

# 1. fejezet

## A termodinamika statisztikusfizikai alapozása

*Mikrokanonikus, kanonikus, nagykanonikus sokaság. Mikroállapotok fogalma, Boltzmann-entrópia, egyszerű alkalmazások. Az egyensúly stabilitása, fluktuációk. Maxwell-féle sebességeloszlás.*

### 1.1. Entrópia fogalma a statisztikus fizikában

A statisztikus fizika nagy elemszámú ( $N \sim 10^{23}$ ) rendszerekkel foglalkozik, ekkora elemszám mellett a Newton egyenlet megoldása szinte lehetetlen ezért áttérni a kanonikus tárgyalásmódra, így a fázistér (változói:  $p_i, q_i$ ) egyetlen ( $6N$  dimenziós) pontja az egész rendszert leírja. A rendszer időfejlődését a fázistérben való trajektória írja le.

Klasszikus mechanikából láttuk, a következő kanonikus egyenleteket:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.1)$$

tehát a rendszer Hamilton-függvénye és az általános koordináták idő deriválva közt a (1.1) kapcsolat van. Ha  $H(q_i, p_i) = \text{áll.} = E$  akkor a fázistérben a pontok egy  $H(\vec{p}, \vec{q}) = E$  trajektórián fognak mozogni. A fázistérben a pontok eloszlását a Gibbs-féle sűrűséggel ( $\varrho(p, q)$ ) adhatjuk meg, azaz  $\varrho(p, q)$  azt adja meg, hogy mekkora valószínűséggel van az adott állapotban a rendszer. A  $\varrho(p, q)$  definíciójából következik, hogy:

$$\int \varrho(p, q) dV = 1 \quad (1.2)$$

ahol  $V$  az egész fázistérfogat. Továbbá a Liouville-tétel szerint, ha  $\varrho(p, q)$  explicite nem függ az időtől akkor igaz rá a kontinuitás egyenlet, azaz a fázistérfogat mérete időben állandó:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}_{p,q}(v\varrho) = 0 \quad (1.3)$$

A (1.3) egyenlet helyességét könnyen beláthatjuk, ha elvégezzük a kijelölt műveleteket:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}_{p,q}(v\varrho) &= \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial p_i} (\dot{p}_i \varrho) + \frac{\partial}{\partial q_i} (\dot{q}_i \varrho) \right] = \\ &= \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{H}{\partial p_i \partial q_i} + \frac{-H}{\partial p_i \partial q_i} \right) \varrho = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

a számolás során felhasználtam, hogy az általános koordináták nem függnek egymástól és a (1.1) kanonikus transzformációkat, valamint a Young-tételt.

Boltzmann a Shanon-féle információs entrópiával ( $S = -\frac{1}{\ln 2} \sum_i p_i \ln p_i$ ) analóg módon vezette be a statisztikus fizikai entrópia fogalmát:

$$S := -k_B \int \varrho \ln \varrho d\Gamma \equiv -k_B \langle \ln \varrho \rangle \quad (1.5)$$

ahol  $d\Gamma = \frac{d^{3N} p d^{3N} q}{N! h^{3N}}$  az elemi fázistér fogat ( $N!$  a kvantummechanika eredménye, a részecskék felcserélhetőek..., amíg nem tudtak róla, addig segéd fogalmat kellett bevezetni: keveredési entrópia), a  $\langle A \rangle$  pedig az  $A$  mennyiség statisztikus fizikai átlaga.

A statisztikus fizika alap posztulátuma: Olyan  $\varrho$ -t kell választani, hogy  $S$  maximális legyen a rendelkezésünkre álló összes információ függvényében. Ekkor a valószínű sűrűségünk egyenletes eloszlást ír le, azaz ekkor tudjuk a legkevesebbet a rendszerről.

## 1.2. Termodinamikai sokaságok

Ebben a fejezetben az alap posztulátumnak megfelelő  $\varrho$ -t keressük különböző, a rendszerről vett információk mellett.

### 1.2.1. Mikrokanonikus sokaság

Vizsgáljunk egy zárt rendszert, azaz  $E, N, V$  állandó, a fázistérben való mozgás pedig az  $E < H(p, q) < E + \delta E$  felületen megy végbe. Keressük az  $\varrho$ -t ami maximalizálja az entrópiát, ehhez használjunk Lagrange-féle multiplikátor ( $\lambda k_B$ ) módszert, ahol a mellékfeltételünk:

$$\int \varrho d\Gamma = 1 \quad (1.6)$$

Tegyük meg a variálást, és nézzük meg, hogy milyen összefüggést kapunk  $\varrho$ -ra:

$$S = -k_B \int_E^{E+\delta E} \varrho \ln \varrho d\Gamma \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} (0 =) \delta S &= \delta \left[ -k_B \int \varrho \ln \varrho d\Gamma + \lambda k_B \left( \int \varrho d\Gamma - 1 \right) \right] \\ &= -k_B \int \left( \delta \varrho \ln \varrho + \varrho \frac{1}{\varrho} \delta \varrho + \lambda \delta \varrho \right) d\Gamma \\ &= -k_B \int (\ln \varrho + 1 + \lambda) \delta \varrho d\Gamma \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\ln \varrho = -(1 + \lambda) = \text{áll.} := \ln \frac{1}{\Omega} \quad (1.9)$$

Tehát  $\varrho = \frac{1}{\Omega}$ , a normálási mellékfeltételből meghatározhatjuk  $\Omega$  értékét:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\Omega} d\Gamma &= 1 \\ \frac{1}{\Omega} \int 1 d\Gamma &= 1 \\ \Omega &= \int 1 d\Gamma \end{aligned} \quad (1.10)$$

Egy termodinamikai rendszer makroszkópos állapotjelölőkkel megadható állapotát makróállapotnak nevezzük. A makróállapot ismeretében még nem következtethetünk a molekuláris szinten lejátszódó eseményekre. Ehhez a rendszer folyton változó mikroszkopikus állapotait kell ismernünk. Ha a rendszer mikroszkopikus állapotát a mechanika szemszögéből vizsgáljuk, akkor egy adott időpontbeli állapot-meghatározáshoz meg kellene adnunk minden egyes molekula hely- és impulzus- (vagy sebesség) koordinátáit. Az így meghatározott állapotot mikroállapotnak nevezzük. A mikroállapotok

számát jelöltük  $\Omega$ -val. Tehát egy makróállapotot több mikróállapot is megvalósíthat, mivel a részecskék azonosak...

$\Omega$  segítségével az entrópia a következőképpen számolható ki:

$$S = -k_B \int \varrho \ln \varrho d\Gamma = -k_B \int \frac{1}{\Omega} \ln \frac{1}{\Omega} d\gamma = -k_B \ln \frac{1}{\Omega} = k_B \ln \Omega \quad (1.11)$$

Ez az összefüggés teremt kapcsolatot a statisztikus fizika és a termodinamika között.

### Mikrokannonikus tárgyalásban az ideális gáz entrópiája

Az entrópia kiszámolásához szükségünk van az állapot összeghez:

$$\Omega(E, V, N, \delta E) = \int_E^{E+\delta E} d\Gamma = \int_E^{E+\delta E} \frac{d^{3N} p_i d^{3N} q_i}{N! \hbar^{3N}} = \quad (1.12)$$

az ideális gáz Hamilton-függvénye nem függ az általános koordinátától, így az a részecskék teljes térfogatára vett integrálást elvégezhetjük, de az általános impulzustól viszont a következőképpen függ:  $E = \frac{p^2}{2m}$ , azaz a  $3N$  dimenziós gömb sugara  $p_i (= R) = \sqrt{2mE}$  aminek egy  $\delta E$  vékony héjára kell elvégezni az integrálást.  $N$  dimenziós gömb térfogata:

$$V = \frac{\pi^{d/2}}{\left(\frac{d}{2}\right)!} r^d \quad (1.13)$$

és tudjuk, hogy a gömbhéj térfogata:

$$\Omega_h = \frac{d\Omega_0}{dE} \delta E \quad (1.14)$$

Így az állapot összeg:

$$\begin{aligned} \Omega(E, V, N, \delta E) &= \frac{V^N}{N! \hbar^{3N}} \cdot \left( \frac{d\Omega_0}{dE} \delta E \right) \\ &= \frac{V^N}{N! \hbar^{3N}} \cdot \frac{d}{dE} \left( \frac{\pi^{3N/2}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!} r^{3N} \right) \delta E \\ &= \frac{V^N}{N! \hbar^{3N}} \frac{\pi^{3N/2}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!} (2m)^{\frac{3N}{2}} E^{\frac{3N}{2}-1} \frac{3N}{2} \delta E \end{aligned} \quad (1.15)$$

az entrópia pedig:

$$\begin{aligned} S(E, V, N, \delta E) &= k_B \ln \Omega \\ &= S(E, V, N) - 1 \ln E + \ln(\delta E) \end{aligned} \quad (1.16)$$

az első tag az olyan mintha  $\int_0^E$ -ig ment volna az integrálás, a második tagban az 1 igencsak elhanyagolható, a harmadik tag meg végképp, mivel egy kicsi számnak kell az ln-t venni. Tehát azt láttuk, hogy mindegy, hogy meddig megy az integrál ( $\int_0^E$ , vagy  $\int_E^{\delta E}$ )

#### 1.2.2. Kanonikus sokaság

Vizsgáljunk egy hőtartállyal körülvett rendszert, azaz  $N, V$  állandó és  $\langle H \rangle = E$  adott. Keressük az a  $\varrho$ -t ami maximalizálja az entrópiát, ehhez használjunk Langrange-féle multiplikátor módszert, ahol a mellékfeltételeink:

$$\begin{aligned} \int \varrho d\Gamma &= 1 & \lambda_1 &= k_B \lambda \\ \int H d\Gamma &= E & \lambda_2 &= -k_B \beta \end{aligned}$$

variálással megint megkaphatjuk a sűrűség függvényét:

$$\begin{aligned} (0 =) \delta S &= -k_B \delta \left[ \int \varrho \ln \varrho d\Gamma + \lambda \left( \int \varrho d\Gamma - 1 \right) + \beta \left( \int \varrho H d\Gamma - E \right) \right] \\ \varrho &= e^{-(1+\lambda+\beta H)} \end{aligned} \quad (1.17)$$

A normálási feltételből adódik, hogy:

$$1 = \int \varrho d\Gamma = e^{-(1+\lambda)} \int e^{-\beta H} d\Gamma \quad (1.18)$$

$$\frac{1}{Z} := e^{-(1+\lambda)} = \frac{1}{\int e^{-\beta H} d\Gamma} \quad (1.19)$$

Így az entrópiája:

$$\begin{aligned} S &= -k_B \int \varrho \ln \varrho d\Gamma = -k_B \int \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \left[ \ln \frac{1}{Z} + (-\beta H) \right] \\ &= k_B \beta \langle H \rangle + k_B \ln Z \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$= \frac{1}{T} \langle H \rangle + k_B \ln Z \quad (1.21)$$

A (1.21) kifejezés első tagja állandó, így nem ad új információt, csapjuk át a másik oldalra és ráismerhetünk a szabad energiára:

$$F(T, V, N) = \langle H \rangle - TS = -k_B T \ln Z \quad (1.22)$$

### Kanonikus tárgyalásban az ideális gáz szabad energiája

Az állapot összeg tehát:

$$\begin{aligned} Z &= \int e^{-\beta H} d\Gamma = \frac{V^N}{N! \hbar^{3N}} \int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} d^3p = \\ &= \frac{V^N}{N! \hbar^{3N}} \int e^{-\frac{\beta}{2m} p^2} d^3p = \frac{V^N}{N! \hbar^{3N}} \int e^{-\frac{\beta}{2m} p^2} \cdot 4\pi p^2 dp \\ &= 4\pi \frac{V^N}{N! \hbar^{3N}} \cdot \frac{\partial}{\partial \left(-\frac{\beta}{2m}\right)} \int e^{-\frac{\beta}{2m} p^2} dp \\ &= -4\pi \frac{V^N}{N! \hbar^{3N}} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\beta}{2m}\right)} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\beta}{2m}}} \\ &= 4\pi \frac{V^N}{N! \hbar^{3N}} \sqrt{\pi} \left(\frac{\beta}{2m}\right)^{-3/2} \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.23)$$

a számolás során felhasználtam a gauss integrált:  $\int e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ .

#### 1.2.3. Nagykanonikus sokaság

Vizsgáljunk egy hőtartállyal körülvett rendszert, ami a hőtartállyal részecskét tud cserélni, azaz  $V$  állandó,  $\langle H \rangle = E$  és  $\langle N \rangle = N$  adott. Hasonló képen mint idáig (csak most a mellékfeltételeket szummás alakban kell keresni, mivel a részecskeszám változás diszkrét) most is meghatározhatjuk  $\varrho$ -t és a harmadik mellékfeltétel Lagrange multiplikátora pedig legyen:  $k_B \mu \beta$ . Így

$$\varrho = e^{-(1+\lambda+\beta H - \mu \beta N)} \quad (1.24)$$

a normálási feltételből pedig:

$$1 = \sum \int \varrho d\Gamma = e^{-(1+\lambda)} \sum_N \int e^{\beta H - \mu \beta N} d\Gamma \quad (1.25)$$

$$\varrho := \frac{1}{Q} e^{\beta H - \mu \beta N} \quad (1.26)$$

$$Q = \sum_N \int e^{-\beta H - \beta \mu N} d\Gamma \quad (1.27)$$

Ennek a sokaságnak a potenciálja pedig a Gibbs-potenciál

$$\phi(T, V, N) = \langle H \rangle - TS - \mu N = -k_B T \ln Q \quad (1.28)$$

### Nagykanonikus tárgyalásban az ideális gáz szabad energiája

Egy részecske állapot összege:

$$Z_1 = \int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} d\Gamma = \dots = \frac{V}{h^3} \left( \frac{\pi}{\beta/2m} \right)^{3/2} \quad (1.29)$$

így a nagykanonikus sokaság állapot összege:

$$Q = \sum_N \frac{(Z_1 e^{-\beta \mu})^N}{N!} = e^{Z_1 e^{-\beta \mu}} \quad (1.30)$$

és

$$\phi(T, V, N) = -k_B T \ln Q - k_B T Z_1 e^{\beta \mu} \quad (1.31)$$

## 1.3. Termodinamika főtételei

### 1.3.1. Termodinamika nulladik főtétele (egyensúly feltétele)

Az egyszerű rendszereknek vannak olyan speciális, u.n. egyensúlyi állapotai, melyek makroszkopikus szempontból egyértelműen jellemezhetők belső energiájukkal, térfogatukkal, és molekulaszámukkal.

#### Energia csere esetén (hőmérséklet definíciója)

Van két zárt rendszerünk, amiknek egy közös fala van. Tegyük fel, hogy a kölcsönhatás mértéke a felülettel arányos és rövid hatótávolságú és csak energiacsere játszódhat le. Ekkor a két rendszert jellemző extenzív mennyiségek összeadódnak:

$$E = E_1 + E_2 \quad (1.32)$$

$$N = N_1 + N_2 \quad (1.33)$$

$$V = V_1 + V_2 \quad (1.34)$$

$$S = S_1 + S_2 \quad (1.35)$$

A következő számolás kedvéért térjünk át egy változóra:

$$S(E) = S(E_1 + E_2) = S(E_1) + S(E_2) = S(E_1) + S(E - E_1) \quad (1.36)$$

Egyensúly esetén (az alap posztulátum miatt) az entrópiának maximuma van, így

$$\begin{aligned} (0 =) \frac{\partial S}{\partial E} \Big|_{N_i, V_i} &= \frac{\partial S_1(E_1)}{\partial E_1} + \frac{\partial S_2(E - E_1)}{\partial E_1} = \frac{\partial S_1(E_1)}{\partial E_1} + \frac{\partial S_2(E - E_1)}{\partial(E - E_1)} \frac{\partial(E - E_1)}{\partial E_1} \\ &= \frac{\partial S_1}{\partial E_1} + (-1) \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \end{aligned} \quad (1.37)$$

azaz egyensúly esetén  $\frac{1}{T} := \frac{\partial S}{\partial E} \Big|_{V, N}$  kiegyenlítődik. A kiegyenlítődő mennyiségeket intenzív állapotjelzőknek nevezzük.

**Nem rögzített fal esetén (nyomás definíciója)**

Van két zárt rendszerünk, amiknek egy közös fala van, a fal mozoghat. A két rendszert jellemző extenzív mennyiségek összeadódnak:

$$E = E_1 + E_2 \quad (1.38)$$

$$N = N_1 + N_2 \quad (1.39)$$

$$V = V_1 + V_2 \quad (1.40)$$

$$S = S_1 + S_2 \quad (1.41)$$

Az előzőhöz hasonló módon térjünk át egy változóra:

$$S(V) = S(V_1 + V_2) = S(V_1) + S(V_2) = S(V_1) + S(V - V_1) \quad (1.42)$$

Í Felhasználva hogy egyensúly esetén az entrópiának szélsőértéke van azt kapjuk: egyensúly esetén  $\frac{P}{T} := \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{E,N}$  kiegyenlítődik. Ideális gáz esetén  $\frac{P}{T} = \frac{k_B N}{V}$ , ezt az egyenlet extrapolálva megkapjuk az abszolút hőmérsékleti skálát.

**Szitával elválasztott két rendszer esetén (kémiai potenciál definíciója)**

Van két zárt rendszerünk, amiknek egy közös, lukas (részecskeszám történhet) fala választ el. Ekkor az egyensúly feltételére az adódik, hogy:  $\left. \frac{\partial S}{\partial N} \right|_{E,V} := -\frac{\mu}{T}$  kiegyenlítődik. A kémiai potenciál azt adja meg, hogy mennyire változik meg a rendszer energiája, ha beteszünk egy részecskét.

**Euler egyenlet**

Az előbb felsorol állapotjelzők nem függetlenek, és a köztük lévő kapcsolatot írja le az Euler egyenlet:

$$E = E(S, V, N) \quad (1.43)$$

Mivel lineáris kapcsolat van köztük ezért:

$$\begin{aligned} \lambda E &= E(\lambda S, \lambda V, \lambda N) & \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ E &= \frac{\partial E}{\partial(\lambda S)} S + \frac{\partial E}{\partial(\lambda V)} V + \frac{\partial E}{\partial(\lambda N)} N & \lambda = 1 \\ E &= TS - PV + \mu N \end{aligned} \quad (1.44)$$

**1.3.2. Termodinamika első főtétel (Ekvivalencia tétel)**

Az entrópiából ( $S(E, V, N)$ ) írtuk fel idáig minden állapotjelzőt, de ez az egyenlet átrendezhető  $E(S, V, N)$ -re. Ehhez írjuk fel az entrópia teljes differenciálját.

$$\begin{aligned} dS &= \left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{V,N} dE + \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{E,N} dV + \left. \frac{\partial S}{\partial N} \right|_{E,N} dN \\ &= \frac{1}{T} dE + \frac{P}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$dE = TdS - PdV + \mu dN = \Delta Q + \Delta W \quad (1.46)$$

ahol  $Q = TS$  a hőcsere és a rendszeren végzett munka  $W = -PdV + \mu dN$ , a  $\Delta$  azt jelöli, hogy útfüggőek, de az összegük mér nem. Tehát az első főtétel az energia megmaradást írja le.

## Termodinamikai potenciálok

Az első részben különféle termodinamikai potenciálokkal  $(F, \phi)$  ismerkedhettünk meg. Ezek az első főtételből Lagrange transzformáció

$$f(x) \rightarrow g(x) = f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} x \quad (1.47)$$

segítségével származtathatóak. Nézzük meg, hogy a szabad energia mi is valójában:  $f(x) = E(S, V, N)$  és  $g(x) = F(T, V, N)$  tehát az entrópiát transzformáltuk ki és helyette az  $\phi$  változópárja jött be (hőmérséklet):

$$F(T, V, N) = E - \frac{\partial E}{\partial S} S = E - TS \quad (1.48)$$

$F$  teljes differenciálja pedig:

$$dF = dE - dT S - T dS = T ds - PdV + \mu dN - dTS - T dS = -SdT - PdV + \mu d \quad (1.49)$$

A (1.49) összefüggés alapján minden termodinamikai állapotjelzőt kifejezhetünk  $F$ -ből.

A Gibbs potenciálnál  $\phi(T, P, N)$  tehát  $S$  és  $V$ -t transzformáltuk ki, így:

$$G(T, P, N) = E - \frac{\partial E}{\partial S} S - \frac{\partial E}{\partial V} V = E - TS + PV \quad (1.50)$$

## 1.4. Fluktuációk

A legkülönbözőbb energia eloszlás (mikroállapot) eredményezhet azonos makroszkopikus energiát (makroállapotot). Ebből következik, hogy a különböző mikroállapotok egyformán valószínűek. Elég hosszú időtartam alatt a rendszer felveheti valamennyi mikroállapotát. Mivel a termodinamikai állapotmennyiségek meghatározásához véges időtartam szükséges, a mérés mindig egy bizonyos ideig tart, ezért a kapott eredmény a mérési időtartamra vonatkozó középérték lesz. Ezt tekinthetjük a mikroállapotok egy adott időtartamra vett átlagának.

Ebben a fejezetben vizsgáljuk meg, hogy az egyensúly körüli fluktuációk mértéke mekkora. Az energia várható értékét kanonikus sokaságban a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\langle H \rangle = \frac{\partial Z}{\partial(-\beta)} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial(-\beta)} = \frac{1}{Z} \int H e^{-\beta H} d\Gamma = \int H \rho d\Gamma \equiv \langle H \rangle \quad (1.51)$$

ha  $\ln Z$ -nek vesszük a második deriváltját akkor megkaphatjuk az energia átlagtól való eltéréseinek a négyzetét:

$$\sigma_E^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial(-\beta)} = \dots = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 \quad (1.52)$$

Ez a fluktuáció a fajhővel arányos:

$$\sigma_E^2 = \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial(-\beta)} = -\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial(k_B T)} \frac{k_B T}{\beta} = c_V k T^2 \quad (1.53)$$

Mivel az energia és a fajhő is extenzív mennyiség (arányos  $N$ -nel), így:

$$\sqrt{\frac{\sigma_E^2}{E^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (1.54)$$

mivel  $N$  nagyon nagy szám arra utal, hogy a fluktuációk makroszkopikus testek esetén nagyon kicsik. Kérdéses azonban, hogy mekkora az arányossági tényező, ez ugyanis fázisátalakulások közelében nagyon megnőhet.

## 1.5. Maxwell-féle sebesség eloszlás

Keressük annak a valószínűségét, hogy ideális gázból kiragadunk egy részecskét és hogy annak a sebessége  $(v, v + dv)$  között van. Ezt úgy tehetjük meg hogy ha a sűrűség függvény kiintegráljuk az összes többi részecskére  $(d\Gamma)$  és a részecske impulzusát a teljes térszögre, mivel a sebesség nagyság szerinti eloszlása a kérdés (iránya nem számít):

$$f(v)dv = C \int_{\Omega} d^3p \int \frac{e^{-\beta H}}{Z} d\Gamma' \quad (1.55)$$

ahol a vessző azt jelenti, hogy a mi részecskénket leszámítva az összes többi.

$$\begin{aligned} f(v)dv &= Cp^2 dp \int_{\Omega} d\Omega \int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \frac{e^{-\beta H'}}{\int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} p^2 dp d\Omega \int d\Gamma' e^{-\beta H'}} \\ &= 4\pi Cp^2 dp \frac{e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}}{\int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} p^2 dp} \end{aligned} \quad (1.56)$$

A használjuk fel, hogy  $p = mv$  és végezzük el a nevezőben a Gauss integrálást. Akkor a következőt kapjuk:

$$f(v) = \text{Norm.} \sqrt{\frac{8n}{\pi k_B T}} \frac{mv^2}{2k_B T} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (1.57)$$

ahol a normálási tényezőt az  $\int f(v)dv = 1$  feltételből kapjuk. Ha legnagyobb valószínűséggel megtalálható sebesség (elvégezve a deriválást és nullává téve az egyenletet adódik)  $\frac{mv_m^2}{2} = k_B T$ .