek akkor van értelme, ha az operátorok valamilyen folytonos függvényre hatnak. Ezért ebben a reprezentációban a rendszert a koordinátáktól függő hullámfüggvényrel adjuk meg. Belátható, hogy a bevezetett felcserélési relációkat teljesítik a bevezetett operátorok. A bevezetett hullámfüggvényre további megkötéseink vannak, ha **A** valamilyen fizikai mennyiség operátora, akkor fennáll a következő sajátérték-egyenlet:

 $\mathbf{A}\psi = \lambda\psi$

Ennek csak azon ψ megoldásait fogadjuk el, amelyek egyértékűek, folytonosak, és négyzetesen integrálhatóak, ezeket a függvényeket nevezhetjük reguláris függvényeknek. A továbbiakban a reguláris megoldásokra, mint sajátfüggvényre, az ezekhez tartozó λ paraméterekre, mint sajátértékekre hivatkozunk.

A hullámfüggvény valószínűségi értelmezése

A rendszer állapotára bevezettük a hullámfüggvényt: $\psi(q,t)$. Ennek abszolút érték négyzete meghatározza a koordinátaértékek valószínűségének eloszlását, másképpen $|\psi(q,t)|^2 dq$ meghatározza, hogy a dq elemben mekkora a valószínűsége a q koordinátaértékek előfordulásának. Speciálisan pontrendszerek esetén visszakapjuk a klasszikus koordinátavektorokkla való jellemzést: $q = (r_1, ..., r_N) = \vec{r}$. Ez az értelmezés, hozzávéve azt a tapasztalatot, hogy egy részecskét az ideális detektor valahol mindig megtalál, adja a normálási feltételt, vagyis hogy a hullámfüggvény teljes térre vett integrálja 1.

Koppenhágai axiómák

A fentiek szerint a hullámfüggvény valószínűséget ír le, és a fizikai operátorok rajta sajátértéket vesznek fel méréskor. Ezen fogalmak összekapcsolásának értelmezésére a következőket vezetjük be:

- Ha adott fizikai mennyiséget akarunk megmérni, az eredmény csak annak valamely sajátértéke lehet.
- Ha többszöri mérést végzünk, és a rendszer a fizikai operátor sajátállapotában van, akkor a sajátállapothoz tartozó sajátértéket mérjük, ha nincs sajátállapotban, akkor a hullámfüggvényt ki kell fejteni a sajátértékek bázisán, és a kifejtési együtthatók négyzetei adják az adott sajátértékek mérésének valószínűségeit:

$$|\psi\rangle = \sum_{n} \alpha_{n} |\phi_{n}\rangle$$

 $P(A = a_{n}) = |\alpha_{n}|^{2}$

A kvantummechanika mértékinvarianciája

A $\psi(q)$ és $\psi(q) e^{i\chi}$ hullámfüggvényt fizikai szempontból egyenértékűnek tekintjük mivel abszolút értékük megegyezik, χ egy tetszőleges függvény. Ezen transzformációk az U(1) csoportot alkotják.

A Schrödinger-egyenlet

(*A levezetés csak a kitekintés kedvéért szerepel itt)

Az axiomatikus felépítésben érdemes megjegyezni, hogy igen kevés alapfeltevésből eljuthatunk a kvantummechanika talán legalapvetőbb egyenletéhez, a Schrödinger-egyenlethez. Az előzőekben bevezettük a hullámfüggvényt. Erre a sajátérték egyenlet alapján kiróttuk a regularitást, amely alapján a függvény négyzetesen integrálható. Teljesen jogosan várhatjuk el, hogy ez minden időpillanatban teljesüljön a hullámfüggvényre, azaz **az időfejlődés megtartja a normát**. Vezessünk be egy kezdetben tetszőleges G(t) időfejlesztő operátort. Ez az operátor a hullámfüggvényt *t* idővel későbbi állapotába viszi át. Követeljük meg, hogy ez a transzformáció független legyen attól, hogy ez az eltolás milyen kezdőponthoz képest törénik, azaz legyen **időeltolási szimmetria**. Ez teljesen analóg a klasszikus mechanikánál tapasztaltakkal. Végül követeljük meg, hogyha két egymás utáni transzformációt (időfejlesztést, pl t_{1} és t_{2}) végzünk, az ekvivalens legyen egyetlen, az időkülönbségek összegével jellemzett időfejlesztésel ($t_3 = t_1 + t_2$). Másszóval **az időfejlődés egyparaméteres csoportot alkot**. A fentiekből némi algebrai átalakításokkal, és a normafeltétel kihasználásával belátható, hogy a **G** operátor unitér, azaz az adjungáltja az inverzével egyenlő. További algebrai átalakításokkal, és az egyparaméteres csoportok azon tulajdonságát kihasználva, hogy felírhatóak egy másik exponencializált operátor segítésével kapjuk a következő összefüggést:

$$G(t) = e^{-t\mathbf{Z}}$$

G unitérségéből belátható, hogy Z anti-hermitikus, azaz sajátértékei tisztán képzetesek. Vezessük be ennek az operátornak az i-szeresét, ez már hermitikus lesz, és a sajátértékei valósak lesznek:

$$\mathbf{S} = i \cdot \mathbf{Z}$$

Mivel t dimenziója s, ezért **S** dimenziójának 1/s-nek kell lennie. Önkényesen bevezethetünk egy másik hermitikus operátort, amelynek a dimenziója Joule:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\hbar} \mathbf{H}$$

Ekkor G alakja:

$$G(t) = e^{-t\frac{i}{\hbar}\mathbf{F}}$$

Egy tetszőleges ψ_0 kezdőfeltételből indítva:

$$\psi(t) = e^{-t\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}}\psi(0)$$

Deriváljuk ezt le idő szerint, és szorozzuk be $i\hbar$ -al:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t) = \mathbf{H}\psi(t)$$

Ez az egyenlet a Schrödinger-egyenlet. Itt azonban még nem derült ki, hogy **H** micsoda. Belátható, hogy ez a Hamilton-operátora lesz a vizsgált rendszernek. Az így nyert egyenlet lineáris, azaz a hullámfüggvényre érvényes a szuperpozíció elve: ha ψ_1 és ψ_2 a rendszer lehetséges állapotai akkor $\psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2$ is az. Továbbá feltsszük, hogy ψ és $a \cdot \psi_{ugyanazt}$ az állapotot írja le (*a* valós). Ezek közül a normálással tudunk kiválasztani egyet.

Heisenberg-kép

Az előző levezetésben természetesen adódott, hogy a hullámfüggvény időfüggő, és ezért nem volt szükség arra, hogy az operátorokról feltegyük, hogy időfüggőek. Ezt a tárgyalásmódot, hogy az időfüggés a hullámfüggvényben van Schrödinger-képnek nevezzük. Vizsgáljuk meg egy **A** operátor időátlagát:

$$\overline{A}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(t) A \psi(t) dt = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle$$

Itt bevezettük a bra-ket jelölés rendszert. Írjuk be az időfüggő hullámfüggvényeket mint a kezdőállapot és az arra ható időfejlesztő unitér operátort **G** szorzatát:

$$\overline{A}(t) = \langle \psi(0) | \mathbf{G}^+(t) \mathbf{A} \mathbf{G}(t) | \psi(0) \rangle$$

A belső operátor szorzatot elnevezhetjük egy új időfüggő operátornak. Ezt az időfüggő operátort tekinthetjük A Heisenberg-képbeli reprezentációjának. Az operátorok időfüggését leíró egyenlet:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,A] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Határozatlansági-elv

Ha adott egy operátor, amelyet hattatva a rendszer hullámfüggvényére az sajátértéket vesz fel, akkor azt mondjuk, hogy az az operátor sajátállapota, ekkor az értéke határozott, a sajátértéket veszi fel. Ha ez nem teljesül, azaz a hullámfüggvényen nem vesz fel az operátor sajátértéket, ekkor az értéke határozatlan. Ha két operátor kommutál, akkor létezik olyan hullámfüggvény, amelyen mindkettő sajátértéket vesz fel. Azok az operátorok, amelyek egymással nem kommutálnak egy igen alapvető összefüggésnek tesznek eleget. Definiáljuk a közepes eltérést:

$$\Delta O = \sqrt{(\mathbf{O} - \overline{O})^2}$$

Ekkor két hermitikus operátorra fennáll, hogy:

$$\Delta O_1 \Delta O_2 \ge \frac{1}{2} |\overline{[\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2]}|$$

Szavakban megfogalmazva: két felnemcserélhető operátor értékét nem lehet egyszerre tetszőleges pontossággal megmérni. Mérésnek tekintünk minden folyamatot, ahol klasszikus és kvantumos objektumnak történik kölcsönhatása. A mérésnek elvi korlátja van. Ezt az összefüggést nevezzük Heisenberg-féle határozatlansági relációnak. A leghíresebb a hely és impulzusra vonatkozó reláció:

$$\Delta x \Delta p_x \ge \frac{\hbar}{2}$$

Az energia-idő határozatlansági reláció

Az energia és idő közti határozatlansági reláció az előző sémába nem illik bele, mert az időnek nincs operátora. A kvantummechanika korai alapítóinak is világos volt, hogy egy

$$\Delta E \Delta t \ge \frac{\hbar}{2}$$

alakú reláció fennáll, de nem volt rögtön világos, hogy mi Δt . A gyakorlatban ez a reláció pl. azt jelenti, hogy egy rövid életidejű állapot energiája csak nagyon gyengén határozott. Az állapot élettartama azonban nem egy, az állapothoz rendelhető operátor. Egy valamivel precízebb megfogalmazás a következő. Egy Ψ állapotban egy B mennyiségre fennáll a következő reláció:

$$\Delta_{\Psi} E \frac{\Delta_{\Psi} B}{\left|\frac{d\langle B \rangle}{dt}\right|} \ge \frac{\hbar}{2}$$

Hullámcsomag

A részecskék hullámtermészete a de Broglie hipotézis óta benne volt a levegőben(lásd A kvantumelmélet alapvető kísérletei). A Schrödinger-egyenletnek vannak síkhullám megoldásai, de ezek nyilván nem azonosíthatóak egy részecskével, mert egyáltalán nem lokalizáltak. A síkhullám-megoldásokból azonban **hullámcsomag** alkotható, matematikailag egy Fourier-integrál formájában. Az egyszerűség kedvéért egy dimenzióban:

$$\Psi(x,t) = \int c(k) e^{i(kx - \omega(x)t)} dk$$

Ezen integrál értéke azokon a pontokon lesz nagy, ahol az exponenciális tag nem túl erősen oszcillál, hiszen ha túl erős az oszcilláció, az integrál kiegyenlítődik és nullát kap. Tehát ott lesz nagy az integrál, ahol $kx - \omega t$ közel konstans, vagyis:

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(kx-\omega(k)t\right)=x-\frac{\partial\omega}{\partial k}t=0$$

Ez hasonlít a tömegpont x=vt képletére, így a klasszikus sebesség hullámmechanikai megfelelője a csoportsebesség:

$$\vec{v}_{csop} = grad_{\vec{k}}\left(\omega\right)$$

Az impulzusmomentum operátor

Klasszikusan az impulzusmomentum a kövektező összefüggéssel van definiálva:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Ezt visszük át az operátoros reprezentációba, a hely és impulzus operátorokat beírva. Egyszerű behelyettesítésekkel igazolhatóak az alábbi képletek (amelyek nem csak a *z* komponensre állnak fennt, a többire csak permutálni kell az indexeket):

$$\begin{split} \mathbf{L}_{z} &= \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ [\mathbf{L}_{x}, \mathbf{L}_{y}] &= i\hbar\mathbf{L}_{z} \\ \mathbf{L}^{2} &= \mathbf{L}_{x}^{2} + \mathbf{L}_{y}^{2} + \mathbf{L}_{z}^{2} \end{split}$$

L felcserélhető bármelyik komponensével. Ebből következik, hogy van közös sajátfüggvényük. Polárkoordinátás áttérés után a sajátérték probléma megoldható, eredményül megkapjuk a sajátfüggvényeket és a sajátértékeket. A *z* komponensre:

 $\lambda = m\hbar$

$$\psi_m = A e^{im\phi}$$

Az impulzusmomentum négyzetére:

$$\begin{split} \lambda &= \hbar^2 l(l+1) \\ \psi_{l,m} &= \sin^{|m|} \theta P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \end{split}$$

Itt *P* a módosított Legendre-polinomot jelöli, maga a sajátfüggvény az úgynevezett gömbfüggény, amely a két térbeli szög, és két másik egészszám függvénye. Ez utóbbiak felelnek meg mágneses- és mellékkvantumszámnak a hidrogénatom esetében.

A Schrödinger-egyenlet szeparálása

Amikor a Schrödinger-egyenletet centrális potenciálban oldjuk meg, a potenciál cska a sugár abszolutértékétől függ. Polárkoordinátás tárgyalásban érezhető, hogy a sugárfüggő rész leválasztható a szögfüggő résztől. Ez valóban így van, a hullámfüggvénynek van szorzatalakú megoldása, amelyben a sugárfüggés leválasztódik. A Schrödinger-egyenletbe visszaírva az két egyenletre esik szét. A szögfüggés az impulzusmomentumnál bevezetett sajátfüggvényeket (gömbfüggvények) és sajátértékeket adja, ez tehát minden centrális erőteres problémára ugyanaz. Egy speciális potenciálra, a hidrogénatomra, az integrálható problémáknál kidolgozzuk a megoldást.

A spin és a Pauli-egyenlet

A kísérleti bevezetőben említésre került Stern-Gerlach-féle kísérlet, amely tulajdonképpen a benne áthaladó részecskék impulzusmomentumát méri. A kísérletek csak úgy értelmezhetőek ellentmondásmentesen, ha feltételezzük, hogy a részecskéknek van saját impulzusmomentumuk is. Ezt **spin**nek nevezzük, és az **S** operátort rendeljük hozzá.

Az eddigi tárgyalásokban nem voltunk tekintettel erre a mennyiségre. Tudjuk, hogy van a részecskéknek impulzusmomentuma (L), ezt megkülönböztetésül pályamomentumnak nevezzük mostantól. A két momentum összegére bevezetjük a teljes mpulzusmomentumot: J = L + S. A pályamomentumnak ismertek a sajátértékei, a spinről pedig a kísérletek alapján belátható, hogy két féle értéke lehet: $+\frac{\hbar}{2}$ és $-\frac{\hbar}{2}$.

A mágneses hatás leírásához a pályanyomatéknál elég volt a klasszikus analógia:

$$\mathbf{M} = -\frac{e}{2mc}\mathbf{L}$$

A spinhez tartozó mágneses momentumot a kísérletek alapján:

$$\mathbf{M}_S = -\frac{e}{mc}\mathbf{S}$$

definiálja. Ezt a Schrödinger-egyenlet nem tartalmazza, azonban a pontos leíráshoz szükséges ennek figyelembevétele. Mivel a spin kétféle értéket vehet fel, és érvényes a szuperpozíció elve, ezért bevezetünk két rész-hullámfüggvényt amelyek lineárkombinációja adja a teljes hullámfüggvényt, az együtthatók pedig a spinsajátfüggvények (pl.: (1, 0) és (0, 1) ha vektorkénnt reprezentáljuk őket). A mágnesestérrel való kölcsönhatást klasszikus analógia alapján adjuk hozzá a Schrödinger-egyenlethez. Ismert klasszikus mechanikából a ponttöltés mozgásegyenlete (H a mágneses tér):

$$m\dot{v} = -e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right)$$

Belátható, hogy ezt a mozgásegyenletet előállító Hamilton-függvény (ez most másik H):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - e \Phi(r)$$

Ezt operátorrá alakítva betesszük a Schrödinger-egyenletbe, és a hullámfüggvényként a spint is figyelembe vevő hullámfüggvényt tekintjük:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t) = \left[\frac{1}{2m}\left(\sigma\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right)^2 - e\Phi(r)\right]\psi(t)$$

Az így kapott egyenlet a Pauli-egyenlet. Felbukkantak a Pauli-mátrixok (σ , pontosabban a képletben a 3 mátrixból képzett vektor áll, és a mellette zárójelben szereplő mennyiséggel skalárisan kell szorozni, hiszen az is egy vektor). Ezek a spinnek az algebrájában szerepet játszó 2x2-es mátrixok, velük írhatóak fel a spinoperátorok is:

$$\mathbf{S}_{x} = \frac{\hbar}{2}\sigma_{x}$$
$$\mathbf{S}_{y} = \frac{\hbar}{2}\sigma_{y}$$
$$\mathbf{S}_{z} = \frac{\hbar}{2}\sigma_{z}$$

A mátrixok explicit alakjait lásd itt^[2].

Korrespondencia-elv, Ehrenfest-tétel

Az eddigiekből látható, hogy a kvantummechanika működése és felépítése nagyban különbözik a klasszikus leírástól, a klasszikus törvények nem alkalmazhatóak változatlanul a mikrovilág leírására. Azonban a kvantumelméletet, mint mélyebb elméletet tekintve felmerül a kérdés, hogy nem tartalmazza-e valamilyen módon a klasszikus törvényeket. A válasz az, hogy igen, a klasszikus rendszerek felfoghatóak sok kvantumszámú összetett rendszerekként, ezért a kvantumosan megfogalmazott törvényeknek nagy kvantumszámokra történő (illetve a Planck-állandóval zérushoz tartó) határátmeneteit kell ekkor vizsgálnunk, és az állítás az, hogy ekkor visszkapjuk a megfelelő klasszikus törvényeket. Ezt az állítást korrespondencia-elvnek (megfeleltetési-elv) nevezzük, és megfogalmazása Niels Bohr nevéhez kötődik.

A korrespondencia-elv egyik ékes bizonyítéka az Ehrenfest-tétel. Tekintsük egy fizikai mennyiség operátorának várható értékét:

$$\overline{O} = \langle \psi | \mathbf{O} | \psi \rangle$$

Számoljuk ki ennek időbeli változását a Schrődinger-egyenlet alapján. Ekkor levezethető, hogy abban az esetben, amikor az operátor nem függ az időtől (minden időfügés a hullámfüggvény változása miatt történik), akkor a követekző formula érvényes:

$$\frac{d\overline{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle \psi | [\mathbf{H}, \mathbf{O}] | \psi \rangle$$

Ha O helyére a hely vagy az impulzus operátorát írjuk, a következő ismerős összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{split} \frac{d\overline{x}}{dt} &= \langle \psi | \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_x} | \psi \rangle \\ \frac{d\overline{p}_x}{dt} &= - \langle \psi | \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} | \psi \rangle \end{split}$$

Ezek a klasszikus mechanikából ismert kanonikus egyenletek.

Ha egy pontrészecske mozgását leíró Hamilton-operátort tekintjük, amely potenciált is tartalmaz:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}_x^2 + \mathbf{p}_y^2 + \mathbf{p}_z^2 \right) + V(x, y, z)$$

Akkor a helykoordinátákra a következő kifejezés adódik:

$$m\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}=-\frac{\overline{\partial V}}{\partial x}$$

A baloldalon a gyorsulás, a jobboldalon a ható erő ismerhető fel, azaz visszakaptuk a Newton-törvényt. Amennyiben a potenciál lassan változik, sorfejtést alkalmazhatunk Δx szerint, és akkor a következő eredményt kapjuk:

$$m\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \overline{x}}$$

azaz lassan változó potenciál esetén elég a koordináta értékeket átlagolni. Tulajdonképpen ez felel meg a klasszikus törvényeknek: amikor a távolságok kicsik a változó potenciálváltozáshoz képest, akkor beszélhetünk klasszikus részecskéről, mert nem követünk el nagy hibát (a sorfejtésben csak a vezető tag nagy), azonban atomi mércén már számos tag jelentős a sorfejtésben, ekkor a klasszikus számolási menet használhatatlan. Az Ehrenfest-tétel tehát az operátor várható értékén keresztül kapscsolatot teremt a klasszikus mechanika és a kvantummechanika között, egyben behatárolva az előbbi érvényességi körét.

EPR-paradoxon, Bell-egyenlőtlenség

A kvantummechanika furcsaságainak és klasszikus gondolkodással szembenálló működésének egyik leglátványosabb példája az Einstein-Podolsky-Rosen által felvetett gondolat kísérlet és annak interpretációja. A gondolatkísérlet egy összefonódott, eltávolodó kvantummechanikai rendszerre vonatkozik (például bomlásban keletkező két ellentétes spinű részecske, vagy két ellentétes polarizációval szétrepülő foton). A felvetés arra összpontosul, hogy mitörténik amikor megakarjuk mérni a valamely fizikai jelelmzőt, amelyre a teljes rendszerben megmaradási törvény érvényes (azaz, ha tudnánk az egyik "rész" értékét, például spinjét, abból meghatározható lenne a másiké).

A mérési problematikát Einsteinék a következő két lehetőségben foglalták össze:

- Vagy az egyik rendszeren végzett mérésnek hatása van a másik B rendszerre, és ezáltal egyetlen méréssel meghatározható mindkét rész állapota
- Vagy van valami olyan rejtett tulajdonság, amelyet a kvantummechanika nem vesz figyelembe, ezért nem teljes a leírásunk a jelenségről, és ez határozza meg, hogy mit is fogunk mérni.

Az első lehetőség a relativitás elmélettel, és a kauzalitással lenne ellentmondásban, a második rejtett paraméterek bevezetését tenné szükségessé, amelyek a kvantummechanikánál mélyebb elméletre utaló jelek lennének.

Az első nyilván tarthatatlan, a kauzalitást eddig minden tapasztalatunk igazolta, ezért a második állítást kezdték el részletesen vizsgálni. Amennyiben létezik rejtettparaméteres elmélet, akkor annak is kell jóslatokat adnia egyes mérehető mennyiségekre, ugyanígy a kvantummechanika is ad jóslatokat. Levezethető, hogy például két kimenetű kísérletekben két mérhető mennyiség korrelációjára általános limit adható (a háromszög egyenlőtlenség felhasználásával), ez a limit vezet a Bell-egyenlőtlenséghez. Ugyanakkor a kvantummechanikából is levethető a két mennyiség korrelációja. Az eredmények vizsgálatával azt látjuk, hogy egyes esetekben a kvantummechanika sérti a rejtettparamáteres moellre fennálló limiteket, azaz az előbbi nem lehet konzisztens alap a kvantumelmélet leírásához!

A gyakorlatban a Bell által levezetett egyenlőség kevésbé használható (nehezebb ilyen kísérletet készíteni), heleytte az általánosabb (általánosabb rejtett paraméteres modelleket magábanfoglaló) CHSH ^[3] egyenlőtlenség használatosatos.

A kísérletek elvégzésével megmérhetők a korrelációk a valóságban is. Az eredmény: a kvantummechanikai leírás minden esetben helyes jóslatot ad.

Ezek alapján nem konstruálható rejtettparaméteres modell, és elvetettük a távolhatás lehetőségét is. Ezek után felmerül a kérdés, hogy mi a helyzet az EPR paradoxonnal? A válasz az, hogy rossz a kérdésfelvetés. A paradoxon oka, hogy a **kvantummechanikai rendszernek NINCS részrendszere**! Nem beszélhetünk a részrendszernek állapotáról, mennyiségeiről, a részrendszerek össze vannak fonódva, csak együtt tárgyalhatók.

A történet tovább bonyolítható, problémák jelentkeznek abban, hogy a kvantummechanikai valószínűség fogalom kissé eltér a Kolmogorovi klasszikus valószínűség fogalomtól. Ha hozzávesszük azt is, hogy a kvantummechanikai valószínűségek nem tekinthetők önálló eseményekként, hanem valamilyen korábbi kiváltó okokkal állnak kapcsolatban feltételes valószínűségeken keresztül, akkor létesíthető olyan rejtett paraméteres modell, amelyet nem sértenek a kísérletek, és a kvantummechanikai jóslatok, ez a gondolatmenet azonban teljes determinizmushoz vezet.

Záróvizsga tematika

 Tételek
 A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktul megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszerkezet | A magfizika alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok | Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

Hivatkozások

- [1] http://hu.wikipedia.org/wiki/Braket-jelölés
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Pauli_matrices
- [3] http://en.wikipedia.org/wiki/CHSH_inequality

Atom- és molekulaszerkezet

Perturbációszámítás^[1]

A kvantummechanikában előbukkanó problémák általánosságban nem oldhatóak meg egzaktul. Gyakran azonban azt akarjuk meghatározni, hogy egy ismert sajátfüggvényekkel rendelkező rendszert hogy befolyásol egy vele bizonyos értelemben gyengén kölcsönható külső rendszer. Ekkor a vizsgált rendszer Hamilton-operátora csak kicsit különbözik az egzaktul megoldható probléma Hamilton-operátorától:

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_{0}+\mathbf{K},$$

ahol H_{0az} egzaktul megoldható probléma Hamilton-operátora, és **K** kicsi H_{0} -hoz képest (egy operátor akkor tekinthető kicsinek, ha sajátértékei jóval kisebbek a másikénál).

Azt várjuk, hogy perturbált probléma megoldása csak kicsit fog különbözni az eredeti probléma egzakt megoldásaitól. Az ilyen alakú problémák ezen megoldási módszerét perturbációszámításnak nevezzük.

Időfüggetlen, nem-degenerált eset

Ebben az esetben azokat a problémákat vizsgáljuk, amikor **K** időfüggetlen és a perturbálatlan probléma Hamilton-operátora nem elfajult, azaz minden sajátértékhez egyetlen sajátfüggvény tartozik. Feltesszük, hogy a perturbálatlan esethez ismerjük a megoldásokat, és a fentiek ismeretében keressük a perturbált megoldásokat:

$$\mathbf{H}_0 \psi_k = E_k^{(0)} \psi_k$$

Rayleigh-től eredő trükk a perturbáló operátor kicsinységének figyelembevételére az, hogy egy kis λ paraméter szerint fejtünk sorba, amely majd később kapja vissza a $\lambda = 1$ értéket:

$$\mathbf{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{K}$$

Ezt a trükköt azért alkalmazzuk, mert az operátor kicsiségét nehéz definiálni. Ezzel a trükkel lényegében azt mondjuk, hogy **K** legyen egy tetszőleges operátor, melyet megszorzunk egy λ dimenziótlan paraméterrel, melynek értékével nullába tartunk. Ebben az esetben az operátor határesetben garantáltan kicsivé válik, és sorfejtést is tudunk végezni a dimenziótlan λ paraméter szerint. A megoldás végén λ -t egységnyinek tekintjük, hiszen a perturbáló operátor kicsisége magában a perturbáló operátorban kell megjelennie, nincs szükség dimenziótlan paraméterrel való szorzásra, az csak a probléma kezelését könnyíti meg (pl. a sorfejtésnél).

A Schrödinger-egyenletet egy tetszőleges ortogonális bázis segítségével átírhatjuk mátrixos alakba. A probléma összes sajátállapotát természetesen csak akkor kapjuk meg, ha a felhasznált bázis teljes. A bázisnak a perturbálatlan Hamilton-operátor ortogonális sajátfüggvényeit fogjuk használni:

$$\mathbf{H}_0 \psi_n = E_n \psi_n$$

A hullámfüggvényt a bázisfüggvények lineárkombinációjaként keressük $\psi = \sum_{n} c_n \psi_n$, és ezt helyettesítjük be a Schrödinger egyenletbe. Formálisan tehát:

$$\sum_{n} \mathbf{H} \psi_n c_n = E \sum_{n} c_n \psi_n.$$

Skalárisan beszorozva mindkét oldalt ψ_m -mel, és felhasználva, hogy $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{mn}$ a következőhöz jutunk:

$$\sum_{n} H_{mn} c_n = \langle \psi_m | H | \psi_n \rangle c_n = E c_m$$

Ez a Schrödinger-egyenlet mátrixalakja. Ezt kívánjuk most megoldani a perturbációszámítás segítségével.

A megoldandó sajátérték-egyenlet tehát $\mathbf{H}_{mn}c_n = Ec_m$, ahol $\mathbf{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{K} \mathbf{A} \lambda$ -ban nulladrendet az ismert perturbálatlan megoldás adja. Hamarosan belátjuk, hogy nulladrendben a perturbált probléma sajátenergiái a perturbálatlan probléma sajátenergiáival egyeznek meg.

Mivel a ψ_n függvények H_0 sajátfüggvényei, ezért:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{0}}\psi_n = E_n^{(0)}\psi_n$$

 $(\mathbf{H_0})_{mn} = \langle \psi_m | \mathbf{H_0} | \psi_n \rangle = E_n^{(0)} \delta_{mn}$ Ezen a bázison a Schrödinger-egyenlet mátrixalakja

$$\sum_{n} H_{mn} c_n = E c_n$$
$$\left(E_m^{(0)} - E\right) c_m + \lambda \sum_{n} K_{mn} c_n = 0$$

A sorfejtések:

$$E = E^{(0)} + \lambda E^{(1)} + \lambda^2 E^{(2)} + \dots$$

$$c_m = c_m^{(0)} + \lambda c_m^{(1)} + \lambda^2 c_m^{(2)} + \dots$$

Ezt kell beírni az előző Schrödinger-egyenletbe. A különböző tagok együtthatóiról leolvashatók a különböző rendű korrekciók.

A nulladrend ezt adja:

$$\left(E_m^{(0)} - E^{(0)}\right)c_m^{(0)} = 0$$

Ennek megoldása $E^0 = E_i^{(0)}$ és $c_0^{(0)} = \delta_{im}$. Ez azt jelenti, hogy nulladrendben a sajátenergiák a perturbálatlan Hamilton-operátorok sajátenergiái, és a sajátfüggvények is megegyeznek a perturbálatlan probléma sajátfüggvényeivel. Ez alapján most már tudjuk egyértelműen indexelni a perturbált probléma keresett sajátállapotait egy i indexszel, mely azt adja meg, hogy nulladrendben melyik perturbálatlan állapotra egyszerűsödik a sajátállapot. Általában ettől az i indextől függeni fognak a λ -ban magasabb rendű korrekciók. A továbbiakban egy tetszőleges i indexű állapotot vizsgálunk.

Az elsőrendű energiakorrekciók:

$$E^{(1)} = K_{ii}$$

Az állapotvektorok elsőrendű korrekciói:

$$c_m^{(1)} = \frac{K_{mi}}{E_i^0 - E_m^0}$$

Az energiák másodrendű korrekciói:

$$E^{(2)} = \sum_{n \neq i} \frac{|K_{in}|^2}{E_i^0 - E_m^0}$$

A módszer alkalmazható, ha a kiszámol korrekciók tényleg kicsik, vagyis a perturbáció átmeneti mátrixelemei sokkal kisebbek, mint a perturbálatlan energiaszintek különbségei:

$$\left|\frac{K_{mi}}{E_i^0 - E_m^0}\right| \ll 1$$

Időfüggetlen, degenerált eset

Degenerált esetben egyetlen energiasajátértékhez több sajátfüggvény is tartozhat. A perturbácó hatására ezek az energiaszintek fel is hasadhatnak (gondoljunk a Zeeman-effektusra). Ekkor az előző módszer nem alkalmazható, a λ nulladrendjére kapott $\left(E_m^{(0)} - E^{(0)}\right)c_m^{(0)} = 0$ egyenlet nem határozza meg egyértelműen a nulladrendű sajátvektorokat, mert vannak olyan energiasajátértékek, amelyek megegyeznek, és az azokhoz tartozó c-ket nem tudjuk meghatározni. Azt persze továbbra is tudjuk, hogy a más energiájú sajátállapotok együtthatói nulladrendben zérusok. Az azonos energiájú sajátállapotok nulladrendű együtthatóihoz viszont fel kell használni λ -ban a következő rendet is. Ebben megjelenik az energiafelhasadás első rendje is, melyet így szintén megkaphatunk ebből az egyenletből. A kapott egyenlet:

$$\sum_{n} K_{mn} c_n^{(0)} = E^{(1)} c_m^{(0)}$$

Ez így rendezhető át:

$$\sum_{n} \left(K_{mn} - E^{(1)} \delta_{mn} \right) c_n^{(0)} = 0$$

Ezen homogén egyenlet megoldási feltételéből kapjuk a **szekuláris egyenlet**et amely megadja az elsőrendű energiakorrekciókat:

$$\det |\left(\mathbf{K} - E^{(1)}\mathbf{I}\right)| = 0$$

Az eredeti egyenletben az elsőrendű energiakorrekciókat visszahelyettesítve megkapjuk a $c_n^{(0)}$ nulladrendű együtthatókat. Ezekután már használhatók a nem degenerált eset képletei.

Időfüggő eset

Az időfüggő perturbációszámítás logikája az eddigiektől eltérő. Mivel kis hatások felhalmozódhatnak hosszú idő alatt, ezért fel szoktuk tenni, hogy a perturbáció csak rövid ideig tart. Most is hasonló sorfejtést alkalmazunk, mint az előbb a perturbálatlan feladat($\mathbf{H}_0\psi_n = E_n\psi_n$) sajátfüggvényei szerint kifejtve a megoldást:

$$\psi(t) = \sum_{n} c_n(t)\psi_n$$

Így a Schrödinger-egyenlet:

$$\sum_{n} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_n | \psi_m \rangle = \sum_{n} \langle \psi_n | \mathbf{H} | \psi_m \rangle c_n$$
$$\dot{c_m} = -\frac{i}{\hbar} E_m c_m(t) + \lambda \sum_{n} K_{mn} c_n(t)$$

A megoldást hatványsor alakban kerssük:

$$c_m(t) = c_m^{(0)}(t) + \lambda c_m^{(1)}(t) + .$$

A továbblépés a közönséges differenciálegyenleteknél ismert állandók variálásának módszere. (A kvantummechanikában ebből lett a kölcsönhatási kép.) Legyen:

$$b_m(t) = e^{\frac{i}{\hbar}E_m t} c_m(t)$$

Ez nulladrendben állandó. Ezt az álandót variálja a perturbáció jelenléte.

$$\dot{b_m}(t) = -\frac{i}{\hbar}\lambda \sum_n e^{i\omega_{mn}t}K_{mn}(t)$$

ahol $\hbar\omega_{mn} = E_m - E_n$.Az első rendet megkapjuk, ha a jobb oldalon $b_n(t) = b_n(0) = c_n(0)$ közelítést alkalmazzuk. A fenti differeniál egyenletből a b együtthatók kiszámolhatóak, segítségükkel meghatározható a végállapot hullámfüggvénye. Ismert tehát a kezdeti és a végállapot, ebből felírható a K mátrixeleme:

$$K_{mn} = \langle \phi_m | K | \phi_n \rangle$$

Legyen a kezdeti(i) állapot egy perturbálatlan sajátállapot: $c_n(0) = \delta_{in}$. Az átmeneti valószínűség:

$$P_{fi} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t e^{i\omega_{fi}\tau} K_{fi}(\tau) d\tau \right|^2$$

Fermi-féle aranyszabály

A Fermi-féle aranyszabály folytonos/kvázifolytonos spektrumban segít átmeneti valószínűségeket kiszámítani. ω körfrekvencájú periodikus perturbáció esetén az időegységre jutó átmeneti valószínűség:

$$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \mathbf{K}_{fi} \right|^2 \left(\delta(E_f - E_i + \hbar\omega) + \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \right)$$

Ez a formula megkapható az előző pontból kiiindulva $t >> \omega^{-1}$ határérték elvégzésével. Állandó perturbáció esetén:

$$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \mathbf{K}_{fi} \right|^2 \delta(E_f - E_i)$$

Ha több állapot valamelyikébe való átmeneti valószínűséget akarjuk tudni, akkor:

$$T_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \mathbf{K}_{fi} \right|^2 \rho$$

ahol ρ_a végső állapotok sűrűsége(állapotok száma energiaegységenként)

Elektronok kölcsönhatása sugárzási térrel, Indukált emisszió és abszorpció

Az elektromágneses tér kölcsönhat az elektronnal, az elektronra ható erő a következő:

$$\mu \dot{\mathbf{v}} = -e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right),\,$$

ahol v az elektron sebessége, μ a tömege, E és H az elektromos illetve mágneses térerősség. Be lehet látni, hogy a mozgásegyenlet származtatható a

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - e\Phi$$

Hamiltonfüggvényből. Ez a megszokott módon operátorosítható. Ha tiszta sugárzási térbe helyezzük az elektront, akkor Φ elhagyható. Kis terekre Coulomb-mértékben vizsgálva a problémát, a következő közelítést tehetjük a perturbáló Hamilton-operátorra:

$$\mathbf{K} = \frac{e}{\mu c} \mathbf{A} \mathbf{p}_{\underline{}}$$

Az egyszerűség kedvéért azt a problémát vizsgáljuk, hogy egy Hidrogénatomot sugárzási térbe helyezünk, és megnézzük mit jósol a perturbációszámítás (lehetséges-e átmenet a hidrogénatom állapotai között, mekkora valószínűséggel, stb). A vektorpotenciált a következő alakúnak tételezzük fel:

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}A_0\cos(\mathbf{kr} - \omega t) = \frac{\mathbf{e}}{2}A_0(e^{-ikr}e^{i\omega t} + e^{ikr}e^{-i\omega t})$$

Ekkor a perturbálópotenciál felírható a kvöetekző alakban: $\mathbf{K}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}e^{i\omega t} + \mathbf{K}^*e^{-i\omega t}$. A két tag rögzített kezdőállapot esetén csak egy-egy átmenetre nem fog zérust adni. Az első tag az emissziót írja le, melynél az átmeneti valószínűség

$$W_e = \frac{2\pi}{\hbar} \left[|K_{nm}|^2 \rho(E_n) \right]_{E_n = E_m - \hbar\omega}$$

A második tag az abszorpciót írja le, melynél az átmeneti valószínűség analóg módon

$$W_e = \frac{2\pi}{\hbar} \left[|K_{nm}|^2 \rho(E_n) \right]_{E_n = E_m + \hbar\omega}$$

A konkrét valószínűségekhez kiszámítandó a következő mátrixelem:

$$K_{nm} = \frac{eA_0}{2\mu c} e^{-ikr} (\mathbf{e}\mathbf{p})_{nm}$$

Mivel a hullámfüggvények az atomra vannak koncentrálódva, ezért e^{-ikr} tekinthető egységnyinek, vagyis

$$K_{nm} \approx \frac{eA_0}{2\mu c} (\mathbf{ep})_{nm}.$$

Ezt a sugárzást dipólsugárzásnak nevezzük (amikor elhagyjuk az exponenciálist). Ekkor ugyanis belátható, hogy a mátrixelem arányos az elektron dipólnyomatékával.

Ha a dipólnyomaték egy átmenetre zérus, akkor az átmenet nem valósul meg. Ekkor az adott átmenet tiltott. Be lehet látni, hogy az átmenet csak akkor megengedett, ha a kezdő- és végállapot között a mellékkvantumszám és a mágneses kvantumszám különbsége is pontosan 1.

Variációs módszer

Az energiasajátérték egyenlettel ekvivalens állítás az a variációs elv, amely szerint alapállapotban

$$\phi^* \mathbf{H} \phi = \langle \phi | \mathbf{H} | \phi \rangle = min. = E_0$$

az n. gerjesztett állapot pedig úgy kaphatjuk, hogy az előző szélsőértékfeladatot azon mellékfeltételekkel oldjuk meg, hogy az ϕ_n állapot ortogonális az alapállapotra és az előző n-1 gerjesztett állapotra is. Természetesen a feladat általános megoldása általában lehetetlen, ezért gyakorlati alkalmazásokban csak a Hilbert-tér egy leszűkítésén oldjuk meg, valamilyen próbafüggvényt feltételezve, majd a paraméterei szerint elvégezve a szélsőértékproblémát.

Ritz-féle variációs módszer (*)

Akkor beszélünk Ritz-féle variációs módszerről, ha a próbafüggvény valamilyen bázisfüggvények lineáris kombinációja:

$$\phi = \sum_{i} c_i \phi_i$$

Ekkor az energia várható értéke:

$$\epsilon = \frac{\langle \sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i | \mathbf{H} | \sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i \rangle}{\langle \sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i | \sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i \rangle}$$

Ennek a c-k vagy c*-ok szerinti deriválása egy lineáris egyenletrendszerhez vezet, melynek megoldási feltétele a következő **általánosított szekuláris egyenlet**et adja:

$$det|\mathbf{H} - \epsilon \mathbf{S}| = 0$$

ahol az átfedési mátrix, mely a bázisállapotok nemortogonalitása miatt jelenik meg:

$$S_{ij} = \langle \phi_i | \phi_j \rangle$$

Problémák a kvantummechanika közelítő módszereivel

A perturbációszámítás gyakorlati(pl. molekulafizkai) alkalmazásakor néha problémák merülnek fel. Egyrészt előfordul, hogy az egyre újabb rendekben kapott energiák oszcillálnak, másrészt pedig előfordul, hogy úgy tűnik, mintha már bekonvergált volna a sor, de még néhány tag kiszámolása után ismét elindul. Ezek a problémák nem állnak fenn a variációs módszernél, ott legalább az irány mindig egyértelmű. De ott is előfordul, hogy az energia már nagyon közel van a jó(kísérleti) értékhez, de a hullámfüggvény még meglehetősen messze.

Azonos részecskék, Pauli-elv

A Hamilton-operátor szimmetrikus két azonos részecske(elektron) felcserélésére. Ezért a Hamilton-operátor kommutál a részecskék felcserélésével. Következésképpen választható olyan energia sajátfüggvények, amelyek a felcserélés operátorának is sajátfüggvényei. Mivel kétszeri felcserélés után az eredeti állapotba jutunk vissza, a felcserélés sajátértéke csak ± 1 lehet, vagyis a felcseréléssel szemben a sajátállapot lehet szimmetrikus vagy antiszimmetrikus.

Ha áttérünk az időfüggő Schrödinger-egyenletre, akkor a permutáció operátora megmaradó mennyiség(mivel a Hamilton-operátorral felcserélhető), így a kezdeti szimmetria az időfejlődés során is megmarad.

Mint kiderült, a hullámfüggvény szimmetriája a részecske fajtájából következik:

- Feles spinű részecskék(**fermionok**) hullámfüggvénye antiszimmetrikus. Ebből az állításból rögtön következik, hogy az atom elektronjai közül semelyik kettő nem lehet azonos állapotban.
- Egész spinű részecskék(bozonok) hullámfüggvénye szimmetrikus.

Mivel nincsenek vegyes szimmetriájú részecskék, ezért minden részecskének tartozni kell valamelyik kategóriába. Azonos részecskék megcserélése az előzőtől megkülönböztethetetlen állapotot hoz létre. Az **azonos részecskék megkülönböztethetetlenek**.

Átlagtérközelítés

Nem kölcsönható azonos részecskék

Nem kölcsönható azonos részecskék esetében a Hamilton-operátor egyrészecske Hamilton-operátorok összege:

$$\mathbf{H} = \sum_{l=1}^{N} \mathbf{H}_{l}^{(1)}$$

Ezesetben a Schrödinger-egyenletnek mindig léteznek szorzatalakú megoldásai:

$$\phi(1,2,3,...) = \phi_a(1)\phi_b(2)...$$

ahol:

$$\mathbf{H}\phi_a(1) = E_a\phi_a(1)$$

Ezen szorzatok viszont még nem teljesítik a Pauli-elvet. Ennek kielégítésére az egyrészecske-állapotokból **Slater-determináns** képezhető:

$$\Psi(1, 2, ..., N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(1) & \phi_2(1) & \cdots & \phi_N(1) \\ \phi_1(2) & \phi_2(2) & \cdots & \phi_N(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(N) & \phi_2(N) & \cdots & \phi_N(N) \end{vmatrix}$$

A függvények indexei jelölik, hogy melyik függvényről van szó, argumentumaik pedig azt, hogy melyik részecske koordinátái írandóak a függvénybe. Ennek látszanak a megfelelő tulajdonságai:

- Ha két részecskét(sort) felcserélünk akkor előjelet vált.
- Ha két oszlop azonos akkor nulla lesz, vagyis nem lehet két részecske azonos állapotban.

Átlagtérközelítés

Továbblépve a nemkölcsönható részekéktől a következő közelítést alkalmazhatjuk. Egy részecske helyén sok más részecskétől eredő erőt érez, ezt külső térnek tekintjük, és beírjuk az egyrészecske Schrödinger-egyenletbe. Ezt megoldva új egyrészecske sajátfüggvényeket kapunk, amelyek őj teret adnak, ezzel újraszámoljuk az egyenletet stb. Addig iterálunk, amíg a tér be nem konvergál, ezzel megkapjuk az **önkonzisztens ter**et, vagy átlagteret.

Hartree-Fock módszer

Azt az átlagtérközelítést, amikor egyetlen Slater-determináns alakjában keressük a megoldást, és ezzel végzünk önkonzisztens-tér közelítést Hartree-Fock módszernek hívjuk. Kicsit részletesebben is megnézzük.

A variációs elvből indulunk ki. Eszerint $I = \langle \phi | \mathbf{H} | \phi \rangle$ minimális. Ha a megoldást szorzatalakban keressük: $\phi = \phi_1(r_1)\phi_2(r_2)...$ akkor az I variációjának eltünéséből az egyrészecske Schrödinger-egyenletek:

$$\left(\mathbf{H}_{l} + \sum_{k=1}^{Z} \langle \phi_{k} | \frac{e^{2}}{r_{lk}} | \phi_{k} \rangle - E_{l} \right) \phi_{l} = 0$$

Az egylenrendszert pedig szukcesszív aproximációval oldjuk meg, első közelítésben ϕ_k -kat hidrogénszerűnek feltételezve, és innen indítva az önkonzisztens tér közelítést. Ez a **Hartree-módszer**. Itt még láthatóan nem vettük figyelembe a Pauli-elvet.

A Hartree-módszer továbbfejlesztése a Hartree-Fock módszer, amely Slater-determináns alakú megoldást keres:

$$\Psi(1, 2, ..., N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(1) & \phi_2(1) & \cdots & \phi_N(1) \\ \phi_1(2) & \phi_2(2) & \cdots & \phi_N(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(N) & \phi_2(N) & \cdots & \phi_N(N) \end{vmatrix}$$

Ekkor I variációjának eltűnése a következő egyenleteket adja:

$$\left(\mathbf{H}_{l} + \sum_{k=1}^{Z} \langle \phi_{k} | \frac{e^{2}}{r_{kl}} | \phi_{k} \rangle - E_{l} \right) \phi_{l} - \sum_{k=1}^{Z} \langle \phi_{k} | \frac{e^{2}}{r_{kl}} | \phi_{l} \rangle_{=0}$$

Ezt ugyanúgy szukcesszív approximációval oldjuk meg.

A periódusos rendszer

A kvantummechanika korai sikereinek egyike a periódusos rendszer megértése volt a Hartree-módszer alapján. Az eljárás a következő. A megoldásokat szorzat alakban keressük: $\Psi = \prod_{j} u_{j}$, és a Pauli-elv miatt nem engedjük meg, hogy egy u_{j} elektronpályát kettőnél több elektron töltsön be(két ellentétes spinű elektron). Az egyrészecske Schrödinger-egyenletekben szereplő átlagos potenciál mindig radiális szimmetriájúvá átlagoljuk vissza, így a kapott egyrészecske állapotok jellemezhetők az n főkvantumszámmal és l mellékkvantumszámmal. Az l főkvantumszámok hasgyományos jelölése: s,p,d,f,...

Az elektronok leárnyékolják a mag potenciáját, így ha egy elektron távolabb van a magtól, akkor kisebb potenciált érez. Az, hogy egy elektron milyen messze jár a magtól elsősorban a mellékkvantumszámától függ, hiszen ahogy pl. a hidrogénatomnál látható, a radiális hullámfüggvény r^{l} hatvánnyal indul. Másképp megfogalmazva, nagy l-re az l(l+1)-el arányos centrifugális potenciál miatt az elektron kintebb lesz. Így a magasabb l kvantumszámú állapotok gyengébben kötöttek, és megszűnik a hidrogénatomnál még meglévő l szerinti degeneráció. Azonos főkvantumszámra az l=0-tól (n-1)-ig tartó állapotok energiasajátértéke monoton nő.

A Hartree-közelítés megadja az elektronpályák betöltésének sorrendjét:

1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, 5s, 4d, 5p, 6s, 4f, 5d, 6p, ...

Érdemes megfigyelni, hogy a betöltött legmagasabb főkvantumszámú állapotok mindig s és p állapotok. Az atom külső határán a főkvantumszám határozza meg, hogy egy elektronpálya meddig terjed ki. Így azt találtuk, hogy a külső elektronpályák s és p pályák. Márpedig a külső pályák azok, amelyek meghatározzák a kémiai tulajdonságokat. n=1 külső héjjal 2 elem létezhet. n=2 külső héjjal $2 + 3 \cdot 2 = 8_n$ =3-assal ismét 8 és így tovább. A kémiai tulajdonságok az s,p pályák fokozatos betöltésébel változik, hogy aztán a következő főkvantumszámmal újra kezdje. Így megértettük a periódusos rendszert.

Viriál-tétel(*)

A kvantummechanikai viriáltétel mondja, hogy ha egy rendszer Hamilton-operátora:

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} + \mathbf{V} = \sum \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + \mathbf{V}$$

ahol a potenciális energia k-adredű homogén függvény:

 $V(\lambda \vec{r}) = \lambda^k V(\vec{r})$

akkor fennáll a következő egyenlőség:

$$k\langle V \rangle = 2\langle T \rangle$$

A leggyakoribb potenciálokra:

- Coulomb-potenciál k=-1
- Harmonikus oszcillátor k=2

A Born-Oppenheimer közelítés

A molekulák elméletében kiemelt jelentőségű az a tény, hogy az atommagok tömege sokkal nagyobb az elektronokénál, ezért azok sokkal lomhábban mozognak, mint az elektronok. Ez teszi lehetővé, hogy a molekula elektronproblémáját rögzített magkoordinátákkal megoldva, azokat paraméternek tekintve, majd az így kapott energiafelület minimumát megkeresve megkapjuk a molekula alapállapoti energiáját(és hullámfüggvényét). Ezt az eljárást nevezik Born-Oppenheimer közelítésnek. Az elektronprobléma megoldása több energiát ad, ezekből több potenciálfelületet kapunk. Akkor alkalmazható a közelítés, ha ezek a felületek szeparálva vannak egymástól.

Kicsit részletesebben, a Born-Oppenheimer közelítésben a hullámfüggvény:

$$\Psi = \Psi_{el}(\vec{r}, \vec{R}) \Psi_{mag}(\vec{R})$$

ahol $\Psi_{el}(\vec{r}, \vec{R})$ a magkoordinátáktól is függő elektronállapot, $\Psi_{mag}(\vec{R})$ pedig a magok közelítő állapota. A Hamilton-operátor:

 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{el} + \mathbf{H}_{mag}$

ahol az elektron Hamiltonja a kinetikus energiájuk, a magok vonzása és az elektronok egymás közti taszításának összege:

$$\mathbf{H}_{el}(\vec{R}) = \mathbf{T}_{el} + \mathbf{V}(\vec{r}, \vec{R})$$

és a magok Hamiltonja a kinetikus energiájuk és egymás közti taszításuk összege:

$$\mathbf{H}_{mag} = \mathbf{T}_{mag} + \mathbf{V}_{mag}(\vec{R})$$

A lassan változó magkoordinátáktól függő elektron sajátérték probléma:

$$\mathbf{H}_{el}(\vec{R})\Psi_{el,j}(\vec{r},\vec{R}) = U_j(\vec{R})\Psi_{el,j}(\vec{r},\vec{R})$$

Adiabatius közelítésben az a közelítő potenciál, amelynek minimuma a kémiailag kötött állapotot jelenti:

 $\mathbf{V}_{mag}(\vec{R}) + U_j(\vec{R})$

Ezen minimum körül alakulnak ki a molekularezgések, amelyek kis gerjesztésnél harmonikusak, nagyobb gerjesztésnél anharmonikusak. Még nagyobb gerjesztés disszociációhoz, kémiai reakcióhoz vezet.

Formálisan úgy kapható meg a közelítés, mint az $(m_e/m_{mag})^{1/4}$ kis paraméter szerinti sorfejtés vezető tagja. Akkor romlik el a közelítés, ha az elektronok is lassan mozognak. Ahol egy $U_i(\vec{R})$ és $U_j(\vec{R})$ szint keresztezi egymást, ott van lassú mozgás, ott keveresnek a molekula különböző gerjesztései. Az ilyen levert gerjesztési módust **polariton**nak hívják.

Hellmann-Feynman tétel (*)

A Hellmann-Feynman tétel szerint:

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \langle \phi | \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \lambda} | \phi \rangle$$

ahol E a ϕ hullámfüggvényhez tartozó energia, λ pedig valamilyen paraméter. Ezen tétel segítségével ki tudjuk számolni a molekulában a magokra ható erőket, amiből lehet egyensúlyi magtávolságokat számolni, ekkor λ helyére a magkoordinátákat kell írni és ekkor tulajdonképpen a potenciál helyszerinti deriváltja áll a képletben, ami mint tudjuk az erő (-1 szerese).

A kémiai kötés

A kvantummechanika egyik nagy sikere volt a kovalens kötés megmagyarázása. A kötés azért jöhet létre, mert a kötött rendszer energiája alacsonyabb, mint az atomok energiájának összege. Ez azért van, mert az elektronok hullámfüggvénye besűrűsödik az atomok köze. Ekkor:

• Coulomb-potenciálban a viriál-tétel miatt:

$$E = \langle T \rangle + \langle V \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle$$

Ha a magok között az elektronok összesűrűsödnek, akkor a magok vonzó potenciálja összeadódik, ami mélyebb eredőt eredményez.

• Egy helyről lehet két magot egymás felé vonzani.(Hellmann-Feynmann tétel)

Vannak olyan effektusok is, amelyek a sűrűsödést akadályozzák:

- Kisebb helyre szorulás a kinetikus energia növekedésével jár.
- Az elektronok közötti Coulomb-taszítás
- Pauli-elv akadályozza sok azonos spinű elektron összegyülekezését kis helyre, emiatt egy-egy molekulapályán ellentétes spinű elektronokból párok alakulhatnak ki

Ez kvalitatív kép. A kvantitatív számolások nehezek.

A hidrogén atom

A Schrödinger-egyenlet megoldása Coulomb-potenciálban

Ennek megjegyzése szerintem annnyira nem fontos.

A szögfüggő tagok leválasztása után:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)R_l(r) = E \cdot R_l(r)$$

Bevezetve u = rR-t:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}u''(r) + \left(\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E\right)u(r) = 0$$

Ezek után dimenziótlanítunk. Legyen $\rho = r/r_B$ és $\epsilon = E/Ry$, ahol a Bohr-sugár $r_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{M_e e^2}$ és a

Rydberg-állandó
$$Ry = \frac{e^4 M_e}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2}$$
. Ekkor:
$$-\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \left(\frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} - \epsilon\right) u = 0$$

A szükséges határfeltételek:

- $\rho \to \infty_{-\text{ben u}=0}$.
- $\rho \rightarrow 0_{\text{-ban}?}$

Ha $\rho \rightarrow a \neq 0_{akkor} R \propto \rho^{-1}$, erre hattatva a Laplace operátort az origóban Dirac-deltát kapunk, vagyis nem elégítjük ki a Schrödinger-egyenletet. Ezért itt is u=0 lesz a határfeltétel.

Az egyenlet megoldási módszere Sommerfeld féle polinom módszer:

• Megoldjuk az egyenletet aszimptotikusan.

Az aszimptotikus megoldás $\rho \to \infty$ -ben $e^{\pm \alpha \rho}$ ahol $\alpha = \sqrt{|\epsilon|}$. A norma miatt csak a negatív előjel jó.

- A megoldást $f(r) \cdot \psi_a(r)$ alakban keressük, ahol $f(r) = \sum a_n r^n$ hatványsor. Az f(r) eredeti egyenletbe való visszahelyettesítése után kapunk egy rekurziót az a_n -ekre.
- A rekurzió megoldása elrontja az aszimptotikát, az egyetlen megoldás, ha a hatványsorunk véges, vagyis valamilyen n-re $a_n = 0$. Ebből a feltételből közvetlenül kapjuk az energiaszinteket. Az együtthatók kiszámolásával pedig a sajátfüggvényeket.

Az energiaszintek:

$$\epsilon = -\frac{1}{n^2}$$
 Minden energiaszint $\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$ -szeresen degenerált

Atomi energianívók termjelölése

Az atomi energianívókat jellemző kvantumszámok:

- n főkvantumszám (1,2,3,4,... vagy K,L,M,N,...)
- 1 mellékkvantumszám, az eredő pályaimpulzusmomentum kvantumszáma (0,1,2,3... vagy S,P,D,F,...)
- s eredő spinkvantumszám
- j teljes impulzusmomentum, értéke Il-sl-től l+s-ig változhat
- m_j mágneses kvantumszám: j,j-1,...,-j

A hagyományos jelölés:

$$n^{2s+1}l_j$$

Pl.: a nátrium alapállapota $3^2S_{1/2}$

Mágneses momentumok

Az elektron pályimpulzusához tartozó mágneses momentum:

$$\vec{\mu_l} = -\frac{g_l \mu_B}{\hbar} \vec{L}$$

Az elektronspinhez tartozó mágneses momentum:

$$\vec{\mu_s} = -\frac{g_s \mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

A magspinhez tartozó mágneses momentum:

$$\vec{\mu_I} = -\frac{g_I \mu_n}{\hbar} \vec{I}$$

Itt L az elektron pályamomentuma, S a spinje, I a magspin. A Bohr-magneton:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{m_e}$$

A magmagneton:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{m_p}$$

A különböző g-faktorok értéke elektronpályára 1, elektronspinre 2(pontosabban 2,00232). Ez első adódik a klasszikus kvantummechanikából, a második a Dirac-egyenletből. A különböző atommagok g-faktorai, vagy giromágneses faktorai táblázatban megtalálhatóak. A mag-giromágneses faktor:

$$\gamma = \frac{g\mu_n}{\hbar}$$

Finomfelhasadás

A spektrumvonalak első korrekciója a relativisztikus hatások figyelembevétele miatt keletkezik. Ez a hidrogén esetében az egyébként csak a főkvantumszámtól függő energiaszintek szeparációját hozza magával. Az effektus nagyságrendje: $(Z\alpha)^2$, ahol Z a rendszám, α a finomszerkezeti-állandó, így a nagyságrend kb. $\propto 10^{-5}$. Ez az effektus több hatás összegése, tartalmazza a spin-pálya kölcsönhatást, a relativisztikus energiakorrekciót és egy kiátlagolt elektronmozgási potenciált.

Spin-pálya kölcsönhatás

A finomfelhasadást részben okozó spin-pálya kölcsönhatás úgy tekinthető, mint a spin mágneses momentumának energiája az atom belső mágneses terébe, mely az elektronok mozgásából ered. A belső tér a pályaimpulzus-momentummal, a spin mágneses momentuma a spinnel arányos, ezért:

$$H' = \zeta(r) \vec{L} \vec{S}$$

Mivel:

$$LS = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

és S=1/2, ezért két energiaszint lesz, az j=l+1/2 energiája nagyobb mint a j=l-1/2 szinté. A felhasadás nem szimmetrikus.

Hiperfinom felhasadás

A spektrumvonalak az elektronok maggal való mágneses kölcsönhatásának és az atommag helyén levő elektromos tér hatására kialakuló magelektromos kvadrupól momentum hatásának következtében további felhasadásoknak lesznek kitéve. Általánosságban ezek a finomszerkezetnél még legalább egy nagyságrenddel kisebb effektusok.

A magmágneses dipólmomentum hatása

A magmágneses dipólmomentum kölcsönhatása a valenciaelektronok által a mag helyén keltett mágneses térrel egy nagyon kis mértékű felhasadást okoz az atomi spektrumokban. Hasonlóan a spin-pálya kölcsönhatáshoz, a hozzá tartozó Hamilton felírható ilyen alakban:

$$\hat{H}_F = A_i \hat{I} \hat{J}$$

Ahol a teljes impulzumomentum F=I+J. A felhasadás innen:

$$E_F = E_j + A_j \left(F(F+1) - I(I+1) - j(j+1) \right)$$

Lamb shift

A Dirac-egyenlet szerint az azonos j-khez és különböző l-ekhez tartozó nívók a hidrogén spektrumában elfajultak. Lamb és Retherford(1947) kísérletileg kimutatta, hogy a hidrogén $2^2S_{1/2}$ és $2^2P_{1/2}$ nívói 1058MHz frekvenciával elkülönülnek. A felhasadás máshol is jelen van, de jóval kisebb. A Lamb-shift az elektromágneses tér zérusponti energiájának fluktuációjával kapcsolatos, kvantumelektrodinamikával pontosan számolható.

A hélium atom

A legegyszerűbb elméleti módszer a héliumatom kezelésére a következő. A Hamilton-operátorban a két elektron taszítását H' perturbációnak tekintjük, így a Hamilton-operátor két H-atom Hamilton-operátor és egy perturbáció összege:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H_1} + \mathbf{H_2} + \mathbf{H'}$$

a két H-atom operátor összegének sajátértékproblémája:

$$(\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2}) \phi_k(\vec{r_1}) \phi_l(\vec{r_2}) = (E_k + E_l) \phi_k(\vec{r_1}) \phi_l(\vec{r_2})$$

ahol a ϕ_i -k H-atom sajátállapotok. Ezekután a degenerált perturbációszámítás képleteit használva a szekuláris egyenlet:

$$\begin{vmatrix} C - E^{(1)} & K \\ K & C - E^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

Ami alajpán az energiaszintek:

$$E = E_k + E_l + C \pm K$$

Coulomb-integrál:

$$C = \int |\phi_k(\vec{r_1})|^2 |\phi_l(\vec{r_2})|^2 \frac{e^2}{r_{12}} d^3 \vec{r_1} d^3 \vec{r_2}$$

Kicserélődési integrál:

$$K = \int \phi_k^*(\vec{r_1}) \phi_k(\vec{r_2}) \phi_l^*(\vec{r_2}) \phi_l(\vec{r_1}) \frac{e^2}{r_{12}} d^3 \vec{r_1} d^3 \vec{r_2}$$

Ilyen alakú integrálok folyton előjönnek atom- és molekulafizikai számításoknál. A nulladrendű közelítés hullámfüggvényeire pedig rendre:

$$\phi_{+}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_k(1)\phi_l(2) + \phi_l(1)\phi_k(2))$$

$$\phi_{-}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_k(1)\phi_l(2) - \phi_l(1)\phi_k(2))$$

adódik. A spint és a Pauli-elvet figyelembe véve a következőt mondhatjuk. A szimmetrikus térbeli hullámfüggvény antiszimmetrikus spinhullámfüggvénnyel(szinglet) szorzódik:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle-|-+\rangle\right)$$

Az antiszimmetrikus térbeli hullámfüggvény szimmetrikus spinhullámfüggvények valamelyikével(triplet) szorzódik szorzódik:

$$\begin{array}{l} |++\rangle \\ |--\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+-\rangle + |-+\rangle \right) \end{array}$$

Alapállapotban csak a szinglet valósul meg, hiszen k=l miatt a másik esetben a helyfüggő hullámfüggvény azonosan nulla.

Stark-effektus

Az atom energiájának elektromos tér által bekövetkezett falhasadását Stark-effektusnak nevezzük. Az első gerjesztett állapot Stark-effektusa a perturbáció számítás első közelítésében arányos az elektromos térerősséggel, ezért lineáris Stark-effektusnak nevezzük. A lineáris Stark-effektus szimmetrikus felhasadást eredményez. A négyszeres degeneráció kétszeresre csökken. A H-atom esetében:

 $E_2^{(1)} = \pm 3eEr_B, 0, 0$

A lineáris Stark-effektus csak hidrogénszerű állapotokra lép fel, vagyis akkor, ha az energia csak az n főkvantumszámtól függ, és az állapotok l szerint elfajultak. Az energia meváltozása a perturbációszámítás második rendjében jelenik meg:

$$E_{nlm} = E_{nl}^{(0)} + E^2(\alpha + \beta \cdot m^2)$$

ahol α, β állandók, m a mágneses kvantumszám.

Zeeman-effektus

A Zeeman-effektus az aránylag kis mágneses tér hatására bekövetkező, egyébként degenerált energiaszintek felhasadása. A mágneses térnek olyan értelemben kell kicsinek lennie, hogy az az alapállapot Hamilton-hoz perturbációként járuljon hozzá:

$$H = H_0 + K$$

Ahol a perturbáció az atomi mágneses momentum és a mágneses tér szorzata:

$$K = -\mu B$$

Az atomi mágneses momentumhoz a mag is hozzájárul, azonban ez több nagyságrendel kisebb az elektron járulékánál, így elhanyagolható. A mágnesesmomentum a teljes impulzusmomentumot tartalmazza. Ha a spin-pálya csatolás erős, akkor csak a teljes impulzusmomentum marad állandó, szemléletesen a pálya- és spin momentumok precesszálnak az állandó teljes impulzusmomentum körül. Kiátlagolva időben a két nemmegmaradó momentumot:

$$\overline{S} = \frac{(S \cdot J)}{J^2} J$$
$$\overline{L} = \frac{(L \cdot J)}{J^2} J$$

$$K = -\mu_B B m_j g_j$$

Ahol μ_{Ba} Bohr-magnetron, és g_j a felhasadást a kvantumszámok függvényében megadó Landé-faktor:

$$g_J = g_L \frac{J(J+1) - S(S+1) + L(L+1)}{2J(J+1)} + g_S \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

Kétatomos molekulák

Általános megjegyzések

- A tér szimmetrikus a két atommagon átmenő tengelyre, ezért az impulzusmomentum ezen tengelyre vett vetülete megmarad. Ezt a vetületet Λ -val szokás jelölni, és 0,1,2 értékei esetén rendre Σ -, Π -, δ -termről beszélünk.
- A molekula tengelyét tartalmazó síkre való tükrözés az impulzusmomentum előjelét megfordítja(axiálvektor). Következik, hogy a Σ-termek kivételével a többi kétszeresen elfajult(ezek a sajátfüggvények az impulzusmomentum előjelében különböznek). Egy Σ-term tükrözés esetén egy állandóval szorzódhat, mivel kétszeres tükrözés azidentitással egyenlő ez az állandó ±1, ezek alapján szokás Σ⁺és Σ⁻termekről beszélni.
- Két azonos atomból álló molekula szimmetrikus az atommagokat összekötő szakasz felezőpontjára is. Az erre való tügrözés szerint beszélhetünk páros(h) és páratlan(u) állapotokról. Ez utóbbi az elektronkoordináták előjelének megváltoztatásakor előjelet vált. Jelölés pl.: Π_u
- Empirikus szabály: kémiailag stabil kétatomos molekulák túlnyomó többségének alapállapota teljesen szimmetrikus(a molekula minden szimmetriájára invariáns)
- Termeket ábrázolhatjuik grafikusan a magtávolság függvényében. **Tétel:** Csak különböző szimmetriájú termek metszhetik egymást.

A vegyérték

Tekintsük a H_2 molekulát. Ennek a legalacsonyabb impulzusmomentumú lehetséges termjei az ¹Sspinszinglett állapot és a ³Sspintriplett állapot. A spintriplett szimmetrikus spinhullámfüggvényt jelent, ami a Pauli-elv miatt antiszimmetrikus helyhullámfüggvényt. Azonban egy antiszimmetrikus helyhullámfüggvény $|\vec{r_1}| = |\vec{r_2}|$ -nél eltűnik, így nem lehet az alapállapot. Kémiában szokásos kifejezés szerint **csomósík**ja van az elektronpályának. Részletes számolás szerint valóban a ¹Stermnek a magtávolságfüggvényében minimuma van, míg a ³Stermnek nincs(**lazító állapot**), így az alapállapot a ¹Sterm. Vagyis alapállapotban a spin 0. Mind kiderül, a főcsoport elemeinek majdnem minden kémiailag stabil molekulája rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Azt, hogy az ilyen típusú, tisztán kvantummechanikai kötés(**kovalens kötés**, azaz mindkét atomra kiterjedő molekulapályák által alkotott kötés) a spinnel kapcsolatos, Heitler és London felfedezése volt. Ez teszi lehetővé a **vegyérték** fogalmának bevezetését. Egy atom vegyértéke egy atom spinjének kétszerese, ami a körülötte található elektronok spinjének összege. Atomok egyesülése során pedig a vegyértékenek kölcsönösen telítődnie kell, vagyis egy atom minden vegyértékkötésének meg kell feleljen egy másik atom vegyértékkötése.

Molekulák rezgési és forgási spektruma

Az eddigi leírások az áló molekulákra vonatkoztak. Egy molekula azonban végezhet forgó mozgást is, amely szintén kvantált, azaz csak diszkrét energiákat vehet fel, és csak diszkrét kvantumokban gerjeszthető. Ezenfelül a molekulákban, ha megfelelő a potenciálfelület és az molekula geometriájához képesti alapállapotbeli eltérések harmonikus oszcillátorként közelíthetőek, akkor ezek a kötések is gerjeszthetőek a rezgés módusának megfelelő energiájú fotonokkal. Tipikusan a rezgési gerjesztési hullámhossz a közép-infravörös (30–2.5 μm) tartományába esik, az ennél kisebb energiájú forgási gerejsztések kisebb energián, a távoli-infravörösben (1000–30 μm) vannak.

Mivel ezek a kisenergiájú gerjesztések igen érzékenyek és specifikusak a molekula geometriájára, illetve az elektronok potenciálfelületeire, ezért egyedülállóan pontos szerkezet- és anyagmeghatározási lehetőségeket biztosítanak. Ez vezetett a megfelelő spektroszkópiák kialakulásához.

Kis gerjesztések esetén a rezgési spektrum közelíthető harmonikus oszcillátorként, kétatomos molekulákra:

$$E_{rezg} = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

ahol μ_a molekulatömeg, k a kémiai kötés erősségére jellemző erőállandó. Többatomos molekulákra a rezgési spektrum első körben több független oszcillátorral közelíthető:

$$E_{rezg} = \sum_{i} \hbar \omega_i (n_i + \frac{1}{2})$$

A forgási energia pedig első körben merev rotátorként képzelhető el. Mivel a forgási energia lényegesen kisebb a rezgésinél, ezért első körben a kettő tekinthető függetlennek.

IR- és Raman-spektroszkópia

Az IR (infravörös) spektroszkópia összefoglaló neve a forgási és rezgési spektrumok tanulmányozására szolgáló spektroszkópiai módszereknek. Az egyes rezgések igen határozottan specifikusak az egyes molekuláris csoportokra, illetve kötésekre, sőt a spektrumvonalak finomszerkezete az izotópokra is érzékeny. Az elméleti számolások itt igen elbonyolodnakm sokszor nem élhetünk az energiaszintek adiabatikus közelítéssel sem. A forgásispektroszkópiának további hátránya, hogy csak gázfázisban használható, mert folyadékban és gázokban az ütközések elnyomják a hatását. Továbbá szükséges hozzá (első közelítésben), hogy legyen a molekulának eredő dipólmomentuma.

Az fenti módusok gerjesztésének egyik más módszere a Raman-spektroszkópia, ez a fotonok rugalmatlan szórása a különböző gerjeszthető részeken (fononokon, molekuláris elektronfelhőn, kémiai kötéseken), aminek következtében energiát ad át az adott módusnak, amiáltal megváltozik a besugárzott foton frekvenciája és az észlelt spektrumban vonalak jelentkeznek. Ezzel párhuzamosan a felgerjesztett módus egy idő után visszatér az alapálapothoz közeli, de gerjesztett szintre. Az alapvető különbség az infravörös és a Raman-spektroszkópia között, hogy az infravörösnél beusgárzott foton elnyelődik, és közvetlenül csak a rezgést gerjeszti, míg a Raman spektroszkópiánál egy jóval magasabb szintre történő gerjesztés utáni visszaállás vezet ugyanarra az energiaszintre.

Ha az alapállapotból történő gerjesztés után a visszatérés az alapállapotba történik, az a klasszikus Rayleigh folyamat. Ha a visszatérés magasabb szintre történik, például az előbb részletezett esetben, akkor Stokes-folyamatról, ha kicsit gerjesztett állapotból mélyebb állapotba térünk vissza, akkor anti-Stokes folyamatról beszélünk.

Alagút-effektus

Tekintsünk egy rendszert, ahol a hullámfüggvénynek az egyik közegben exponenciálisan lecsengő megoldása van, de a közeg két végén oszcilláló megoldása. Ha a közeg egyik oldalán például felveszünk egy hullámcsomagot, ami adott sebességgel halad az exponenciálisan lecsengő régió felé, akkor véges valószínűsége lesz annak, hogy a hullámcsomag átjut a közegen, és a másik oldalon folytatja útját. Ilyen jelenség van például az atommagban az alfarészecskékkel.

Hivatkozások:

[1] Az első négy alrészről lásd Geszti Tamás: Kvantummechanika, Typotex, Bp., 2007, 13. fej.: Perturbációszámítás (165-190)

Záróvizsga tematika

 Tételek
 A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktul megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszerkezet | A magfizika alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok | Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok

Ritka gázok állapotegyenlete

Tekintsük a következő Hamilton-operátorral jellemezhető rendszert:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{p_i^2}{2m} + \epsilon_i \right] + U(r_1, ..., r_N)$$

Az első tag a részecskék mozgási energiája és belső gerjesztettsége, második a kölcsönhatást jellemző potenciál. Analitikusan a következők számolhatók ki ebből:

- ritka gázok: gyenge a kölcsönhatás, és kicsi a járuléka,
- szilárd és amorf anyagok: erős a kölcsönhatás, de kicsi a hőmérséklet, ezért a részecskék a potenciál minimuma körül rezegnek.

Minket most a ritka gázok állapotegyenlete érdekel. Írjuk fel az állapotösszeget:

$$Z = \frac{1}{N!} \zeta^N \int \dots \int d^3 r_1 \dots d^3 r_N e^{-\beta U(\dots)}$$

ahol az impulzust kiintegráltuk:

$$\zeta = \frac{1}{h^3} \int d^3 p e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} e^{-\beta f(T)} = \frac{(2\pi m kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\beta f(T)}$$

Azonban a potenciált nem tudjuk kiintegrálni ilyen általánosan, arról valamilyen modellt kell alkotni. Feltesszük a következőket:

- A kölcsönhatás párkölcsönhatás, mégpedig úgy, hogy csak a két kölcsönható részecske távolságának abszolút értékétől függ.
- Valamilyen modell függvényt tételezünk fel a párkölcsönhatásra. Ez lehet például Lennard-Jones, vagy a merev gömb: egy bizonyos ^{*T*}0közelségen belül végtelenül nagy a potenciál, azaz ennél közelebb nem kerülhetnek egymáshoz a részecskék. A mostani levezetés általános, az utolsó I integrál tartalmazza ezt expliciten.

Amit tehát ki szeretnénk számolni:

$$z_n = \int \dots \int d^3 r_1 \dots d^3 r_N e^{-\beta U(\dots)}$$

Tekintsük egy pillanatra az átlagos potenciális energiát itt, és a kanonikus tárgyalásban a belső energiát:

$$\overline{U} = \int \dots \int d^3 r_1 \dots d^3 r_N U(\dots) \frac{e^{-\beta U(\dots)}}{z_n}$$
$$\overline{E} = \sum_m E_m \frac{e^{-\beta E_m}}{z}$$

Az első egyenletben szándékosan vittük be az állapotösszeget, ugyanis az így kapott tört a koordinátakonfiguráció valószínűségét jelenti, analógiában a kanonikus modellbeli mikroállapot valószínűséggel. A kanonikus tárgyalásban azonban U-t feltudtuk írni z deriváltjaként, és az analógiát felhasználva itt is megtesszük z_n -re:

$$\overline{E} = -\partial_{\beta} \ln z$$
$$\overline{U} = -\partial_{\beta} \ln z_n$$

Ez utóbbit felintegrálva kapjuk:

$$\ln z_n = -\int_0^\beta d\beta' \overline{U}(\beta') + c$$

c-ről belátható a határokon felvett értékek alapján, hogy $N \ln V$.

Írjuk fel az átlagos potenciális energiát, mint párkölcsönhatások összegét is:

$$\overline{U} = \sum_{i < j} \overline{u}(|r_i - r_j|) = \frac{N(N-1)}{2} \overline{u} \approx \frac{N^2}{2} \overline{u}$$

Ezt szeretnénk egyenlővé tenni az előbb megfogalmazott valószínűségi integrállal, azonban annyit már elértünk, hogy a részecskék már csak a valószínűségben vannak csatolva. A továbbiakban felírjuk a nevezőt is integrál alakban, áttérünk a helykoordináták különbségére (r), mint változóra, ekkor az integrálok fele elvégezhető, ami térfogatot ad és kiesik. A maradékot felírjuk, mint β szerinti deriváltat. Ez már igen egyszerű alakú:

$$\overline{U} = -\partial_{\beta} \ln \int d^3 r e^{-\beta U(r)}$$

Ehhez kihasználtuk azt a feltevést, hogy csak kettős ütközések vannak, a többrészecskék ütközéseket elhanyagoltuk. A továbbiakban feltesszük, hogy az r_0 , mint a részecskék méretét jellemző paraméter sokkal kisebb mint a térfogatot jellemző méretek. Az integrált exponenciális függgvény szinte mindenütt 1 (mert az argumentuma 0), kivéve r_0 közelében, ezért becsempészünk nullát, mint +1 -1. Az így kapott exponenciális integrál (I) csak r_0 közelében jelentős, ezért kicsit átírva sorbafejthető. Eredményül azt kapjuk, hogy:

$$\overline{U} = -\frac{1}{V} \partial_{\beta} I$$

Ezt behelyettesíthetjük a párkölcsönhatások felösszegzésébe, ezután pedig az egész átlagos potenciális energiát beírjuk a kanonikus analógiából kapott $\ln z_n$ képletbe, és elvégezzük az integrált:

$$\ln z_n = N \ln V + \frac{N^2}{2V}I$$

Itt már látszik, hogy az első tag a klasszikus ideális gázhoz tartozik, a másodikaz új, korrekciós tag. Az állapotegyenletet a $p = kT \partial_V \ln z_n$ összefüggésből számolhatjuk:

$$\frac{p}{kT} = \frac{N}{V} \left[1 - \frac{N}{2V} I \right]$$

Az eljárás tovább folyatatható, egyre több korrekció adható az ideális gáz egyenletéhez, további integrálos együtthatók jelennek meg, amelyek N/V egyre magasabb hatványaival skáláznak.

Viriál sorfejtés

A fentebb levezetett nyomásképlet általános alakban az úgynevezett viriál sorfejtés, amelyet a nyomásra vezethetünk le:

$$\frac{p}{k_B T} = \frac{N}{V} + B_2(T) \left(\frac{N}{V}\right)^2 + B_3(T) \left(\frac{N}{V}\right)^3 + \cdots$$

A fenti esetben csak a kétrészecske kölcsönhatásokat vettük figyelembe, a további kölcsönhatások figyelembevétele és a megfelelő viriál-együtthatók integráljainak felírása kombinatorikai feladattá növi ki magát. Az egyes viriál együtthatók továbbá mindig függnek a hőmérséklettől is. További információ itt^[1].

Van der Waals gázok

A fenti ritka gázokra adott levezetéshez igen hasonló módon levezethető a Van der Waals féle valós gázok modelljének állapotegyenlete. Induljunk ki ideális gázból, amelyet N darab megkülönböztethetetlen részecske alkot. Ennek a Hamiltonja:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i}{2m}$$

Az ennek megfelelő egyrészecske állapotösszeg:

$$\zeta = \frac{1}{h^3} \int d^3p \int d^3r e^{-\beta H} = \frac{V}{\lambda_T^3}$$

Itt elvégeztünk két integrált, a helyszerinti egyszerűen a térfogatot adta, az impulzus szerintit pedig Guass-intergál segítségével tudtuk elvégezni. Bevezettük továbbá a termikus hullámhossz jelölését is, ami megközelítőleg a részecskék átlagos de Brogile hullámhossza adott hőmérsékleten, ideális gázban:

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}$$

A korábbiakból a teljes állapotösszeg:

$$z = \frac{\zeta^N}{N!}$$

Most továbblépünk az ideálisgázokról, és feltételezzük, hogy a részecskék között a következő párpotenciál van:

$$\begin{split} u(r) &= \infty \quad r < d \\ u(r) &= -\epsilon \left(\frac{d}{r}\right)^6 \quad r \geq d \end{split}$$

r két részecske távolságát jelöli, d azt a távolságot ahol két részecske éppen érinti egymást. A potenciál definíciója miatt ennél közelebb nem lehetnek egymáshoz. Ezt egyben azt is jelenti, hogy a teljes térfogat nem megengedett a részecskék számára, abból le kell vonni a potenciál által tiltott részt:

$$V = V_0 - N \cdot \frac{2}{3} d^3 \pi$$

Azért kellett egy további kettes faktorral leosztani, mert különben a kizárt térfogatot duplán számoltuk volna. Továbbá bevezetjük a részecskék közötti átlagpotenciált, amit a fentiek felhasználásával egy homogén részecskesűrűségre:

$$\phi = \frac{N}{V} \int_{d}^{\infty} u(r) 4\pi r^2 dr$$

Ami a szokásos *dr* vastagságú gömbfelület darabok felösszegzése. Elvégezve az integrált bevezethetünk két konstanst, az egyiket azonosíthatjuk is a fentebbi fajlagos kirekesztett térfogattal (b):

$$\phi = -2a\frac{N}{V} \qquad a = \epsilon \frac{2}{3}d^3\pi = \epsilon b$$

A potenciálhoz szintén egy energia tartozik, amelyben az eloszlás Boltzmann-eloszlás, azért ezt is bevezetjük, azonban a túlszámlálás elkerülésére itt is bevezetünk egy 1/2-es faktort. A módosított térfogatot és a potenciált beírva az állapotösszegbe:

$$z = \frac{1}{N!} \frac{(V - Nb)^N}{\lambda_T^{3N}} e^{-\frac{\phi}{2}\beta}$$

Ezek után érdemes az állapotösszeg logaritmusát venni, amelyből a nyomás meghatározható, a ritka gázokhoz hasonlóan:

$$p = kT \frac{\partial \ln z}{\partial V}$$

Algebrai átalakítások után megkapjuk a Van der Waals gázok állapotegyenletét:

$$\left(p + \frac{N^2 a}{V^2}\right)(V - Nb) = NkT$$

Ising-modell

Erről bővebben az itt ^[2] található Kondor Imre-féle statfiz jegyzetben olvashatunk.

Az Ising-modell figyelembe veszi a szomszédos spinek közötti kölcsönhatást, egy (ferromágneses) rendszer energiája így:

$$E = -H\sum_{i} s_{i} - J\sum_{\langle i,j \rangle} s_{i}s_{j}$$

A második összegzés csak azokra az i, jpárokra értendő, amik első szomszédok. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy csak két állapot lehetséges, tehát az atomok spinje: $s_i = \pm 1$. Az első tag a H nagyságú külső mágneses térrel vett kölcsönhatás, a második tag a szomszédos spinek közötti kölcsönhatás járuléka. Ferromágnesnél az a kedvező energiájú helyzet, ha a szomszédos spinek ugyanabba az irányba mutatnak, így a Jegyüttható pozitív. Természetesen a valóságban a távolabbi spinek között is lehet kölcsönhatás, az Ising-modellnek azonban jelentős előnye, hogy 1 és 2 dimenzióban egzaktul megoldható.

Az Ising-modell megoldása 1 dimenzióban(*)

Az egyszerűség kedvéért periodikus határfeltételekkel számolunk (vagyis $s_{N+1} = s_1$, de ez nem változtatja meg jelentősen a végeredményt), így a modellt úgy lehet elképzelni, hogy a Nspin egy gyűrű mentén helyezkedik el. A rendszer energiája:

$$E = -J\sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} - H\sum_{i=1}^{N} s_i$$

A termodinamikai mennyiségek meghatározásához írjuk fel az állapotösszeget:

$$Z = \sum_{\{s_i\}} \exp\left(\beta J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} + \beta H \sum_{i=1}^N s_i\right)$$

Az összegzés az összes elképzelhető S_i sorozatra értendő. Az exponenciálist szorzattá lehet bontani, és a szorzást a sorozatokra vett összegzéssel fel lehet cserélni:

$$Z = \prod_{i=1}^{N} \sum_{s_i=\pm 1} e^{\beta J s_i s_{i+1} + \beta H(s_i + s_{i+1})/2}$$

Vezessük be két spin között a következő transzfermátrixot:

$$T_{s_i s_j} = e^{\beta J s_i s_j + \beta H(s_i + s_j)/2}$$

Mivel ^{s_i}és ^{s_j}értéke is ±1lehet, Tegy 2 × 2 mátrix lesz:

$$T = \left(\begin{array}{cc} e^{\beta J + \beta H} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J - \beta H} \end{array}\right)$$

Ekkor az állapotösszeg felírható a transzfermátrixszal:

$$Z = \prod_{i=1}^{N} \sum_{s_i = \pm 1} T_{s_i s_{i+1}} = \operatorname{Sp}\left(T^N\right) = \lambda_1^N + \lambda_2^{N^{\text{term. hat.}}} \lambda_1^N$$

Az állapotösszeg a mátrix N-edik hatványának a spurja, ami kifejezhető a λ_1 és λ_2 sajátértékek hatványával. Mivel Nnagyon nagy, ezért a kisebb sajátérték hatványa elhanyagolható a nagyobbhoz képest a termodinamikai határesetben. A transzfermátrix sajátértékei:

$$\lambda_{1,2} = e^{\beta J} \mathrm{ch}(\beta H) \pm \sqrt{e^{2\beta J} \mathrm{sh}^2(\beta H) + e^{-2\beta J}}$$

Ha nincs külső tér (H = 0), az állapotösszeg: $Z = 2^N ch^N (\beta J)$. A mágnesezettség külső tér esetén:

$$M = \frac{\partial \ln Z}{\partial (\beta H)} = N \frac{e^{\beta J} \operatorname{sh}(\beta H)}{\sqrt{e^{2\beta J} \operatorname{sh}^2(\beta H) + e^{-2\beta J}}}.$$

Ha $\beta J \rightarrow 0$, tehát függetlenek a spinek, akkor $M \rightarrow N \operatorname{th}(\beta H)$. A szuszceptibilitás:

$$v = \frac{\partial M}{\partial M}$$

$$x = \partial H$$

A korrelációs függvény:

$$c_k(r) = \langle s_k s_{k+r} \rangle = e^{-\frac{r}{\xi}}$$
, ahol $\xi = \left| \frac{1}{\ln \operatorname{th}(\beta J)} \right|$ a korrelációs hossz. Ez tekinthető az átlagos doménméretnek.

Antiferromágneses Ising 1 dimenzióban(*)

A Hamilton-függvény abban különbözik a ferromágneses esettől, hogy pozitív a Jegyüttható, azaz fordítva szeretnek állni a szomszédos spinek:

$$H = |J| \sum_{k=1}^{N} s_k s_{k+1} - H \sum_{l=1}^{N} s_l$$

Ugyanazt kapjuk, mint az előző esetben, csak Jhelyére mindenhol -J-t kell írni a képletekben. A korrelációs függvény változik jelentősen, mert oszcillálni fog az értéke:

$$c_k(r) = \langle s_k s_{k+r} \rangle = (-1)^r e^{-\frac{r}{\xi}}.$$

Érdekes módon itt már egy dimenzióban megjelenik a fázisátmenet. Alapállapotban az összes spin váltakozó irányban áll, így a külső tér energiajáruléka eltűnik, hiszen $\sum_{k} s_k = 0$, valamint $E_0 = -N|J|$. Azonban, ferromágneses beállás mellett létezik egy olyan külső tér, ahol az energia éppen akkora, mint az antiferromágneses alapállapotban:

$$E_0 = |J|N - H_{\rm C}N \stackrel{!}{=} - |J|N \quad \Rightarrow \quad H_{\rm C} = 2|J|.$$

Ezen külső térnél teljesen mindegy, hogyan állnak a spinek, mindig ugyanennyi lesz az energiájuk, tehát az entrópia a végtelenhez tart termodinamikai határesetben, nulla Kelvinen.

Az Ising-modell átlagtérelmélete 2 dimenzióban(**)

Az Ising-modell 2 dimenzióban is megoldható egzaktul, de ez nagyon bonyolult, ezért itt egy átlagtér-elméleti közelítést mutatunk be. Az energia kifejezésében a spinváltozókhoz adjuk hozzá és vonjuk is le a várható értéküket, jelölje ezt $m \equiv \langle s_i \rangle$:

$$s_i s_j = (m + (s_i - m)) (m + (s_j - m)) = m (s_i + s_j) - m^2 + (s_i - m) (s_j - m)$$

Az utolsó tag az átlagtól való eltérések szorzata, amit a továbbiakban elhanyagolunk (másodrendűen kicsiny), így nem lesz két spin szorzatát tartalmazó tagunk, a rendszer úgy kezelhető, mint egy szabad spinrendszer, amire az átlagos térnek megfelelő külső tér hat. Az energia így felírva:

$$E = \frac{1}{2}Jqm^2N - \underbrace{(H+Jqm)}_{\text{effektiv ter}}\sum_i s_i$$

Itt *Q*az első szomszédok száma, amit koordinációs számnak hívnak. Az állapotösszeg:

$$Z = e^{-\beta J q m^2 N/2} \sum_{\{s_i\}} e^{\beta (q J m + H) \sum_i s_i} = e^{-\frac{\beta J q m^2 N}{2}} \prod_i \sum_{s_i = \pm 1} e^{\beta (q J m + H) s_i} = e^{\beta J q m^2 N}$$

 $= e^{-\frac{\beta Jqm^2 N}{2}} \{2 \operatorname{ch} \left[\beta \left(q Jm + H\right)\right]\}^N.$ Ebből kiszámítható a mágnesezettség várható értéke:

$$m = \langle s_i \rangle = \operatorname{th} \left[\beta \left(q J m + H \right) \right].$$

A számolás alatt végig felhasználtunk egy mparamétert, mint átlagos mágnesezettséget, de ennek az értéke nem tetszőleges, hanem olyan, hogy a fenti egyenletet kielégíti. Az egyenletet érdemes grafikusan megoldani. Mindkét oldalt m függvényében ábrázolva, a baloldal egy 45° meredekségű egyenes, a jobb oldal egy tangens hiperbolikusz függvény. A két görbe metszéspontjai az egyenlet megoldásai.



A tangensfüggvény meredeksége viszont függ a hőmérséklettől is, így egy kritikus hőmérséklet felett csak egy, alatta viszont három megoldás van. A kritikus hőmérséklet alatt az anyag viselkedése ferromágneses, felette paramágneses, a kritikus hőmérsékleten másodrendű fázisátalakulás játszódik le. Ha a külső tér 0, akkor az egyik megoldás mindig az origóban van, a másik két megoldás pedig szimmetrikusan helyezkedik el. Ha a külső tér nem 0, akkor a megoldások eltolódnak, elég nagy tér melett már a ferromágneses fázisban is csak egy megoldás lesz.



A mágnesezettséget a külső tér függvényében ábrázolva (az alábbi ábra $\beta qJ = 2$ paraméter mellett készült) S alakú görbét kapunk, egy kritikus külső tér érték felett már csak egy megoldás létezik, alatta három. A három megoldás közül azonban a középső instabil (a megoldások a szabadenergia szélsőértékeihez tartoznak, a két szélső megoldás minimum, a középső maximum), így a külső teret mondjuk egy magas értékről egyre csökkentve a mágnesezettség a felső görbén marad, majd a visszafordulási pontot elérve leugrik az alsó ágra. A külső teret ismét növelve a mágnesezettség az alsó ág mentén haladva növekszik, majd a felső visszafordulási pontot elérve visszaugrik a felső ágra. A mágneses teret a közbülső részben hagyva előfordulhat, hogy a rendszer a termikus fluktuációk hatására átugrik az egyik helyről a másikra. Azokat a pontokat, ahol a mágnesezettség visszafordul, spinodális pontoknak nevezik. Ez a viselkedés a valódi ferromágneses anyagokban található hiszterézishez hasonló. Egy valódi anyag azonban sok doménből áll, amik kiolthatják egymás hatását, így be lehet menni vele a 0 mágnesezettség környezetébe is. Természetesen ez csak egy közelítő leírás, ami csak a viselkedés jellegét adja vissza, így a ferromágneses anyagok hiszterézise a részletekben eltér ettől.



Két dimenzió fölött következik be fázisátalakulás: egy adott hőmérséklet fölött ferromágnesesből átvált paramágnesessé az anyag. A fázisátalakulás hőmérsékletét az határozza meg, hogy ott a tangens hiperbolikusz függvény meredeksége az origóban (a biztos metszéspontban) éppen 1, így még csak egy metszéspont létezik.

$$\beta_{\rm C} = \frac{1}{qJ}$$
$$T_{\rm C} = \frac{qJ}{k_{\rm B}}.$$

A mágnesezettség a külső tér 1/3-ik hatványával arányosan indul: $m \sim H^{\frac{1}{3}}$, a kritikus pont körül pedig a hőmérséklet gyökével változik: $m \sim \sqrt{T - T_{\rm C}}$. Érdekes, hogy két dimenzióban éppen a kritikus pont körül használhatatlan az átlagtérelmélet, mert a fluktuációk makroszkopikussá növekednek, a szuszceptibilitás és az átlagos doménméret a végtelenhez tart.

Mágneses anyagok típusai

A mágnesség tárgyalásánál előbukkantak a következő mennyiségek: Mágneses térerősség (H), mágneses indukció vektor (B), mágnesezettség (M). Bevezettük a mágneses szuszceptibilitást, mint anyagi jellemzőt és arányossági tényezőt:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_v)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$$

Azaz a mágneses szuszceptibilitás a mágnesezettség és a mágneses térerősség közötti kapcsolat. A szuszceptibilitás lehet pozitív és negatív is, azaz külső mágneses térbe helyezve az anyagot, az vagy erősíti azt, csak csökkenti (a mágnes vonzza, vagy taszítja őket). Utóbbi esetben az anyag diamágneses, az előbbi esetben több mechanizmust különböztetünk meg. A diamágnesség okozói a belső lezárt elektronhéjakon levő elektronok, amelyek a megváltozással szemben hatnak a mágneses momentumuk térrel szembe állításával.

Ferro-, ferri-, és antiferromágneses anyagok

Paramágnességről beszélünk, ha a vonzó, térerősítő hatás csak a külső mágneses tér jelenlétekor érezhető (ez a tér rendezi egyirányba a momentumokat, eltávolításával azok újra rendezetlenné válnak, és zérusra átlagolódik a hatásuk). A diamágnességgel együtt gyengének tekinthetőek. A ferro-, ferri- és antiferromágneses anyagokban a mágnesesség forrásául szolgáló atomi momentumok eleve rendezetten állnak, a különbség csak az irányban és a méretben van. Ha az atomi rendben azonos méretű és egyirányba álló momentumok vesznek részt, akkor az anyag ferromágneses, így ez állandómágneses jelleget mutat. Ha egymással ellentétesek, és kioltják egymást, akkor antiferromágneses az anyag, ha pedig ellentétes, de különböző nagyságúak a momentumok, akkor ferrimágneses az anyag.

A szilárdtestfizika több elméletet is kidolgozott ezen jelenségek mikroszkopikus magyarázatára.

Domének

A ferromágneses anyagoknál a domének nagy, makroszkopikus méretű azonos beállású területek. Kialakulásuk oka egyszerűen érthető: a momentumoknak kedvező, ha azonos irányba állnak be, azonban amíg a hőmozgás rendezetlenné tudja tenni a rendszert, ez nem érvényesül. Ahogy hűtjük a rendszert, egy kritikus pontnál a momentumok beállása erősebb lesz a hőmozgás karakterisztikus energiájánál, és fázisátmenet következik be, a kialakult kis azonos beállású helyek hirtelen makroszkópikus méretűvé tudnak válni, hiszen egymást állítják be a rendezetlen állapotból, ugyanakkor egy másik irányba rendeződött részt nem tudnak megfordítani. Ahol a különböző irányítottságú részek összeérnek, ott lesznek a *fázishatárok*, vagy *doménfalak* az anyagban. Külső erős térrel beállítható az egész anyagban az orientáció egyirányúvá, így maximális térerősség nyerhető. Kis térerősségeknél az energetikailag kedvező mágnesezettségű domének "meghíznak" az ellenkező beállásúak rovására, doménfalmozgással történik az átmágneseződés. Nagy terek viszont képesek egész doméneket egyszerre átforgatni. A legtöbb ferromágneses anyagnál számít, hogy melyik kristálytani irányban mágnesezzük föl az anyagot, vannak könnyű és nehéz irányok. A kettő közötti átfordításhoz szükséges a mágneses anizotrópia-energia. Általában egy kristályszemcse több doménre hasad föl, a domének mérete mikrométer alatt van. Ezen felül a fölmágnesezés miatt, részben a domének forgásának következtében megváltoznak a kristály méretei, ez a **magnetostrikció**.

Atomi paramágnesség

Másnéven lokalizált parmágnesség. Tekintsük az összes impulzusmomentumot (J = L + 2S), ekkor a mágneses momentum a következőképpen írható:

$$\mu = -g\mu_{\rm B} \mathbf{J}$$

A B külső térben ez a következő energiát jelenti:

$$E = -\mu \mathbf{B}$$

Ha feltesszük, hogy *B* z irányú. akkor a *BJ* skaláris szorzatot helyettesíthetjük BJ_z szorzattal. Az energia ismeretében feltudjuk írni az állapotösszeget (ζ), azonban mivel az atomok függetlenek, elég egy atom járulékát vizsgálni:

$$\zeta = \sum_{J_z = -J}^{J} e^{-\beta g \mu_{\rm B} B J_z}$$

Itt csak J_z -ben különböznek az állapotok, ezért a kitevő többi részére bevezetjük az xváltozót, ekkor az összeg egy véges geometriai sorba megy át. A felösszegzés eredménye:

$$\zeta = \frac{\operatorname{sh}\left[\left(J + \frac{1}{2}\right)x\right]}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

Az egyrészecske-állapotösszeg ismeretében felírható a szabadenergia:

 $F = -NkT \ln \zeta$

amelyben xis paraméterként fog szerepelni és a $\frac{\partial F}{\partial B}$ fogja megadni a mágnesezettséget (pontosabban a mágnesezettség-sűrűséget). Az eredményben a bonyolult kotangens hiperbolikuszok helyett bevezettük a Brillouin-függvényt:

 $M = N q \mu_{\rm B} J \cdot B_J(x).$

A Brillouin-függvény alakra hasonló az arkusz tangenshez, de ez a pozitív oldalon 1-hez, negatív oldalon -1-hez tart. Ebből következik, hogy a maradék szorzófaktor a maximális mágnesezettséget adja meg, a függvény alakjából pedig a szaturáció jelensége adódik, ami akkor következik be, amikor az összes mágneses momentumot azonos irányba állítottuk be. Kiszámolhatjuk a függvény $x \ll 1$, azaz B o 0határesetét, amelyet behelyettesítve megkaphatjuk a szuszceptibilitást:

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{C}{T}$$

Ahol a számottevő mennyiségű konstanst a C Curie-állandóba vontuk össze. Ez a hőmérséklettel fordítottan arányos szuszceptibilitás függés a Curie-törvény.

Atomi diamágnesség

Az atomi diamágnességet szemléletesen úgy magyarázzuk, hogy a külső mágneses tér hatására a keringő elektron pályája megváltozik, és ezáltal a mágneses momentuma is. Keringjen az elektron Tsugarú pályán, melynek az atommagon átmenő, térre merőleges vetületének négyzetes középértéke ρ^2 . A keringési frekvencia ω , és legven a külső mágneses tér H, ekkor a mag vonzó ereje és a Lorentz-erő tart ellent a centrifugális gyorsulással:

$$F + e\rho\omega H\mu_0 = m\rho(\omega + \Delta\omega)^2$$

A négyzetet felbontjuk és a másodrendűen kicsi tagot elhagyjuk. Itt felhasználjuk Larmor tételét, amely azt állítja, hogy egy mágneses térben levő atom elektronjainak mozgása első rendű közelítésben olyan, mintha a tér nem is lenne jelen, csak a körfrekvenciára egy:

$$\omega_L = -\frac{eB}{2m}$$

precesszió szuperponálódna, ezt feleltetjük meg a fenti kis körfrekvencia-megváltozásnak. Ezt úgy kapjuk meg, hogy a Lorentz-erő hatását elsőrendű perturbációnak tekintjük, vagyis igaz a nulladrend:

$$F = m\rho\omega^2$$
,
és elsőrendben:

$$e\rho\omega H\mu_0 = 2m\rho\omega\Delta\omega$$
.

A mágneses momentum az áram és a felület szorzata, az áramot pedig azzal a definícióval írjuk fel, hogy az elektron mennyi idő alatt futja körbe a pályáját (áram) és az mekkora felületet ölel át ($\mu = IA$). Ezek alapján a mágneses momentum komponensei:

$$\mu_i = \underbrace{e\frac{\Delta\omega}{2\pi}}_{\text{aram}} \underbrace{\rho_i^2\pi}_{\text{felulet}} = \frac{e\Delta\omega\rho_i^2}{2}$$

A mágneses momentumhoz csak a tér irányára merőleges távolságok járulnak hozzá, az elektron azonban r sugarú pályán kering, ez behoz még egy 3/2-es faktort a távolságnégyzetek között, így a valódi teljes mágneses momentum $z_{\rm komponense} Z$ rendszámú atommagra:

$$\mu_z = Z e \frac{\Delta \omega}{3} \langle r^2 \rangle$$

Behelyettesítve a Larmor-frekvenciát:

$$\mu_z = -\frac{Z e^2 \mu_0}{6m} \langle r^2 \rangle H$$

Amelyből a szuszceptibilitás már leolvasható, a negatív előjel jelenti a diamágneses hatást. (SI-ben vannak a képletek.)

Pauli-szuszceptibilitás

A Pauli-szuszceptibilitás a parmágnesség egy másik modellje. A modell lényege, hogy a Fermi-energia környékén lévő vezetési elektronok járulnak hozzá az elektronspin-szuszceptibilitáshoz, tehát gyakorlatilag a szabad elektronok paramágnességéről van szó. A hőmérséklettől független, szemben a kötési elektronok paramágneses szuszceptibilitásával, amely hőmérsékletfüggő (Curie-törvény), és kb. két nagyságrenddel nagyobb, mint a Pauli-szuszceptibilitás. Ez az energiaszintek betöltöttségi [sűrűség]éből számolja ki a felfelé és lefelé álló momentumok mennyiségét. Az állapotsűrűségre a Bethe-Sommerfeld sorfejtést alkalmazza. Ezek ismeretében ugyanis a mágnesezettség felírható:

$$M = \frac{1}{V} (g\mu_{\rm B}) (N_{\rm l} - N_{\rm l})$$

N-be a mágneses indukció is bele van olvasztva. Eredményül a szuszceptibilitás:

$$\chi = (g\mu_{\rm B})^2 \frac{3}{2} \mu_0 \frac{N}{V} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\rm F}}},$$

ahol az utolsó tényezőben a Fermi-energia szerepel.

Landau-diamágnesség

A diamágnesség ezen másik modellje már kvantummechanikai megfontolásokon alapul. Az alapötlet szerint a szabad elektornok a mágneses térben körben mozognak, amei megint mágneses teret kelt, és ez gyengíti le a külső teret. Kiindulásként a szabad elektorn mágneses térbeli Hamilton-operátora szolgál:

$$H = \frac{p_x^2 + (p_y - exB)^2 + p_z^2}{2m}$$

Azért kell kvantumosan számolni, mert klasszikusan a mágneses tér kitranszformálható, mi pedig éppen az aszerinti függést keressük. A rendszert jellemző hullámfüggvényt felbontjuk egy y-tól és z-től, valamint egy x-től függő rész szorzatára, és vizsgáljuk a Schrödinger-egyenlet megoldását, amelyben felismerjük a harmonikus oszcillátor energiáját. Az energiát yés zszerint azonban még ki kell számolni, ezt az állapotsűrűség fölhasználásával tesszük. A mágnesezettséget az energia tér szerinti deriváltjából határozzuk meg, ebből pedig a szuszceptibilitás kapható meg:

$$\chi = -\frac{1}{2} \frac{N}{V} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\rm F}}} (g\mu_{\rm B})^2 \mu_0,$$

amely éppen a Pauli-szuszceptibilitás -1/3-a.
Hiszterézis

hiszterézis ferromágneses А a anyagoknak átmágnesezéssel az szemben mutatott ellenállása. Másképpen megfogalmazva, amikor át akarjuk mágnesezni az anyagot, akkor az valamennyire emlékszik korábbi állapotára, ezért adott irányú és nagyságú külső tér alkalmazása után kapott remanens (visszamaradó) mágnesség különböző lehet az anyag előzetes mágnesezettségének függvényében. Legszemléletesebben akkor láthatjuk ha teljesen ezt átmágnesezzük az anyagot egyik, majd másik irányba. A bejárt út különbözik



a **H-M**-síkon. Itt külön névvel illetjük a külső tér megszűnésekor hátahagyott mágnesezettséget (ez a remanens mágnesezettség) és az anyag terét éppen kompenzáló kölső térerősséget (koercitív erő). Keménymágneses anyagoknak széles a hiszterézisgörbéje, tehát nagy tér tudja csak átbillenteni a mágnesezettséget, ilyenekből lehet jó állandómágneseket csinálni. A lágymágneses anyagoknak ezzel szemben nagyon keskeny a hiszterézishurka, hogy könnyű legyen őket átmágnesezni és eltűnjék az eredő mágnesezettség külső tér hiányában. Ilyenekből készíthetünk jó transzformátorokat. A hiszterézisgörbe által körbezárt terület adja meg ugyanis az egy periódus alatt disszipált energiát (ez a vasveszteség).

Curie--Weiss-törvény

A fenti memóriaeffektust Weiss egy belsőtér-elmélettel próbálta megmagyarázni. Eszerint a spinek egyirányú beállása okozza a visszamardó mágnesezettségi memóriát, amelyet úgy lehet figyelembe venni, hogy a mágnesezettség a külső téren kívül önmagának is függvénye. Ennek a függésnek a sorfejtéséből levezethető a Curie-Weiss-törvény. A doméneknél említettek értelmében kihűlésnél megtörténik a "mágneses kifagyás", afelett azonban a termikus random orientáció dominál. A Curie-Weiss-törvény leírja a szuszceptibilitás változását a kifagyási pont felett, a paramágneses hőmérséklettartományban:

$$M = \frac{C}{T - T_{\rm C}} H.$$

Ez a formula a kifagyás felett érvényes, az átalakulási pontban divergens, ami nyilván nem releváns. Jó tudni, hogy ez az egydimenziós Ising-modellből is levezethető.

Speciális anyagok

Spinüveg

A spinüvegek olyan ötvözetek, amelyek kis koncentrációban (0,1-10 %) tartalmaznak mágnesezhető atomokat nem mágnesezhető atomok között véletlenszerűen eloszlatva. Ennek következtében frusztrált állapotok alakulhatnak ki három mágnesezhető atom között: egyszerre csak két párnak kedvező energetikailag a csatolása, a harmadiknak nem, így számos metastabil állapot figyelhető meg. A véletlen eloszlás miatt bonyolult az ilyen anyagok viselkedése: felmágnesezve őket a Curie-törvényt követik, azonban ha elvesszük a külső mágneses teret, gyors lebomlás után egy remanens mágnesezettséget mutatnak a kritikus hőmérséklet alatt, amely azonban idővel lassan, de tovább csökken.

Ha viszont külső tér nélkül hűtjük őket a kritikus hőmérséklet alá és utána kapcsoljuk be a teret, hirtelen elérnek egy mágnesezettséget, ami utána lassan növekszik tovább. Ha összeadjuk a fenti két esetben kapható mágnesezettség-idő függvényt, jó közelítéssel állandót kapunk, amelynek értéke éppen a külső térrel való hűtéskor mérhető mágnesezettség. Ez a viselkedés egyfajta átmenetként fogható fel a ferro- és paramágneses anyagok tulajdonságai között.

Óriás mágneses ellenállás

Ferromágneses és nemmágneses rétegek szendvicselésével speciális vezető eszköz készíthető, amelynek ellenállása nagyban függ a külső mágneses tértől. Néhány nanométeres rétegekből állnak az ilyen anyagok, a ferromágneses rétegek antiferromágnesesen csatolódnak egymáshoz. Az áram a rétegekre merőlegesen folyik, a vezetési elektronok jobban szóródnak azon a rétegen, amelyiknek ellentétes a spinbeállása, mint nekik. A külső teret bekapcsolva minden réteg ugyanolyan irányú mágnesezettséget vesz föl, ekkor akár a felére is csökkenhet az ellenállás. Ilyenkor ugyanis csak az egyik spinbeállású elektronok szóródnak jobban. A külső térrel és nélküle mérhető ellenállás aránya a spinbeállástól függő kétfajta ellenállás mértani és számtani közepének a hányadosával egyenlő (ha csak két ferromágneses réteget vizsgálunk).

Ezen az elven működik a merevlemezek kiolvasófeje, amit spinszelepnek hívnak.

Szupravezetés

Egyes anyagok igen alcsony hőmérsékletre hűtésekor az elektromos ellenállás egzaktul nullává válik. Alapvetően két fajtájuk van: első- és másodfajú szupravezetők. Az elsőfajú szupravezetőkben lejátszódó jelenséget ellentétes spinű elektron-elektron párok (ún. Cooper-párok) létrejöttével sikerült értelmezni, amelyeket a rácsrezgések fononjai tartanak össze. Ilyen párok jönnek létre egy Bose-Einstein-kondenzációhoz hasonló jelenség következtében, mivel az így kialakult párok már bozonnak tekinhetőek. Láthatóan a fononok főszerepet játszanak a jelenségben, amelyek viszont szobahőmérsékleten akadályozzák az elektronok mozgását. Ezért van, hogy a rosszabb vezetők válnak szupravezetővé, a jók viszont, az ezüst, réz, arany pedig nem.

Nagyon fontos tulajdonságuk a Meissner-effektus, vagyis hogy a mágneses tér kiszorul az anyagból, ez a következő egyenletből vezethető le:

$$\left(\Delta - \frac{ne^2\mu_0}{m}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = 0,$$

ahol Δa Laplace, n_a töltéshordozók sűrűsége, e_a töltése, m_a tömege, **B**a mágneses indukció, **j**az áramsűrűség (ebből lesz a szuperáram). Az egyenlet lecsengő megoldásait kell választani.

Ha külső tér jelenlétében folyik le a fázisátalakulás, akkor, ha veszünk egy gyűrű alakú mintát, a gyűrű belsejében mérhetünk mágneses teret, ha viszont később kapcsoljuk be azt, nem tud behatolni oda. Ezeknél ugrásszerű a normális és a szupravezető anyag közötti fázisátalakulás.

A másodfajú szupravezetők elmélete koránt sem ilyen kidolgozott, nem tudják pontosan, mi történik. Annyit tudunk, hogy bizonyos atomrétegekben folyik a szupraram, tehát csak egy síkban jelentkezik az egykristályban a szupravezetés. Soknál a folyékony nitrogén forráspontja fölött bekövetkezik a fázisátmenet, ezek a magas hőmérsékletű szupravezetők. Ezeknél már bonyolultabb a fázisátmenet, mert létezik egy olyan fázis, ahol a mágneses tér örvényfonalakban mégis behatol az anyagba, de egy örvényfonal csak meghatározott értékű fluxust tud befogadni, ez a fluxuskvantálás.

A kritikus hőmérséklet függ az atomok tömegétől (izotópeffektus, $T_{\rm C} \sim \frac{1}{\sqrt{M}}$), másodfajúaknál pedig a külső mágneses tértől is, egy kritikus térerősség fölött nem is következik be a fázisátalakulás. Ezen jó tulajdonságaik miatt a másodfajú szupravezetőket használják szupravezető mágnesekben, így például a CERN LHC gyorsítójában is.

Záróvizsga tematika

Tételek	A klasszikus mechanika alapjai A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása A relativitás elmélet alapjai Egzaktul
	megoldható fizika problémák Folytonos közegek mechanikája Fenomenologikus termodinamika Elektro- és
	magnetosztatika, áramkörök Elektrodinamika Hullámegyenlet és hullámoptika Geometriai optika és alkalmazásai A
	kvantumelmélet alapvető kísérletei A kvantummechanika elméleti háttere Atom- és molekulaszerkezet A magfizika
	alapjai A termodinamika statisztikus alapozása Kvantumstatisztikák Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok
	Kristályos anyagok fizikája Nemegyensúlyi folyamatok leírása Az asztrofizika alapjai

Hivatkozások

- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/Virial_coefficient#Definition%20in%20terms%20of%20graphs
- [2] http://vattay.web.elte.hu/

Kristályos anyagok fizikája

Pontcsoportok, Bravais-rácsok, szimmetriák.

Rácsvektor (\underline{R}_n): olyan vektor, mely mentén ha eltoljuk a rácsot, önmagába megy át. (ez a transzlációs vektor is)



Ez felbontható elemi rácsvektorok lineáris kombinációjára: $\underline{R}_n = n_1 \underline{a}_1 + n_2 \underline{a}_2 + n_3 \underline{a}_3$

Az ilyen R_n vektorral való eltolását *transzlációs műveletnek* nevezzük. Az ilyen műveletek összessége a transzlációs csoportot alkot.

Pontrács: pontok olyan háló szerű elrendeződése, amelyben minden kiszemelt pont környezete minden szempontból azonos akármelyik másik pont környezetével.

*Kristályszerkezet*et akkor kapunk, ha a rács minden pontjában azonos összetételű irányítású atomcsoportot helyezünk el.

Ideális kristály: olyan test, amelynek atomjai rácsszerűen úgy helyezkednek el, hogy létezik három ($\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$)vektor, hogy az atomi elrendeződés minden pontból ugyanolyannak látszik.

Elemi cella: elemi rácsvektorok által kifeszített paralellepipedon. $\underline{a}_1(\underline{a}_2 \times \underline{a}_3)$ Az elemi cella *primitív*, ha csak a csúcsaiban tartalmaz rácspontot. Wigner-Seitz cella: Azon pontok halmaza, melyek közelebb vannak egy adott rácsponthoz, mint bármely másikhoz. (Ha a kristálynak van valamilyen szimmetriája, akkor ez a WS-cellának is megvan, míg az elemi cellának nincs!)

Reciprok rács: $\underline{K}(h_1, h_2, h_3) = h_1\underline{b}_1 + h_2\underline{b}_2 + h_3\underline{b}_3$, ahol $\underline{b}_1 = 2\pi \frac{\underline{a}_2 \times \underline{a}_3}{(\underline{a}_1 \times \underline{a}_2) \underline{a}_3}$

Szimmetriák

1. Transzláció: létezik az \underline{R}_n transzlációs vektor

2. Forgatás: (inverz forgatás is megengedett)

Ha egy kiszemelt tengely körüli $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatás egy testet önmagába visz át, akkor az ilyen tengelyt *n-fogású* forgástengelynek nevezik:



A forgatás szemléltetése. Az alap (alsó) szakaszt forgatjuk el fi szöggel a bal csúcs körül. Ebből kapjuk a trapéz egyik oldalát. Ha megengedett az inverz forgatás, akkor megkapjuk a másik oldalt is. Ekkor a két új pont távolsága (a trapéz felső éle) kifejezhető a szöggel, lásd a táblázatban.

$$ma = a + 2a\sin(\varphi - \frac{\pi}{2})$$
$$m = 1 - 2\cos(\varphi)$$
$$\cos(\varphi) = \frac{1 - m}{2}$$
$$\varphi = \arccos\left(\frac{1 - m}{2}\right)$$

m	-1	0	1	2	3
φ	$0\pi, 2\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
n	1	6	4	3	2

(kvázikristályoknál - ahol nincs periodikus szerk. - lehet 5 forgású)

3. *Inverzió*: (középpontos tükrözés) $\mathbf{r} = -\mathbf{r}$

4. *Csúszósík*: összetett szimmetria művelet \rightarrow tükrözés, majd a tengely irányába való eltolás (az eltolás a fele a tengely irányába eső ismétlődési hossznak).

5. *Tükörtengely*: összetett szimmetria művelet \rightarrow forgatás, majd inverzió: \overline{n} az n fogású tükörtengely jele, $\overline{1}$ a közönséges inverzió, $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$ létezik.

1-5-ig az elemi szimmetriaműveletek matematikai csoportot alkotnak, mivel ezek egymásutáni elvégzése is szimmetriaművelet (csoport szorzás művelete). A pontcsoportok a teljes ortogonális O(3) csoport diszkrét alcsoportjai, és 1-5 műveletek tetszőleges kombinációiból állnak.

Bravais-rácsok

230 tércsoport és 32 pontcsoport (7 osztályba sorolva) létezik 3D-ben, 10 pontcsoport 2D-ben

14 Bravais rács létezik 3D-ben, 7 Bravais rács létezik 2D-ben

A jelölések^[1]:

- Primitív elrendezés (P): rácspontos a cellák csúcsaiban
- Tércentrált elrendezés (I): +1 rácspont a cella közepén
- Lapcentrált elrendezés (F): minden oldallap közepén +1 rácspont
- Egy oldalpáron lapcentrált (A,B vagy C): csak két (szemközti) oldal közepén van +1-1 rácspont

A 7 kristályszimmetria	A 14 Bravais rács					
Triklin	Р					
	$a, \beta, \gamma \neq 90^{\circ}$					
Monoklin	Р	С				
	$ \begin{array}{c} \alpha \neq 90^{\circ} \\ \beta, \gamma = 90^{\circ} \\ \end{array} $	$a \neq 90^{\circ}$ $\beta, \gamma = 90^{\circ}$				
Ortorombos	Р	С	Ι	F		
	$a \neq b \neq c$	$a \neq b \neq c$	$a \neq b \neq c$	$a \neq b \neq c$		
Tetragonális	Р	Ι				
	$a \neq c$	$a \neq c$				
Trigonális	Р					
	$\alpha, \beta, \gamma \neq 90^{\circ}$					
Hexagonális	А					
	$a \neq c$					
Köbös	P (pcc)	I (bcc)	F (fcc)			
		a a a				

Fontosabb kristályszerkezetek^[2]

- 1. Egyszerű köbös (SC): Po
- A WS cellája is kocka.
- 2. Lapcentrált köbös (FCC): Cu, Al, Au, Ag, Ni, Pt ((Ez a legsűrűbb rács))





3. Tércentrált köbös (BCC): Fe, W, Mo



4. Gyémánt rács: C_{gy} , Si, Ge

FCC rács az alapja (és minden második nyolcad kockában van atom).





5. NaCl szerkezet: (két egymásba tolt FCC)



6. Hexagonális (szoros illeszkedésű szerkezet): Zn, Nb

4 atom tetraédert alkot. Ha szabályos ez a tetraéder, akkor teljesen szoros az illeszkedés.



Bloch tétel, adiabatikus szétcsatolás.

Adiabatikus szétcsatolás ötlete Born és Oppenheimer nyomán alakult ki, akik rámutattak, hogy az elektronokra jellemző sebesség szilárd anyagokban, a Fermi-sebesség ($\approx 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) lényegesen nagyobb, mint a közegbeli hangsebesség ($\approx 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$), ami az ionok jellemző sebessége. A következtetés tehát az, hogy az ionok szemszögéből az elektronok követhetetlenül gyorsan mogoznak, az elektronok pedig úgy érzik, mintha az ionok helyben állnának. Ez igen jelentős egyszerűsítéseket tesz lehetővé, amelyeket a nem csak a szilárdtestfizika de a molekulafizika is gyakran alkalmazni tud.

Ionok:
$$\underline{R}_I$$
; $\underline{P}_I = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \underline{R}_I}$

A Hamilton-fv:
$$\mathcal{H} = -\sum_{I} \frac{\hbar^2}{2M_I} \frac{\partial^2}{\partial \underline{R}_I^2} + V_I(\underline{R}_I)$$

Azaz az ionokra csak a saját mozgásukat írtuk fel a saját potenciáljukban, ebben a közelítésben az elektronok hatását elhanyagoljuk.

Elektronok:
$$\underline{r}_i$$
; $\underline{p}_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \underline{r}_i}$
A Hamilton-fv: $\mathcal{H} = -\sum_i \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + v_e(\underline{r}_i) + v_{ei}(\underline{R}_I, \underline{r}_i)$

Ekkor az elektronokra szintén a saját mozgásuk és az önmaguk által keltett potenciáljuk hat, az ionok hatását egy külön kölcsönhatási potenciálban csatoljuk csak hozzájuk. Ez a két Hamilton-függvény adja együtt a rendszer Hamilton-függvényét.

Az egyensúlyi megoldás érdekében írjuk fel a sajátértékegyenletet:

$$H\Psi = E\Psi$$

A megoldást pedig keressük szorzatfüggvény alakban:

$$\begin{split} \Psi(\underline{R}_{I}, \underline{r}_{i}) &= \underbrace{\varphi(\underline{R}_{I}, \underline{r}_{i})}_{\text{elektron}} \underbrace{\chi(\underline{R}_{I})}_{\text{ion}} \cdot \\ \left[-\sum_{I} \frac{\hbar^{2}}{2M_{I}} \frac{\partial^{2} \chi}{\partial \underline{R}_{I}^{2}} + V_{I} \chi \right] \varphi + \left[-\sum_{I} \frac{\hbar^{2}}{2M_{I}} \left(2 \frac{\partial \chi}{\partial \underline{R}_{I}} \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{R}_{I}} + \chi \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial \underline{R}_{I}^{2}} \right) \right] + \\ + \left[-\sum_{i} \frac{\hbar^{2}}{2m_{e}} \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial r_{i}^{2}} + v_{e} \varphi + v_{ei} \varphi \right] \chi = E \chi \varphi \end{split}$$

Az első tag tehát az ionok terében az elektronok problémája (rácsprobléma), a második az elektronok-fononok kölcsönhatási problémájára vezet (Fonon: kvázirészecske, szilárd testek rezgési átmeneteinek energiakvantumai^[3]). A harmadik tag az elektron probléma. Most csak az elektronproblémát, azaz az harmadik tagot tárgyaljuk. Írjuk fel (sok) elektronra az elektronproblémát, álló ionok terében:

$$\mathcal{H}\varphi = E\varphi.$$

1 elektronra: $\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m_e} + V(\underline{r})$

Sok elektronra:
$$\mathcal{H} = -\sum_{i}^{\infty} \frac{\hbar^2 \Delta_i}{2m} + \sum_{i} V(\underline{r}_i) + \sum_{i < j} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{|r_i - r_j|}$$

Itt az első tag az elektronok kinetikus energiája, második az ionok által keltett fix külső potenciál, a harmadik tag az elektronok saját Coulomb-potenciálja. \mathcal{H} -nak invariánsnak kell lennie a rácsperiódusú eltolásra:

$$\mathcal{H}(\underline{r} + \underline{R}_n) = \mathcal{H}(\underline{r})$$

Ez akkor teljesül, ha:

$$\varphi(\underline{r} + \underline{R}_n) = e^{i\underline{k}\underline{R}_n}\varphi(\underline{r})$$

Ez a Bloch-tétel, ami pedig végeredményül kijött, azt Bloch-függvénynek nevezzük. Vagyis az elektron hullámfüggvénye tükrözi a rács szimmetriáit.

A fentiek csak degenerált esetben érvényesek. Nem degenerált esetben az eltolásnál gond van a skalárszorzással, így más módszert kell alkalmaznunk (főtengelytranszformációt), de így is megkapjuk végeredményül a Bloch-függvényt.

Röntgen- és elektrondiffrakció. Diffrakció, kinetikus elmélet. Ewald-szerkesztés. Bragg-feltétel.

Röntgen-diffrakció

(a) Röntgencső

Karakterisztikus és fékezési sugárzás; Sok fékezési sugárzás, kicsi az energia.

$$\mathbf{eU} = \hbar\omega = \hbar\mathbf{ck} = \frac{\hbar\mathbf{c}}{\lambda}$$





(b) Szinkrotronsugárzás

Az elektronokat fölgyorsítjuk, majd "megrázzuk" (csak fékezési sugárzás lesz)

Előnye a röntgencsőhöz képest, hogy monokróm és nagy intenzitás, de nagy a mérete és drága.

Észlelés: fotólemez, számlálócső, CCD, Imaging Plate



Elektronok

Elektronokkal is lehet diffrakciót létre hozni, és ezt vizsgálni (hasonló eljárássokkal, mint a röntgen-diffrakciót), viszont pontosabb és célravezetőbb, ha *elektronmikroszkópot* használunk anyagvizsgálatra:



Elektronmikroszkóp vázlata

$$eU = \frac{p^2}{2m}; \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

Leképezés: $\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f}$, ha k=f, akkor diffrakció van.

Röntgenhez képest hátrány:

- A lencserendszer miatt numerikus apertúra: $10^{-4} - 10^{-5}$ (ami elég rossz)

- bonyolult mintapreparáció

- feltöltődik a nemfém minta, elektron erősen kölcsönhat az atommal (erős rugalmas és rugalmatlan szórás)

- nem elég pontos pl. rácsparaméterek mérésére

Előny:

- sokmindent látni vele
- szűkíthető látótér
- korlátozott területű diffrakció valósítható meg

Szórás kinetikus elmélete

Röntgen sugárzás esetén →Thomson-szórás

(1) Rugalmas szórás: λ változatlan, $E_{ki} = E_{be}$

- (2) Koherens
- (3) Gyenge szórás: egyenes szórások...

Fraunhofer interferencia:

A bemenő-kimenő hullámszám = $\rho(\underline{r})$: ha nagy, nagy a szóródás; ha kicsi, kicsi a szóródás az adott pontban. (Röntgennél elektron-sűrűség, el.-mikroszkópnál el.- pot. sűrűség, neutronnál magsűrűség). A fáziskülönbség:



$$\underline{k}_{0}\underline{r} = |\underline{k}_{0}|s_{1} = \frac{2\pi}{\lambda}s_{1} \quad ; \quad \Delta s = s_{1} - s_{2}$$
$$\underline{k}\underline{r} = |\underline{k}|s_{2} = \frac{2\pi}{\lambda}s_{2} \quad ; \quad \Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(s_{1} - s_{2})$$
$$\Delta \varphi = (\underline{k}_{0} - \underline{k})\underline{r} \longrightarrow A(\underline{k}) \simeq \int \rho(\underline{r})e^{i(\underline{k}_{0} - \underline{k})\underline{r}}d^{3}r$$

A(k) a szóródás, nem tudjuk mérni. A fenti integrál a sűrűségfv Fourier-transzformáltja.

Intenzitás: $I(\underline{k}) = |A(\underline{k})|^2$

Bevezetjül az **Ewald-szerkesztést**: reciprokrácson berajzoljuk a beeső nyaláb k vektorát, majd húzunk a k vektor kezdőpontjából egy lkl sugarú gömböt, ez az *Ewald-gömb*.



Jelölés: \underline{R}_n - rácsvektor; \underline{K}_n - reciprokrácsvektor

Mindezt felhasználva, a kristályos anyag elhajlási képe:

$$\begin{split} A(\underline{k}) &= \int \rho(\underline{r}) e^{i\left(\underline{k}_{0}-\underline{k}\right)\underline{r}} d^{3}r \quad ; \quad \rho(\underline{r}) = \rho(\underline{r}+\underline{R}_{n}) = \rho(\underline{r}') \\ \text{A fentickből:} \ A(\underline{k}) &= \int \rho(\underline{r}') e^{i\left(\underline{k}_{0}-\underline{k}\right)(\underline{r}'-\underline{R}_{n})} d^{3}r = e^{i\left(\underline{k}_{0}-\underline{k}\right)\underline{R}_{n}} \int \rho(\underline{r}) e^{i\left(\underline{k}_{0}-\underline{k}\right)\underline{r}} d^{3}r = A(\underline{k}) \cdot e^{i\left(\underline{k}_{0}-\underline{k}\right)\underline{R}_{n}} \\ \text{Tehát:} \ A(\underline{k}) \left(1 - e^{i\left(\underline{k}_{0}-\underline{k}\right)\underline{R}_{n}}\right) = 0 \end{split}$$

Azt szeretnénk, hogy A(k) ne legyen 0 (mivel azt keressük). Így a másik tagnak kell 0-nak lennie. Ezekből adódnak a következő tulajdonságok:

$$(\underline{k}_0 - \underline{k}) \underline{R}_n = 2\pi k; \quad (k \in \mathbb{Z})$$

 $\begin{array}{l} -\left(\underline{k}_{0}-\underline{k}\right)=\underline{K}_{n}\\ -A\left(\underline{K}_{n}\right)\neq0\longrightarrow \text{elhajlási irány}\\ -A\left(\underline{K}_{n}\right)=0\longrightarrow \text{kioltás}\\ -A\left(nem\underline{K}_{n}\right)=0\longrightarrow \text{teljesülnie kell, különben nincs interferencia}\end{array}$

Bragg-feltétel

Az Ewald-szerkeztésből tudjuk, hogy $(\underline{k}_0 - \underline{k}) = \underline{K}_n$ Továbbá tudjuk, hogy $\measuredangle (\underline{k}_0 \underline{k}) = 2\vartheta$ Tehát: $\underline{K}_n = 2|\underline{k}_0|\sin\vartheta$

Az ábra alapján pedig látható, hogy: $2\frac{2\pi}{\lambda}\sin\vartheta = \frac{2\pi}{d}n$ Amelyből átrendezéssel kapható a *Bragg-feltétel:* $2d\sin\vartheta = n\lambda \longrightarrow$ erősítés csak ebben az esetben lesz!



Különbség az elektron- és röntgendiffrakció között

A mai korszerű mikroszkópokban az elektronok energiája kb. 300keV, az elektronok hullámhossza $2.2 \cdot 10^{-3} nm$, ami nagyságrendekkel kisebb, mint a szokásos röntgenhullámhosszak. Ennek az a következménye, hogy a reciproktérban az Ewald-gömb sugara jóval nagyobb, így a Bragg-szög kicsi. A reciprokrács helyén az Ewald-gömb síknak tekinthető, ezért az elektrondiffrakciós felvételeken mindig a reciprokrács egy síkmetszetét láthatjuk, ellentétben a röntgendiffrakcióval, ahol a diffrakció képen köröket, illetve körszeleteket látunk. Azt, hogy tényleg több pont legyen diffrakciós helyzetben, az elektronmikroszkóp esetében az biztosítja, hogy a minta vékony, ezért a rácspontok Fourier-térbeli képe kiszélesedik(végtelen rácsnál lenne az pontszerű). Ez a kiszélesedés a röntgendiffrakciós képen két kör metszéspontja lesz(hiszen a kristályok minden irányba orientáltak, így a reciprokrács is "velük forog"), vagy nem monokromatikus forrást használnak(Laue-elrendezés), hanem folytonos spektrumút, így a különböző hullámhosszak küllönböző rácsvektorokat hoznak diffrakciós helyzetbe.

Rácsrezgések termikus hatásai.

Debye-féle fajhő

A rács termikous rezgéseit alacsony hőmérsékleten az Einstein-modell nem írja le elég jól, hiszen ez a modell minden atomot független oszcillátornak tekint. (Ezen számítások alapján az összenergia exp 0-hoz kellene, hogy tartson)

Másik megközelítésben a rács normálrezgéseit a <u>k</u>hullámszám-vektorral komponenseivel írjuk le. MInden részecskéhez hozzárendelhető egy ilyen vektor, és minden értékhez tartozik 3 módus (melyeknek más a polarizációs irányuk és ortogonálisak). Tehát egy N részecskéből álló redszerben 3N rezgési módus van (leszámítva a test mozgásából adódó 6 szabadsági fokot), melyeknek energiái kvantáltak ($E_k = n_k \hbar \omega_k$).

Foton: az elektromágneses sugárzási tér energiakvantuma.

Fonon: a kvantált rugalmas hullám vagy rácsrezgés energiakvantuma (a fotonhoz hasonlóan definiálva).

Debye-közelítésben ω_k és <u>k</u>között a kapcsolatot nem a dinamikai összefüggésekből határozzuk meg, hanem a makroszkópikus kristály mozgásegyenletéből.

A belső energia várható értéke a következőképp adható meg: $\left(\beta = \frac{1}{kT}\right)$

$$\langle E \rangle = E_0 + \sum_i \frac{h\omega_i}{e^{\beta\hbar\omega_i} - 1} = E_0 + \int \frac{h\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} D(\omega)d\omega$$

 $\hbar\omega_D = kT_D$, ahol T_D a Debye-hőmérséklet.



Hővezetés

A hővezetőképesség definíció szerint:

 $Q = \kappa rac{\partial T}{\partial x}$, ahol Q - a termikus energiaáram

 κ - a hővezetőképességi együttható

$$\frac{\partial T}{\partial r}$$
- a hőmérsékletgradiens

Tehát a termikus energia terjedése sztochasztikus folyamat és diffundálva terjed.

A kinetikus-gázelmélet alapján:

$$\kappa = \frac{1}{3}Cu\Lambda$$
, ahol

C - az egységnyi térfogatra eső fajhő

u - a részecske átlagsebessége

 Λ - részecske szabad úthossza (két ütközés között)

Debye ezt az összefüggést szilárd dielektrikumokra alkalmazta. Ekkor C a rácsrezgésekből (fononokból) adódó fajhő, u a hang terjedési sebessége és Λ a fononok szabad úthossza.

(pl a vákuum rövid távon rossz, hosszútávon jó hővezető)

Hőtágulás

A hőtágulást a (potenciális energiában szereplő) nem lineáris tagok hozzák létre. (Pl: A kvarc erősen lineáris anyag – kevésbé hőtágul)

Az ábráról jól látható: ahogy nő a hőmérséklet, jobban rezegnek a részecskék, megnő az energia és így eltolódik a középpont, tehát távolabb kerülnek egymástól a részecskék. Ez a hőtágulás.



- [1] Wikipédiáról: http://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice
- [2] Képforrások: Kojnok József Kondenzált anyagok fizikája gyakorlat fóliáiból (http://szft.elte.hu/~kojnok/szilfiz/szilfiz_gy.htm)
- [3] Fonon: http://hu.wikipedia.org/wiki/Fonon

Záróvizsga tematika

 Tételek
 A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktul megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszerkezet | A magfizika alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok | Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

Nemegyensúlyi folyamatok leírása

Irreverzibilis folyamatok

Az irreverzibilis folyamatokban fontos szerepet játszanak az intenzív fizikai mennyiségekkel (hőmérséklet, nyomás, elektromos potenciál) kapcsolatos hajtóerők. Ezek megfigyelésével vizsgálhatjuk a nyílt rendszerek időfüggő energetikai folyamatait, illetve választ adhatunk arra is, hogy egy folyamat miért gyors vagy lassú.

Egy tetszőleges termodinamikai rendzser entrópiaváltozása két tagból tevődik össze: egy külső forrásból eredő (ΔS_k) és egy belső entrópiaváltozással kapcsolatos (ΔS_b). A belső entrópia változás nem a környezettel való energiacserével kapcsolatos, hanem a rendszerben lejátszódó termodinamikai folyamatok következménye. Irreverzibilis folyamatban a belső entrópia értéke mindig nő (reverzibilisnél állandó).

Nyílt rendszerre általában igaz, hogy a belső entrópia nő, de csökkenhet is. Nagyon fontos az irreverzibilis folyamatokban az idő, jellemzően a mennyiségek időderiváltjai fizikai jelentést hordoznak.

Entrópiaprodukciónak nevezzük a belső entrópia időbeli változásának gyorsaságát, vagyis:

$$\sigma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_b}{\Delta t} = \frac{dS_b}{dt}.$$

Az időegység alatti belsőentrópia-változás mértékegysége J/(K * s).

Az entrópia megváltozásának teljes egyenlete:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + dS_{sp} + \frac{\delta W_{irr}}{T}$$
, and

 δQ_a hőváltozás, dS_{spa} spontán entrópiaváltozás (mindig nagyobb 0-nál), δW_{irraz} irreverzibilis folyamat alatt végett munka, T a hőmérséklet.

Pl.: Ha veszünk egy zárt rendszert (két kamra: egyikben gáz, másikban vákuum) és elvesszük a falat, akkor a gáz kitölti a másik térrészt is. Ekkor: Q=0, W=0, $\Delta S > 0$!!

A lényeg, hogy a rendszer önmagával legyen egyensúlyban. A fenti egy spontán irreverzibilis folyamat (kvázisztatikus rendszer folyamat). Egy ilyen során az entrópia keletkezik. Tehát az entrópia nem marad meg, de csak keletkezni "szeret".

További példás spontán S termelődésre (ha zárt rsz. nincs egyensúlyban, akkor S nőni fog):

Pl. Gay-Lussac-kísérlet: vákuummal szembeni tágulás: $\Omega(E, V, N) \rightarrow V_{n\delta} \Rightarrow \Omega_{n\delta} \Rightarrow S_{n\delta}...$

Pl2. Eltérő hőmérsékletű tartályok: $E_{ossz} = E_1 + E_2 \implies \Omega(E_1) = \Omega_1(E_1)\Omega_2(E_{ossz} - E_1)$ ekkor Ω eléri a max értéket és S spontán nőni fog...

Master egyenlet, részletes egyensúly.

megjegyzés: a jobb olvashatóság érdekében az ábrán szereplő: n'=m

Van egy rendszerünk, aminek van n diszkrét állapota, amik között ugrál.

- $p_n(t)$: annak a valószínűsége, hogy a rendszer az n-edik állapotban van.
- Tegyük fel, hogy tudom, hogy egységnyi idő alatt mi annak a valószínűsége, hogy a rendszer n-ből m állapotba megy át.

Ennek jelölése: w_{mn} . Nem tudunk róla semmit, de tegyük fel, hogy ismerjük az értékét.

• Tegyük fel, hogy az átmenetek folyamata Markov-folyamat, tehát létezik olyan Δt , hogy már csak a t mondja meg, hogy mi történik $t + \Delta t$ -ben. (És tegyük fel, hogy az átmenetek megvalósulnak.)

Ekkor:

$$p_n(t + \Delta t) = p_n(t) - \sum_{m \neq n} w_{mn} \Delta t p_n(t) + \sum_{m \neq n} w_{nm} \Delta t p_m(t)$$

Azt szeretnénk megtudni, mekkora valószínűséggel lesz a rendszerünk az n. állapotban $t + \Delta t$ időpillanatban. Ez szerepel az egyenlet bal oldalán.

A jobboldalon a következő tagok állank:

- 1. tag: Annak valószínűsége, hogy már t időpillanatban is az n. állapontban volt a rendszer (ezt ismertnek tekintjük)
- 2. tag: Annak valószínűsége, hogy t időpillanatban az n. állapotban volt, és Δt idő múlva ellépett onnan (ezért levonjuk)
- 3. tag: Annak valószínűsége, hogy t időpillanatban az másik állapotban volt, de Δt idő múlva az n. állapotba került.

(*Wmnés Wnmegységnyi időre vonatkozik*)

Sorba fejtek
$$\Delta t$$
körül, így $p_n(t + \Delta t) = p_n(t) + \frac{\partial p_n}{\partial t} \Delta t$

Ezt felhasználva $p_n(t)$ kiesik, majd Δt -vel egyszerűsíthetünk. Ami marad::

$$\left| \frac{\partial p_n}{\partial t} = -\sum_m w_{mn} p_n(t) + \sum_m w_{nm} p_m(t) \right|^{\text{A Master-egyenlet diszkrét állapottérben}}$$

Ennek kell, hogy legyen stacionárius megoldása, amihez relaxál: ($p_n^{(e)}$ - egyensúlyi valószínűség)

 $p_n^{(e)} = \frac{1}{2}e^{-\beta E_n}$, ahol E_n az n-edik állapot energiája.

Ha ezt helyettesítem be, akkor a bal oldal 0 lesz.

Vizsgáljuk ezt egy egyszerű példán keresztül: bináris atomok rendszere.

Két energiaszint lehetséges: ϵ_{+} (ilyen atomok száma $p_{+}(t)$), ϵ_{-} (ilyen atomok száma $p_{-}(t)$).

Az átmenetek valószínűsége: $+ \rightarrow - \mu; - \rightarrow + \nu$.

Írjuk fel egy későbbi időpontban az ϵ_{+} energiájú atomok számát: $p_{+}(t + \Delta t) = p_{+}(t)(1 - \mu \Delta t) + p_{-}(t)\nu \Delta t$.

A jobb oldal első tagja adja meg, hány részecske nem váltott állapotot, míg a második tag azt, mennyi váltott.

Némi átrendezés után $\frac{p_+(t+\Delta t)-p_+(t)}{\Delta t} = \frac{dp_+(t)}{dt} = -\mu p_+(t) + \nu p_-(t) (= -\frac{p_-(t)}{dt}).$ Tételezzük továbbá fel, hogy normált az eloszlás: $p_+(t) + p_-(t) = 1$. A stacionárius megoldás a normáltsági feltétellel a következőre vezet: $p_+ = \frac{\nu}{\mu + \nu}$ $p_- = \frac{\mu}{\mu + \nu}$.

Beírva a Boltzmann-faktort, a stacionárius megoldás: $p_{+} = \frac{e^{-\beta\epsilon}}{e^{-\beta\epsilon} + e^{\beta\epsilon}}, \quad p_{-} = \frac{e^{\beta\epsilon}}{e^{-\beta\epsilon} + e^{\beta\epsilon}}.$

A kettő arányára pedig fennáll a következő: $\frac{p_+}{p_-} = e^{-2\beta\epsilon} = \frac{\nu}{\mu}$

- Tegyük fel, hogy meg tudom úgy adni az átmeneti valószínűségeket, hogy a rendszer beugorjon az egyensúlyi állapotba.
- · Hogyan kell megválasztani az átmeneti valószínűségeket?

Az átmeneti valószínűségek megválasztása

• Egyensúlyban időtükrözési szimmetria van.



Számolom, hogy (irány szerint megkülönböztetve) hányszor megy egyikből a másik állapotba a rendszer.

• Stacionárius állapotban Δt idő alatt az átmenetek száma:

r

n-ből m-be menve:
$$w_{mn}p_n^e$$

n-ből n-be menve:
$$w_{nm}p_m^c$$

• A részletes egyensúly elve azt mondja ki, hogy a két számnak meg kell egyeznie, azaz:

 $w_{mn}p_n^e = w_{nm}p_m^e$ Megkötés az átmeneti valószínűségek hányadosára

Ha az állapotok száma véges és a rendszer minden pontjából minden másik pontjába el tudok jutni, akkor egyetlen stacionárius állapot lesz, az egyensúlyi.

 $\frac{C_{\text{sak}}}{w_{nm}} = \frac{a^{-\beta(E_m)}}{e^{-\beta(E_n)}} = \frac{e^{-\beta(E_m - E_n)}}{1} = \frac{1}{e^{-\beta(E_n - E_m)}}$ hányadosára van megkötés, azaz:

Ha $E_m - E_n = \Delta E_{nm} > 0$ (azaz az energia nő), az e-ados tag 1-nél kisebb lesz, tehát vehetem azt az átmeneti valószínűségnek. Ha csökken az energia, akkor az energiacsökkenés felé vivő lépést 1 valószínűséggel lépem meg.

Bizonyítás: $\partial_t p_n(t) = -\sum_m w_{mn} p_n(t) + \sum_m w_{nm} p_m(t) = 0_{\text{(egyensúly esetén).}}$ Tehát: $0 = -\sum_m (w_{mn} p_n^e - w_{nm} p_m^e)_{\text{Páronként kioltják egymást.}}$ Ezért hívják részletes egyensúlynak, mivel nem csak az egész összeg nulla, hanem az állapotok között páronként van egyensúly. (Ehhez egy összefüggő gráf kell)

Entrópia és szabadenergia

Ide még jön egy szemléletesebb magyarázat az entrópiára (pl másik tételben is szerepel.) Cz

Tulajdonképpen valószínűleg ide a Bércesék által írt Mechanika II.-ből a 550-552 oldal környéke a legrelevánsabb. 94.27.225.23 2009. június 22., 09:14 (UTC)

Irreverzibilis folyamatok

Ha egy rendszert például master egyenelttel írunk le, abból is levezethető az entrópia és a szabadenergia. Az entrópia triviálisan felírható az állapotok valószínűségeiből:

$$S = -\sum_{i} p_i \log_2(p_i)$$

Ebből pedig a szabadenergia:

$$F = \sum_{i} p_i E_i - T \cdot S$$

Az irreverzibilis szabadenergia mindig nagyobb, mint a reverzibilis folyamatokban. Az entrópiára pedig továbbra is a második főtétel alkalmazható.

Ismétlésül:

A termodinamikai entrópia fogalma: $\delta Q = T \delta S$, ahol Q a hő (azaz két különböző hőmérsékletű rendszer közötti spontán energiacsere), dS pedig az entrópiaváltozás. Átrendezve: $\delta S = \frac{\delta Q}{T}$

Állapotjelzők:

extenzív (összeadódik): n, belső energia, V, S intenzív (kiegyenlítődik): p, T, μ A Termodinamika első főtétele: $dU = \delta Q - \delta W + \mu dN$ (egy komponensű elegyre)

A Termodinamika második főtétele: $\delta Q = TdS$; $\delta W = pdV$ Fundamentális egyenlet az előző kettőből: $dU = TdS - pdV + \mu dN$ *Termodinamikai Potenciálok*: Alapvető skalár potenciálok, természetes változóikban állandó rendszer esetén minimumra törekszenek, azaz egyensúlyban minimálisak. U, F, H, G négy termodinamikai potenciál:

- * A szabad energia definíciója: F = U TS
- * Az entalpia definíciója: H = U + pV
- * A szabad entalpia definíciója: G = U + pV TS = H TS

A belső energiára vonatkozó fundamentális egyenletből Legendre transzformációval további Fundamentális egyenletek kaphatóak. Pl: $dF=-SdT-pdV+\mu dN$

A Boltzmann-féle entrópia definíciója: $S = k_B ln \Omega(E)$, ahol $\Omega(E)$ a mikroállapotok száma.

Kanonikus tárgyalásmódban az állapotösszeg: $z=\sum_m e^{-eta E_m}$

Ezt, az első fundamentális egyenletet és a Boltzmann-entrópi definícióját felhasználva: $F=-k_BT\ln z$

További
$$\partial \tilde{g}$$
űrűn használato ∂U származtatható összeföggések:
 $U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln z; \quad c_V = \frac{\partial U}{\partial T}$
Fyggamentálig egyenléggehől: $-\underline{P}.$ $\left(\frac{\partial S}{\partial F}\right)_{V,N} = -S; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = -p; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,T} = \mu$
Ezekből felírható a Helmholtz-egyenlet: $F = U + T \frac{\partial F}{\partial T}$

Ingadozási jelenségek

Brown-mozgás, Diffúzió, Brown-mozgás potenciálban

Alapfeltevések

- 1. A részecskék egymástól függetlenül mozognak.
- 2. $\tau \ll$ megfigyelési idő minimuma (ezen túl a mozgás az előzőektől függetlennek tekinthető)
- 3. Az elmozdulásnak van egy valószínűségi eloszlása. A mozgás leírható valószínűségi alapon. *Jelölések*
- $n\Phi(\Delta)d\Delta$: annak valószínűségét adja meg, hogy n darab részecske Δ -t ugrik τ idő alatt.
- p(x,t)dx: annak valószínűsége, hogy t időpontban alatt x-ben van a részecske.



Az Einstein-féle leírás (1905)

Annak valószínűsége, hogy a részecske τ idő múlva az x és x+dx közötti tartományban foglal helyet:

$$p(x,t+\tau)dx = p(x,t)dx - \int_{-\infty}^{\infty} p(x,t)dx\Phi(\Delta)d\Delta + \int_{-\infty}^{\infty} p(x-\Delta,t)dx\Phi(\Delta)d\Delta$$

Az egyenlet jobb oldalának első tagja annak valószínűsége, hogy a részecske már t időpillanatban is az x és x+dx közötti tartományban volt. A második tag annak valószínűségét adja meg, hogy τ idő múlva éppen arrébbmegy egy bármekkora Δ ugrással másik helyre. A harmadik tag annak valószínűségét adja, hogy a részecske valamekkora Δ távolságról éppen Δ -t ugorva megérkezik τ idő múlva.

Az egyenletet dx-szel végigoszthatjuk hiszen a dx-ek (és a p(x,t) is) mindegyik integráljel elé kiemelhetőek, hiszen nem függnek Δ -tól, ekkor:

$$\begin{split} p(x,t+\tau) &= p(x,t) - p(x,t) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta + \int_{-\infty}^{\infty} p(x-\Delta,t) \Phi(\Delta) d\Delta \\ \text{És mivel } \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta &= 1_{\text{(hiszen }} \Phi(\Delta) d\Delta \text{annak valószínűségét adja meg, hogy egy részecske } \Delta \text{-t} \end{split}$$

ugrik τ idő alatt, aminek a valószínűsége a teljes térre egy kell, hogy legyen - itt jegyzem meg, hogy $\Phi(\Delta) = \Phi(-\Delta)$), ennek következtében a jobb oldal első két tagja kiejti egymást és az egyenlet a következő alakra egyszerűsödik:

$$p(x,t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-\Delta,t)\Phi(\Delta)d\Delta$$
 Chapman-Kolmogorov egyenlet

A fenti egyenletet τ -ban és Δ -ban sorbafejtjük, az alábbiak szerint:

$$p(x,t+\tau) = p(x,t) + \frac{\partial p}{\partial t}\tau + \dots$$
$$p(x-\Delta,t) = p(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x}\Delta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\Delta^2$$
Ekker a käyatkaző agyaplatat került

Ekkor a kovetkező egyenletet kapjuk:

$$p(x,t) + \frac{\partial p}{\partial t}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,t)\Phi(\Delta)d\Delta - \frac{\partial p}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta\Phi(\Delta)d\Delta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2\Phi(\Delta)d\Delta$$

Ugyanazon okok miatt, mint a Chapman-Kolmogorov egyenlet levezetésénél, az egyenlet bal oldalának első tagja és jobb oldalának első tagja kiejti egymást, így a következő marad:

$$\frac{\partial p}{\partial t}\tau = -\frac{\partial p}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta\Phi(\Delta)d\Delta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2\Phi(\Delta)d\Delta$$

A fenti egyenlet jobb oldalán az első tagnál az integrál pont $\overline{\Delta}$ értékét adja meg, míg a második tag integrálját ennek mintájára elneveztük $\overline{\Delta^2}$ -nek. Az egyenlet a következőképp módosul:

$$\frac{\partial p}{\partial t}\tau = -\frac{\partial p}{\partial x}\overline{\Delta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}\overline{\Delta^2}$$

Ám Δ értéke nulla, mivel a $\Phi(\Delta)$ függvényt teljesen szimmetrikusnak tételeztük fel. Tehát a bal oldal első tagja is kiesik. Ami marad:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\overline{\Delta^2}}{2\tau} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

et D-nek (azaz diffúziós együtthatónak) elnevezve megkapjuk a **diffúziós egyenlet** általános alakját, mely: 2τ

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \left[\begin{array}{c} \text{Dinamikai egyenlet a } \underline{valószínűség} \ \text{időbeni változására (más néven a } \underline{Fokker-Planck egyenlet}) \right] \right]$$

A Fokker-Planck egyenlet megoldásának keresése

A következőkben a Fokker-Planck egyenlet megoldását kerestük a t = 0, x = 0 kezdőfeltételekhez.

Ekkor ha $p(x, t = 0) = \delta(x)_{akkor}$ ebből a megoldás:

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} (3D\text{-ben az 1/gyök-ös rész a 3/2-en van.})$$

A fentiek alapján $\langle x^2 \rangle$ értékére az alábbi összefüggés születik, ahol λ -t konstansnak várjuk:

$$\langle x^2 \rangle = \lambda Dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} x^2 e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx_{\pm} \frac{4Dt}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy$$

az utolsó egyelőségnél változó helyettesítés történt: $y = \sqrt{4Dt}$

Az integrál értéke innen ${}^{[1]} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ így: <
 $x^2 >= 2 D t$ (azaz $\lambda=2$)

Sodródás, Brown-mozgás potenciálban:

A részecskék ebben az esetben valamilyen kitüntetett irányba sodródnak: $\Phi(\Delta)
eq \Phi(-\Delta)$ Az előzőekhez képest annyi a különbség, hogy a következő tag:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Delta\Phi(\Delta)d\Delta=\overline{\Delta}\neq 0$$

Ismét alkalmazva a Kramers-Moyal sorfejtést:

$$\begin{split} p(x,t) &+ \frac{\partial p}{\partial t} \tau = p(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta \Phi(\Delta) d\Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \Phi(\Delta) d\Delta \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\overline{\Delta}}{\tau} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \end{split}$$

 $(\overline{\Delta}, \overline{\Delta^2}$:mikroszkopikus hossz, τ :mikroszkopikus idő.)

Ez is a Fokker-Planck egyenlet egy alakja. A fenti egyenlet jobb oldalán az első tag önmagában egy driftet ír le: $\frac{\partial p}{\partial t} = -v \frac{\partial p}{\partial x}$, ahol $v = \frac{\overline{\Delta}}{\tau}$



Például: $p(x,t) = \tilde{p}(x - vt)$. A fenti egyenletbe behelyettesítve és elvégezve: $-v\tilde{p}' = -v\tilde{p}'$ Viszont érdemes megtartani a második tagot, hiszen ha ezt is figyelembe vesszük, akkor azt kapjuk, hogy a "csomag" halad valamerre és közben szétterjed:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -v\frac{\partial p}{\partial x} + D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Bevezetve az y := x-vt -t (vagyis "beleülünk" a driftelő rendszerbe), akkor $\tilde{p}(x - vt, t) = \tilde{p}(y, t) = p(x, t)$. Ekkor a Fokker-Planck egyenlet a következőképp múdosul:

$$-v\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -v\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + D\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y}$$
Vagyis visszakapjuk a drift nélküli összefüggést: $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y}$
Tehát: $\tilde{p}(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{y^2}{4Dt}} \longrightarrow p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}$

Langevin-egyenlet

Brown-mozgásra az általános Langevin-egyenlet: $m\ddot{x} = -6\pi\tilde{\eta}\dot{x}a + X - \frac{\partial U}{\partial x}$, ahol

- η
 - a viszkozitás
- a a részecske sugara
- X egy véletlenszerű erő

$$\partial U$$

• $\frac{\partial U}{\partial x}$ - egy külső erő (potenciál)

Ha *túlcsillapított* esetet vizsgálunk, akkor $0 = -6\pi \tilde{\eta} \dot{x} a + X - \frac{\partial U}{\partial x}$

Ekkor bevezetve a zajt - $\eta = \mu X$ - fogalmát és a $\mu = \frac{1}{6\pi \tilde{\eta} a}$ jelölést, az egyenlet a következőképp fog kinézni:

$$\dot{x} = -\mu \frac{\partial U}{\partial x} + \eta$$

Bevezetve még a $v(x) = -\mu \frac{\partial U}{\partial x}$ jelölést:

 $\dot{x} = v(x) + \eta_{\text{lesz}}$ a végleges forma.

Ebből jól látni, hogy túlcsillapított esetben az elmozdulás a v(x)determinisztikus sebesség és az η zaj összege. Ha feltételezzük, hogy a zaj Gauss-eloszlású, és meghatározzuk az adott helyen tartózkodás valószínűségét, akkor megkapjuk a "driftet tartalmazó" Fokker-Planck egyenletet (lsd. feljebb)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -v\frac{\partial p}{\partial x} + D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Bevezetve a valószínűségi áramot: $J = vp - D\frac{\partial p}{\partial x}$, egyensúlyi esetben (J=0) megkapjuk a Boltzmann-eloszlást:

$$P_e = Ce^{-\beta U} \qquad (\beta = \frac{1}{k_B T})$$

Vezetési jelenségek

Drude modell

Az elektromos vezetés jelenségét úgy tekintjük, hogy az elektronok az elektromos tér hatására gyorsulnak, azonban a vezető helyezkötött atomtörzseinek ütközve energiát veszítenek. Ez igen hamar makroszkópikus egyensúlyhoz vezet, ha a tér nem változik. Ezek a feltevések az alapjai a Drude-modellnek, amelynek eredménye az elektronokra felírható mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = eE - m\frac{1}{\tau}v$$

amelynek stacionárius megoldása:

$$m\frac{1}{\tau}v = eE$$

Itt τ az ütközések között eltellő jellemző relaxációs idő, *v* a drift sebesség. A *v*-re rendezett eredményt a töltéssel (e) és az elektronsűrűséggel (n) beszorozva megkaphatjuk az Ohm-törvényt:

$$j = \frac{ne^2\tau}{m}E$$

azaz az elektromros áramsűrűség egyenesen arányos a térerősséggel, az arányossági tényező a fajlagos ellenállás reciproka, azaz a fajlagos vezetőképesség. A Drude-moell jó leírást ad több effektusra, azonban például az áram hőhatását túlbecsli. Kevés jó modell van az elektronok ütközésének leírására, ez a terület ma is aktív kutatás tárgya.

Kereszteffektusok

(* A levezetés csak a kitekintés kedvéért szerepel)

A kereszteffektusok bevezetéséhez a nemegyensúlyi statisztikus fizika eszköztárához kell fordulnunk. Ebben a tárgyalásban most a vezetési jelenségekre korlátozódva jellemezze a vizsgált rendszerünket az f betöltési függvény, amely a pozíció, idő, és a hullámvektor függvénye. Írjuk fel a teljes idő differenciát, amely a Liouville-tétel értelmében zérus:

$$0 = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}} - X$$

itt X az ütközések miatti változást jelöli. A felírt egyenlet lényegébena Boltzmann-egyenlet, csak impulzus helyett hullámszámra felírva. A következő feltevéseket tehetjük:

• Egyensúlyban a betöltést a Fermi-Dirac statisztika írja le:

$$f_0(r,k) = \frac{1}{e^{\beta(E(k)-E_F)}+1}$$

vigyázat, β -ban T függhet a helytől is.

- A perturbációk időfüggését elhanyagoljuk, azaz f időderiváltja zérus.
- A rendszerben hullámcsomagokat akarunk leírni. Jó leírást kapunk, ha a sebességre a csoportsebességet vezetjük be:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{k}}$$

• Az impulzusmegváltozással analóg tagra írjuk be a klasszikus elektromágneses erőhatást:

$$\dot{\mathbf{k}} = \frac{e}{\hbar} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)$$

• Az ütközési tagra tegyük azt a durva közelítést, hogy az egyensúlytól való eltéréssel egyenesen, és a relaxációs idővel fordítottan arányos:

$$X = -\frac{f - f_0}{\tau(\mathbf{k})}$$

• Az eloszlásfüggvény helyszerinti gradiense a hőmérséklet függésen keresztül is kifejezhető:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}$$

A fentiek ismeretében a Boltzmann-egyenlet a következő alakra kerül:

$$\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{\hbar}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} = -\frac{f-f_0}{\tau(\mathbf{k})}$$

A deriválásokat egy ${\bf D}$ differenciál-operátorba összevonva az egyenlet:

$$\mathbf{D}f = -\frac{f - f_0}{\tau(\mathbf{k})}$$

Ennek a megoldása felírható soralakban, így különböző rendű korrekciók nyerhetőek:

$$f = f_0 - \tau \mathbf{D} f_0 + (\tau \mathbf{D})^2 f_0..$$

Ezt visszahelyettesítve elsőrendben a következő megoldást kapjuk:

$$f = f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial E} \tau \mathbf{v} \left[\left(\frac{E - E_F}{T} + \frac{\partial E_F}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} - eE \right]$$

A legszembetűnőbb eredmény, hogy a mágneses tér kiesett, azaz csak a magasabb rendű korrekciók függnek tőle. Ha bevezetjük az elektromos áramsűrűséget, és a hőáramsűrűséget:

$$j_e = \frac{e}{4\pi^3} \int_{Bz} \mathbf{v} f d^3 \mathbf{k}$$

$$j_Q = \frac{1}{4\pi^3} \int_{Bz} (E - E_F) \mathbf{v} f d^3 \mathbf{k}$$

és bevezetve egy egyesített potenciált: $\mu = E_F + e\Phi$, megkaphatjuk az áramokra vonatkozó egyenleteket:

$$j_e = L^{11} \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{r}} + L^{12} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}$$
$$j_Q = L^{21} \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{r}} + L^{22} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}$$

Az L együtthatók másodrendű tenzorok, itt most annyi elég róluk, hogy:

- $L^{12} = L^{21}$, ez az Onsager-reláció a termodinamikában,
- Mindegyikük tartalmazza az egyensúlyi eloszlás energia szerinti deriváltját, és τ -t,
- Az L¹¹tenzor ezen felül az elektromos töltést,
- L^{12}, L^{21} tartalmazza $E E_{F}$ -et,
- L^{22} pedig $(E E_F)^2$ -et.

Ezek segítségével kifejezhetőek a következők:

• Homogén anyagban, homogén hőmérsékleteloszlás esetén visszakapjuk az Ohm-törvényt:

$$j_e = \sigma E, \ \sigma = -eL^{11}$$

• Homogén anyagban, ha nincs elektromos áram visszakapjuk a hővezetés egyenletét:

$$j_Q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}, \ \kappa = \frac{1}{T} \left(L^{22} - L^{12} (L^{11})^{-1} L^{12} \right)$$

és az elektrokémiai potenciál, valamint a hőmérsékletgradiens kapcsolatát:

$$-\frac{\mu_e}{\mathbf{r}} = S\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}, \quad S = \frac{1}{T}(L^{11})^{-1}L^{12}$$

Ezek kombinálásával lehet értelmezni a további effektusokat (ekkor már elhagyható a fenti megkötések egy része):

- Seebeck-effektus: a hőmérsékletkülönbség elektromos áramot hoz létre.
- Peltier-effektus: két fém határfelületén átfolyó áram hőmérsékletkülönbséget hoz létre a két fémen.
- Thomson-effektus: áram alatt levő vezető, amelyen hőmérsékletkülönbség van, lehűl, vagy felmelegszik.

Ezen effektusok arányossági tényezői között fennáll a következő két Thomson-összefüggés:

$$\Pi = T \cdot S$$
$$\mu = T \frac{dS}{dT}$$

ahol T a hőmérséklet, Π a Peltier-együttható, S a Seebeck-együttható és μ a Thomson-együttható.

Az eloszlásfüggvény további korrekcióinak figyelembevételével megkaphatjuk a másodrendű effektusokat, akkor már a mágneses hatás is beleszól a folyamatokba. Ezek közül a legjelentősebb a Hall-effektus. Itt elektromos áram, és rá merőleges mágneses tér hatására az előző kettőre merőleges elektromos potenciálkülönbség alakul ki a vezetőben.

Záróvizsga tematika

 Tételek
 A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktul

 megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és

 magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A

 kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszerkezet | A magfizika

 alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok |

 Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

Hivatkozások

 $[1] \ http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_integrals_of_exponential_functions \#Definite_integrals_of_exponential_functions \#Definite_integrals_of_exponential_functions \#Definite_integrals_of_exponential_functions \#Definite_integrals_of_exponential_functions \#Definite_integrals_of_exponential_functions \#Definite_integrals_of_exponential_functions #Definite_integrals_of_exponential_functions #Definite_integrals_of_exponential_functions_of_exponential_functi$

Az asztrofizika alapjai

Newton-féle gravitációs erőtörvény

A gravitáció négy alapvető kölcsönhatás egyike az univerzumban, és az egyetlen amely a nagyskálás szerkezetet meghatározza. A legkorábbi kvantitatív megfogalamzása Newton-hoz köthető:

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{M_1 M_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

azaz az elektrosztatikus Coulomb-törvényhez hasonló alakú, reciproknégyzetes lecsengésű erő, amely azonban csak vonzó formában ismert. A Newton-i erőtörvény igen jó leírását adta a gravitációs jelenségeknek, a kevés hiányosságot Einstein általános relativitáselmelete pótolta. Ez utóbbi határeseteként tartalmazza a Newton-i erőtörvényt.

Az ősrobbanás elmélet alapvető feltevései

A Big Bang modell a kozmológia Standard modellje. Elsősorban megfigyelésekre és az általános relativitáselméletre épül.

- Az univerzum megfigyelések szerint nagy skálán (100 MPc felett) homogén (az anyag eloszlása egyenletes), erre alapul a kozmológiai elv, vagyis az a feltételezés, hogy univerzum homogén és izotrop.
- Megfigyelések szerint az univerzum tágul (a Hubble-törvénynek megfelelően), ha ezt a folyamatot időben megfordítjuk, akkor eljutunk az ősrobbanás alap gondolatához.

Az ősrobbanás modelljének legfontosabb bizonyítékai:

- Hubble-törvény
- Könnyű elemek előfordulási gyakorisága (75% H és 25% He)
- Kozmikus háttérsugárzás

Friedmann-egyenletek szemléletes értelme

Az univerzum tágulásának tárgyalásakor elengedhetetlen az általános relativitás elmélet kereteiben történő tárgyalás. Tömören összefoglalva a tér-idő távolságokat magábanfoglaló ívelemnégyzet (lásd itt) függ a helytől, és ez a függés kapcsolatban van a tömegekkel. A helyfüggést leíró görbületi tenzor, és az anyag állapotegyenletét magábanfoglaló feszültségtenzor között az Einstein-egyenletek teremtenek kapcsolatot. Ha az univerzum homogén és izotróp, akkor a Robertson-Walker metrika használható, ahol a tágulást egy skálafaktorral (a) jellemezzük az ívelemben:

$$ds^2 = a(t) \cdot ds_3^2(k) - dt^2$$

itt $ds_3^2(k)$ a háromdimenziós ívelemnégyzet függ a térkoordinátáktól, ami különböző geometriájú unierzumoknak felel meg, ezeket *k* paraméterezi. A fenti ívelemmel az univerzum tágulását leíró Friedmann-egyenletek homogén, izotrop közelítésben:

$$H^{2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^{2}}{a^{2}} + \frac{\Lambda c^{2}}{3}$$
$$\dot{H} + H^{2} = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^{2}}\right) + \frac{\Lambda c^{2}}{3}$$

Ezek a kozmológia alapegyenletei. H a Hubble-paraméter, amely az univerzum tágulását jellemzi és aminek a mai értéke a Hubble-konstans, G a gravitációs konstans, Λ a kozmológiai konstans, c a fénysebesség, k az univerzum

görbületét jellemző mennyiség (sík, gömb, vagy hiperbolikus felület). A kozmológiai állandó olyan, hogy pozitív energiasűrűséghez negatív nyomást rendel. Ezzel magyarázzák ma a gyorsuló tágulást, és ezt tartalmazzák a Friedmann egyeletek legjobboldalibb tagjai. Ezért felelős az úgynevezett sötét energia, amiről ma még nem tudjuk, hogy mi is valójában.

ka téridő általános geometriáját adja meg:

- A k = +1megfelel a pozítív görbületű, zárt térnek, mely határtalan, de véges. Az ilyen geometriájú táguló Univerzum két dimenzióban felfúvódó léggömbbel szemléltethető. Az ilyen térben a háromszög szögeinek összege több, mint 180 fok.
- k = -1esetben negatív görbületű, nyílt, végtelen térről beszélünk, melynek kétdimenziós megfelelője a nyeregfelület. Ilyen térben a háromszög szögeinek összege kisebb, mint 180 fok.
- k = 0-nál sík, euklidészi térről van szó.

Az egyenletet átalakítva relativisztikus és nem relativisztikus esetekben a következő arányosságokat kaphatjuk:

a, Relativisztikus esetben (sugárzás dominálta univerzum) felhasználva, hogy a nyomás és a sűrűség között a $p = 3\rho_{\text{összefüggés}}$ áll fenn:

 $ho \propto a^{-4}$ és $a \propto t^{1/2}$

b, Nem relativisztikus esetben (anyag dominálta univerzum) esetén pedig p = 0összefüggés teljesülése mellett:

$$ho \propto a^{-3}$$
és $a \propto t^{2/3}$

Definiálhatjuk az Ω sűrűség paramétert. Ez szemléletesen az univerzum időfejlődését paraméterezi, ha 1-nél kisebb az univerzum örökké tágul, ha 1-el egyenlő akkor a végtelenségig lassul a tágulás, ha nagyobb, akkor egy időután újra összeroppan.

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{krit}} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$$

ahol ρ_{krit} értékét úgy kaphatjuk meg, hogy az első Friedmann egyenletben vesszük a $\Lambda = 0$ és k = 0esetet. Ma úgy gondoljuk, hogy $\rho = \rho_{krit}$, tehát $\Omega = 1$, amit fel lehet írni az univerzum különböző összetevőinek az összegeként:

$$\Omega = \Omega_{radiation} + \Omega_{matter} + \Omega_k + \Omega_\Lambda$$

ahol ma $\Omega_k \simeq 0$, $\Omega_{radiation} \ll 1$, $\Omega_{matter} = 0$, $3_{\text{és}} \Omega_{\Lambda} = 0$, 7. Itt az Ω_{matter} -be tartozik mind a látható, mind a sötét anyag ($\Omega_{darkmatter} = 0, 25$).

Galaxisok kialakulása, morfológiája, Hubble törvény

A galaxisok főleg hidrogénből és héliumból keletkeztek a saját gravitációjuk hatására. Két elmélet létezik:

- Felülről lefelé elmélet: A csillagközi H-ből és He-ból nagy a mai galaxisok méretével összemérhető felhők alakultak ki a saját gravitációjuk miatt, majd ezekben születtek meg a csillagok, amikortól már galaxisnak tekinthetők ezek a képződmények.
- Alulról felfelé elmélet: A csillagközi H és He kis méretű felhőkké állt össze, ezekben születtek az első csillagok. Majd ezek a kis méretű galaxisok ütköztek, és így álltak össze nagy galaxisokká.



A villa nyelén vannak az elliptikus galaxisok E0-tól E7-ig. Itt a számot az ellipszis tengelyeinek hosszából számolják a 10(a - b)/aképlettel. Ez természetesen függ attól, hogy a galaxist milyen irányból látjuk. A fölső és az alsó ágon vannak a spirálgalaxisok. Az alsón az úgy nevezett küllős spirál galaxisok (spiral with bar, innen jön az SB rövidítés), ezeknél a spirál karnak van egy egyenes szakasza a maghoz közel. Az S0 az átmenet az elliptikus és a spirál galaxis között, ezt szokták lencse alakúnak vagy lentikulásrisnak nevezni. A mag/korong arány csökken az Sa-tól az Sc-ig, a karok nyílásszöge és a kontrasztossága pedig nő az Sa-tól az Sc-ig. A Hubble-féle osztályozásba a galaxisok 95%-át be lehet sorolni, a maradék 5% az irreguláris galaxisok. Ilyenek például az ütköző galaxisok, érdekesség, hogy a nagyon messzi galaxisoknak az 50%-a irreguláris.

Hubble-törvény: v = Hrahol H a Hubble-állandó (71 km/s/Mpc). A Hubble-állandó pontos mérése nagyon fontos, mert a Hubble-törvényben szerelő sebességet a vörös eltolódás alapján meg tudják mérni, és így ez alapján lehet egy galaxis távolságát meghatározni. Sokáig viszont nem tudták pontosan megmérni a Hubble-állandót, csak nagyságrendileg tudták meghatározni, ezért azt mondták, hogy H = 100hkm/s/Mpc, és *h*-t meghagyták a képletekben paraméterként.

A HR diagram és a csillagfejlődés szemléletes képe, kompakt objektumok: fehér törpék, neutroncsillagok, fekete lyukak

Ahhoz, hogy egy csillag keletkezzen egy gázfelhőből a sűrűségének meg kell haladnia egy kritikus értéket. Ez történhet úgy, hogy egy szupernova robbanás összenyomja a környező gázt vagy a galaxiskarokban, amik haladó sűrűséghullámok vagy pedig galaxisok ütközésekor. A galaxisok ütközésekor nagyon kicsi annak a valószínűsége, hogy a konkrét csillagok ütközzenek, de a galaxisban lévő gázfelhők ütköznek, és ezekben sok új csillag születhet.

A Hertzsprung-Russel Diagram (HRD) a csillagok hőmérsékletét és a hozzátartozó fényességet szemlélteti. A diagramon kirajzolódó ágak azokat a csillagfejlődési állapotokat mutatják, ahol a csillagok huzamosabb időt eltöltenek. A csillagok fejlődésük során változtatják a helyüket a HRD-n, attól függően, hogy kis (<4 M_{Nap}), vagy nagytömegű (>4 M_{Nap}) csillagokról beszélünk, más-más fejlődési utat járnak be.



A főágon tartózkodó csillagokban H-fúzióval történik az energiatermelés, amikor viszont a a H elfogyott, nehezebb elemek fúziója kezdődik meg, a csillag vörös-óriássá válik, és átkerül az óriás ágra. Ha a H elfogy egy csillagban, akkor a gravitáció összehúzza, így felmelegszik, és ezért beindul a He fúziója is, majd ha az is elfogy akkor ugyanúgy a gravitáció összehúzza, és beindulnak a magasabb elemek fúziója is egészen a vasig. Egy kis tömegű csillag (<4 M_{Nap}) esetében a He a legmagasabb, ami tud fuzionálni, amikor ez is elfogy az összehúzódás utáni melegedés miatt keletkező fotonok miatt ledobja légkörét egy planetáris ködöt hagyva maga után, illetve a csillag megmaradt részéből fehér törpe lesz, ami lassacskán kihűl. Amennyiben a csillagnak volt társa, a fehér törpe anyagot szívhat el társcsillagáról, és amikor a tömege eléri a Chandrasekar-határt (1,4 naptömeg), akkor Ia típusú szupernóvarobbánsban felrobban.

Ha nagytömegű (>4 M_{Nap}) csillag elfejlődik, akkor vörös szuperóriás lesz belőle. A csillag magjában az egyre nehezebb elemek fúziója kezdődik meg, egészen a vasig (ez van a potenciálgödör mélyén, eddig mehet a fúzió). A fúzió leállása miatt a hidrosztatikai egyensúly felborul, neutrínók visszapattannak a vasmagról, lökéshullám keletkezik, és II. típusú szupernóva robbanás következik be. A maradvány csillag lehet egy neutroncsillag, vagy fekete lyuk, tömegtől függően (>60 M_{Nap} tömegű csillagokból lesz fekete-lyuk, ezalatt pedig neutroncsillag). A neutroncsillagok egy gyorsan forgó változata a pulzár, ahol nem esik egybe a forgástengely és a mágneses tengely. A fehér törpéket és a neutroncsillagokat a degenerált Fermi-gáz nyomása stabilizálja, ez áll ellen a gravitációnak. A HRD vízszintes tengelyén a színképosztályok is szerepelhetnek például, ezeket a hőmérséklet alapján osztották fel. A legfőbb osztályok: O, B, A, F, G, K, M. Ezeken belül 0-tól 9-ig vannak alosztályok is felvéve. A Nap a G2-es osztályba tartozik.



A csillagok luminozitása és a tömege között kapcsolat van ($L \sim M^{3,5}$), a csillag élettartamára pedig igaz, hogy

 $t\sim \frac{M}{L}\sim M^{-2,5}$

Tehát minél nagyobb a csillag tömege, annál gyorsabban elfejlődik, élettartama annál rövidebb.

A csillagok energiatermelése:

p-p lánc:

 $\label{eq:hardenergy} \begin{array}{l} {}^{1}H+{}^{1}H\rightarrow{}^{2}D+e^{+}+\nu\\ {}^{2}D+{}^{1}H\rightarrow{}^{3}He+\gamma\\ {}^{3}He+{}^{3}He\rightarrow{}^{4}He+{}^{1}H+{}^{1}H\\ \end{array}$ Tehát összességében: $6^{1}H\rightarrow{}^{4}He+{}^{1}H+{}^{1}H+$ melléktermékek Ez jellemző a kisebb csillagokra, pl a Nap magjában is ez a fontos.

CNO ciklus:

$$\label{eq:constraint} \begin{split} ^{12}C + ^{1}H &\to {}^{13}N + \gamma \\ ^{13}N &\to {}^{13}C + e^+ + \nu \\ ^{13}C + ^{1}H &\to {}^{14}N + \gamma \\ ^{14}N + ^{1}H &\to {}^{15}O + \gamma \\ ^{15}O &\to {}^{15}N + e^+ + \nu \\ ^{15}N + ^{1}H &\to {}^{12}C + ^{4}He \end{split}$$

A folyamatban a C, a N, és az O csak katalizátorként vesznek részt. A CNO ciklus a nagyobb csillagokra jellemző.

Megfigyelés alapjai: luminozitás, magnitúdó, vöröseltolódás

Magnitúdó: csillagászati fényességskála egysége: $m = -2.5 \log (F)$, ahol $F = \frac{L}{4\pi r^2}$ a fluxus és L a luminozitás. Ez utóbbi pedig az égitest által kisugárzott energia minden irányban: $L = \frac{dE}{dt}$. Két csillag fluxus-arányából a magnitúdó-arányuk:

$$m_1 - m_2 = -2, 5 \log \frac{F_1}{F_2}$$

Azért van ott a mínusz jel és a 2,5-ös szorzó faktor, hogy az ókori görögök skálájához hasonlót kapjunk. A magnitúdóskála fordított, tehát minél fényesebb egy csillag, annál kisebb szám a magnitúdója. Létezik relatív (látszólagos) és abszolút magnitúdó. Előbbi a Földről nézve egy objektum fényessége, utóbbi az a fényesség, amit akkor látnánk, ha az objektum 10 pc-re lenne. Az előző képletben m_1 és m_2 a látszólagos magnitúdók. A Nap látszólagos magnitúdója -27, abszolút magnitúdója pedig +4,83. Egy csillag abszolút fényessége és látszólagos fényessége között a következő összefüggés áll fent:

$$m - M = -2, 5 \log\left(\frac{10}{r}\right)^2 = 5 \log(r) - 5$$

ahol m_a látszólagos magnitúdó, Maz abszolút magnitúdó és r_a csillag tőlünk mért távolsága pc-ben. Tehát, ha valamilyen módon meghatározhatjuk az objektum abszolút fényességét, akkor a képlet segítségével kiszámolhatjuk a távolságot (a látható fényesség mérhető). Az abszolút fényesség meghatározására több módszer is létezik (periódus-fényesség reláció Cefeidákra és RR Lyr-ekre, SN-k, stb...).

Vöröseltolódás: ld. Doppler-effektus. Akkor lép fel, ha egy objektum távolodik tőlünk, színe egyre vörösebb lesz, a színképvonalai a hosszabb hullámhosszak felé tolódnak el. A világegyetem tágulása miatt a kozmikus objektumnál ez a jelenség lép fel, és a Hubble-törvénynek megfelelően minél távolabb van egy objektum, annál nagyobb a vöröseltolódása. Ezen a jelenségen épp ezért távolságmeghatározási módszerek is alapulnak. A vöröseltolódás ellentettje a kékeltolódás, amikor egy égitest közeledik felénk (pl. Androméda-galaxis, a Tejútrendszer spirálgalaxis szomszédja).

Definíció:
$$z = \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$$

Rudi megjegyzése: a vöröseltolódásban nem csak a Doppler-effektus játszik szerepet. Nagy távolságokon a skálafaktor növekedése "megnyújtja" az utazó foton hullámhosszát, ezért lesz a fény vörösebb, mint kiindulásának pillanatában. Mivel a hosszú utat megtett fotonok kibocsájtásának pillanatában (vagyis nagyon régen) a forrás hozzánk viszonyított sebessége még kisebb volt, nem is lehetne teljesen a Doppler-effektussal magyarázni a dolgot. Az egész csak árnyalatnyi dolog, főleg mert az így kapott vöröseltolódás pont akkora, mintha az éppen most kibocsájtott foton vöröseltolódását számolnánk tisztán Doppler-effektussal, vagyis ha csak Dopplernek tekintjük, akkor is ugyanazokat az eredményeket kapjuk.

Záróvizsga tematika

 Tételek
 A klasszikus mechanika alapjai | A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása | A relativitás elmélet alapjai | Egzaktul megoldható fizika problémák | Folytonos közegek mechanikája | Fenomenologikus termodinamika | Elektro- és magnetosztatika, áramkörök | Elektrodinamika | Hullámegyenlet és hullámoptika | Geometriai optika és alkalmazásai | A kvantumelmélet alapvető kísérletei | A kvantummechanika elméleti háttere | Atom- és molekulaszerkezet | A magfizika alapjai | A termodinamika statisztikus alapozása | Kvantumstatisztikák | Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok | Kristályos anyagok fizikája | Nemegyensúlyi folyamatok leírása | Az asztrofizika alapjai

Szócikkek forrása és közreműködői

Záróvizsga tematika Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=1153 Közreműködők:: Bertalan, Csega, Rudi, Zozi A klasszikus mechanika alapjai Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=1141 Közreműködők:: Bertalan, Csega, Zozi A klasszikus mechanika elméleti tárgyalása Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=31 Közreműködők:: Csega A relativitás elmélet alapjai Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=898 Közreműködők:: Bertalan, Csega, Jeffrey, 18 névtelen szerkesztés Egzaktul megoldható fizika problémák Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=1200 Közreműködők:: Bertalan, Birol, Csega Folytonos közegek mechanikája Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=1203 Közreműködők:: Bertalan, Csega Fenomenologikus termodinamika Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=1152 Közreműködők:: Bertalan, Csega Termodinamikai állapotjelzők Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=960 Közreműködők:: Bertalan Elektro- és magnetosztatika, áramkörök Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=1166 Közreműködők:: Bertalan, Birol, Csega, Rudi Elektrodinamika Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=94 Közreműködők:: Csega Geometriai optika és alkalmazásai Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=1071 Közreműködők:: Csega, Kofaragoka, Rudi A kvantumelmélet alapvető kísérletei Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=1096 Közreműködők:: Alma, Csega A kvantummechanika elméleti háttere Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=117 Közreműködők:: Csega Atom- és molekulaszerkezet Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=1103 Közreműködők:: Alma, Birol, Csega Kölcsönható rendszerek, mágneses anyagok Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=1140 Közreműködők:: Bertalan, Birol, Csega Kristályos anyagok fizikája Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=1191 Közreműködők:: Birol, Csega Nemegyensúlyi folyamatok leírása Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=1194 Közreműködők:: Bertalan, Csega, Kofaragoka, Lev258 Az asztrofizika alapjai Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?oldid=1236 Közreműködők:: Bertalan, Birol, Csega, Kofaragoka, Rudi

Képek forrásai, licencei és közreműködői

Kép:Erintokor.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Erintokor.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:eotvosvaz.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Eotvosvaz.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:forgasok.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Forgasok.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Fájl:tehetetlensegitenzor.pdf Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Tehetetlensegitenzor.pdf Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:Paradox.PNG Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Paradox.PNG Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:01Nyujt.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:01Nyujt.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:02Terfossz.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fáil:02Terfossz.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:03Nyiras.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:03Nyiras.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:04Csavar.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:04Csavar.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:05.Hajl1.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:05.Hajl1.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:06Hajl2.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:06Hajl2.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:07Hail3.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fáil:07Hail3.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:08Fesz1.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:08Fesz1.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:09Fesz2.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:09Fesz2.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:10Fesz3.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:10Fesz3.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:11Deform.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:11Deform.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:01Hullamv.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:01Hullamv.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:02Reflex.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:02Reflex.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:03Refrax.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:03Refrax.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:04Interf.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:04Interf.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:05Diffr.png Forrás; http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fáil:05Diffr.png Licenc; ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:06Doppler1.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:06Doppler1.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:07Doppler2.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:07Doppler2.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:12Emelo.png Forrás: http://mafihe.hu/-wiki/wiki/index.php?title=Fájl:12Emelo.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:13Paradox.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:13Paradox.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:14.kozl_edeny.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:14.kozl_edeny.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:15Felh.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:15Felh.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:16Uszas.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:16Uszas.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:17Felfesz.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:17Felfesz.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:18Gorbult.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:18Gorbult.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:19Nedvesit.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:19Nedvesit.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:20AramlasiCso1.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:20AramlasiCso1.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:21AramlasiCso2.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:21AramlasiCso2.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:22Bernoulli.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:22Bernoulli.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:23Viszk.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:23Viszk.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:24Orv.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:24Orv.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:25Orv.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:25Orv.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Fájl:CarnotCycle1.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:CarnotCycle1.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Bertalan Fájl:Carnot cycle p-V diagram.PNG Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Carnot_cycle_p-V_diagram.PNG Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Bertalan Fájl:CO2pvdgr.jpg Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:CO2pvdgr.jpg Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Bertalan Fájl:viz.jpg Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Viz.jpg Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Fájl:Titan_nikkel_fazisdiagram.jpg Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Titan_nikkel_fazisdiagram.jpg Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Bertalan Kép:dielektrikum.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Dielektrikum.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Rudi Kép:01Dielektr.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:01Dielektr.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:optpalya.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Optpalya.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:Fenyut.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Fenyut.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega File:lassu_valt.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Lassu_valt.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Rudi File:dia.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Dia.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Rudi Kép:paraxialis.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Paraxialis.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega File:gomb.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Gomb.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Rudi Kép:gombfok.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Gombfok.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:lencsefok.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Lencsefok.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:sugarmenet.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Sugarmenet.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:vastaglencse.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Vastaglencse.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:lupe.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Lupe.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:mikroszkop.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Mikroszkop.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:felbontokep.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Felbontokep.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:keplertavcso.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Keplertavcso.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:newtontavcso.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Newtontavcso.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:cassegriantavcso.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Cassegriantavcso.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:kausztika.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Kausztika.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:szivarvany.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Szivarvany.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:fenysav.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Fenysav.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:Thompsonkis.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Thompsonkis.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:Millikankiserlet.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Millikankiserlet.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Fájl:Imh0.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Imh0.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Fájl:Imh.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Imh.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Fájl:Hm.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Hm.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:hyst.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Hyst.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:01Pontracs.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:01Pontracs.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:02Forgat.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:02Forgat.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

 $\label{eq:constraint} K\acute{e}: 01129 px-Triclinic.png\ Forr\acute{a}: \ http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=F\acute{a}]: 01129 px-Triclinic.png\ Licenc:\ ismeretten\ K\"{o}: constraint} K\emph{o}d \sigma k:: Csega http://wiki/wiki/wiki/wiki/wiki/wiki/max.php?title=F\acute{a}]: 01129 px-Triclinic.png\ Licenc:\ ismeretten\ K\"{o}: constraint} K\emph{o}: constraint K\emph{o}: constraint K\emph{o}: constr$

Kép:02114px-Monoclinic.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:02114px-Monoclinic.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:04108px-Orthorhombic.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:04108px-Orthorhombic.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:05108px-Orthorhombic-base-centered.png Forrás: http://mafihe.hu/-wiki/wiki/index.php?title=Fájl:05108px-Orthorhombic-base-centered.png Licenc: ismeretlen Közreműködők::

Csega Kép:06108px-Orthorhombic-body-centered.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:06108px-Orthorhombic-body-centered.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:07108px-Orthorhombic-face-centered.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:07108px-Orthorhombic-face-centered.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:08108px-Tetragonal.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:08108px-Tetragonal.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:09108px-Tetragonal-body-centered.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:09108px-Tetragonal-body-centered.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:10139px-Rhombohedral.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:10139px-Rhombohedral.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:11100px-Hexagonal_lattice.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:11100px-Hexagonal_lattice.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:12109px-Cubic.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:12109px-Cubic.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:13109px-Cubic-body-centered.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:13109px-Cubic-body-centered.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:14109px-Cubic-face-centered.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:14109px-Cubic-face-centered.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:03Elemicell.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:03Elemicell.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:04FCC.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:04FCC.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:05BCC.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:05BCC.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:06Diamond1.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:06Diamond1.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:07Diamond2.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:07Diamond2.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:08NaCl.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:08NaCl.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:09HCP.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:09HCP.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:10Rontg1.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:10Rontg1.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:11Rontg2.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:11Rontg2.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:12Szinkrotron.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:12Szinkrotron.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:13ElektrMikro.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:13ElektrMikro.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:14FazisKul.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:14FazisKul.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega Kép:15Ewald.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:15Ewald.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:14Bragg.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:14Bragg.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:16Debye.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:16Debye.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:17Hotag.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:17Hotag.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:egyensuly.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Egyensuly.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:bolyong.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Bolyong.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

 $\label{eq:constraint} K\acute{e}p:drift.png \ Forr\acute{as:} \ http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=F\acute{a}jl:Drift.png \ Licenc: \ ismeretlen \ K\"{o}zrem\'uk\"od\refk:: \ Csegaardeffectures \ Csegaardef$

Kép:drift2.png Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Drift2.png Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Fájl:hubble_villa.jpg Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Hubble_villa.jpg Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:HRD.jpg Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:HRD.jpg Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega

Kép:csillagok_fejlodese.jpg Forrás: http://mafihe.hu/~wiki/wiki/index.php?title=Fájl:Csillagok_fejlodese.jpg Licenc: ismeretlen Közreműködők:: Csega