1. fejezet

Elektro- és magnetosztatika, áramkörök

Coulomb- és Gauss-törvény, szuperpozíció elve, stacionárius áram. Vezetők, szigetelők, dielektrikumok, kondenzátor, magnetosztatika. Stacionárius áram, áramköri törvények: Kirchhofftörvények, Ohm-törvény

1.1. Elektrosztatika

1.1.1. Gauss törvény differenciális alakja

A Gauss tétel az elektrodinamika egyik alapegyenlete, azt mondja ki hogy egy tetszőleges zárt felületen átmenő elektromos erővonalak száma (fluxus) arányos az f felülettel körülhatárolt testen belüli töltések algebrai összegével:

$$\oint_f E df \sim \int_{V_f} \varrho dV \tag{1.1}$$

az arányossági tényező: $\frac{1}{\varepsilon_0}$, V_f az f felület által körülhatárolt térfogat, ϱ az elektromos töltéssűrűség és ε_0 a vákuum dielektromos állandója. Mivel V_f-en kívül ϱ értéke nulla, így az integrálás kiterjeszthető az egész térre, továbbá a bal oldalt alakítsuk át a matematikai gauss tétel segítségével:

$$\begin{aligned} \int_V divEdV &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \varrho dV \\ divE &= \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \qquad (1.2) \end{aligned}$$

A (1.2) egyenletet nevezzük differenciális Gauss-tételnek. Ami azt mondja hogy az elektromos töltések hoznak létre elektromos teret. Ha $\varrho = 0$ akkor az adott felületen átmenő irányított erővonal összeg nulla, valamint az is látszik az egyenletből, hogy az erővonalak a pozitív töltésből a negatív töltésbe futnak (pl. ha $\varrho < 0$, akkor $divE < 0$ tehát nyelő).

1.1.2. Coulomb-törvény és a szuperpozíció elve

Az elektromos teret egyértelműen magadhatjuk, ha ismertjük a tér rotációját és divergenciáját, ezek írják le a Maxwell egyenletek közül a Gauss, illetve a Faraday-törvény:

$$divE = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \tag{1.3}$$

$$rotE = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{1.4}$$

Statika esetén minden mennyiség időderiváltja nulla, így a Faraday egyenlet azt mondja, hogy sztatika esetén az elektromos tér rotációmentes. Vektoranalízisből tanultak alapján tudjuk hogy ekkor E előállítható egy skalármező gradienseként:

$$E = -grad\phi \tag{1.5}$$

A skalár potenciál fizikai jelentése a munkavégző képesség:

$$W = \int_A^B E ds = -\int_A^B grad\phi ds = \phi(A) - \phi(B) \tag{1.6}$$

Ha az elektromos tér (1.5) alakját beírjuk a (1.2) gauss tételbe, akkor egy Laplace egyenletet kapunk ϕ-re:

$$div\, grad\phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \tag{1.7}$$

$$\Delta\phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \tag{1.8}$$

Az ilyen fajta differenciálegyenletek Green függvény segítségével megoldhatóak, a megoldás a következő alakú:

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho(r')}{|r - r'|} d^3r' \tag{1.9}$$

Egy darab ponttöltés esetén könnyen elvégezhetjük az integrálást, az origóba helyezett pontöltés esetén töltés eloszlás:

$$\varrho(r) = q\delta(r) \tag{1.10}$$

így

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{q\delta(r')}{|r - r'|} d^3r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \tag{1.11}$$

Két nyugvó pontöltés közt ható erőt írja le a Coulomb-törvény, az egyik töltésre ható másik töltés tere a következő erőt eredményezi:

$$F_{12} = F_{21} = E_2 q_1 = -grad\phi_2 \cdot q_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \tag{1.12}$$

a két erő nagysága megegyezik, irányuk viszont ellentétes (Newton harmadik axiómája miatt). Ha több töltésünk is van akkor bármely töltésre ható erő egyenlő az összes többi töltéstől származó Coulomb-erők vektori összegétől, ezt nevezzük szuperpozíció elvének.

1.1.3. Elektrosztatika polarizálható közeg, dielektrikumok jelenlétében

Faraday azt vette észre, hogy közeg jelenlétében az elektromos térerősség lecsökken, a lecsökkenés mértékét nevezte ε_r relatív dielektromos állandónak:

$$\varepsilon_r := \frac{E_0}{E} > 1 \tag{1.13}$$

Ahol E_0 adott töltés eloszlás mellett a térerősség, ha vákuum lenne és E a térerősség dielektrikum jelenlétében. Ezt a lecsökkenést azzal magyarázhatjuk, hogy az elektromos tár polarizálja a közeget, ami leárnyékolja az eredeti töltés eloszlásunk egy részét, így az eredő töltés eloszlás:

$$\varrho = \varrho_{sz} - divP \tag{1.14}$$

ahol P a polarizáció vektor (adott térfogatban az eredő dipólmomentum). Vezessünk be egy új mennyiséget, az elektromos eltolási vektort ami segítségével a Gauss-tételhez hasonló egyenletet kapunk, legyen:

$$D := \varepsilon_0 E + P \tag{1.15}$$

így a módosított Gauss-tétel:

$$divD = \varrho_{sz} \tag{1.16}$$

Kísérleti tapasztalatok alapján lineáris közeg esetén E és P között helyfüggetlen lineáris kapcsolat van:

$$P = \varepsilon_0 \chi_e E \tag{1.17}$$

ahol χ_e az elektromos szuszceptibilitás. Tehát az elektromos eltolás vektor így a következő:

$$D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 \chi_e E = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) E \tag{1.18}$$

Emlékezzünk vissza a (1.13) definíciójára, és akkor láthatjuk hogy:

$$(1 + \chi_e) \equiv \epsilon_r \tag{1.19}$$

A relatív és a vákuumbeli dielektromos együttható szorzatát ε, dielektromos állandónak nevezik, így a következő egyszerű kapcsolat van az eltolási vektor és az elektromos térerősség között:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon E \tag{1.20}$$

Két különböző dielektrikumomos közeg közti határfeltételek

Az Maxwell-egyenletek integrálásos alakjából következik hogy sztatika esetén:

$$rot E = 0 \rightarrow \oint E ds = 0 \tag{1.21}$$

$$div E = 0 \rightarrow \oint D df = 0 \tag{1.22}$$

ezeket kell kielégíteni a határfeltételeken is. Felhasználva, hogy $B = \mu_0 \mu_r H$ megkaphatjuk a többi komponens transzformációját.

E tangenciális komponense folytonosan meg át a határon. Az 1 és 2 közeget elválasztó határfelületen vegyünk fel egy kis (ζ oldalú) négyzetet, a négyzet határfelületre merőleges oldalával tartsunk nullához, ekkor az első összefüggésből következik, hogy:

$$\oint E ds = E_1^t \zeta - E_1^t \zeta = 0 \tag{1.23}$$

azaz két különböző közeg határfelületén az E elektromos térerősség érintő irányú komponense folytonosan halad át, a határfelület átlépése során változatlan marad:

$$E_1^t = E_2^t \tag{1.24}$$

a (1.20) összefüggésből adódik, hogy tangenciális komponensének ugrása van a határon:

$$\frac{D_1^t}{D_2^t} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{1.25}$$

D normál komponense folytonosan meg át a határon. Az 1 és 2 közeget elválasztó határfelületen vegyünk fel egy kis (f felületű) kockát, a kocka határfelületre merőleges oldalával tartsunk nullához, ekkor a második összefüggésből következik, hogy:

$$\oint D df = D_1^n f - D_2^n f = 0 \tag{1.26}$$

Tehát az eltolásvektor normál komponense a két közeg határfelületén folytonosan halad át. Viszont a (1.20) összefüggés alapján az elektromos térerősség normál komponense ugrik:

$$\frac{E_1^n}{E_2^n} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tag{1.27}$$

E és D vektorok törési törvénye. Vegyünk fel egy beesési merőleges a közeg határán és jelöljük az E és D vektorral bezárt szögét α_1-gyel az egyik közegben (beesési szög) és α_2-vel a másik közegben (törési szög), ekkor a következő törvény írható fel:

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{E_1^t/E_1^n}{E_2^t/E_2^n} = \frac{D_1^t/D_1^n}{D_2^t/D_2^n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{1.28}$$

1.1.4. Elektrosztatika vezetők jelenlétében

Ha egy fémes vezetőt elektromos térbe helyezünk, akkor ennek hatására a vezetőben lévő szabad elektronok a külső térrel ellentétes irányba fognak mozogni mindaddig, míg a vezető belsejében indukált tér nagyság meg nem egyezik a külső tér nagyságával. Tehát sztatika esetén a homogén vezető anyag belsejében az eredő tér nulla (Fraday-kalicka, elektrosztatikai árnyékolás, védelem). Ha az elektromos térerősség nulla a vezető belsejében, akkor a vezető belsejében a potenciál állandó.

Egyensúly esetén egy fémben lévő Q többlettöltés a vezető felületén helyezkedik el. A felületi töltés sűrűség arányos az adott felületen lévő térerősség nagyságával

$$E = \varepsilon_0 \eta \tag{1.29}$$

Különböző sugarú töltött gömbök esetén:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} \tag{1.30}$$

azaz a térerősség fordítottan arányos a sugárral, nagyobb görbületű helyeken kisebb a térerősség, végtelen kis görbület esetén nagy a térerősség (csúcshatás, Segner-kerék, gyertya fújás (csúcshatás+polarizálás)).

1.2. Magnetosztatika

A mágneses tér jellemzésre a H mágneses térerősséget használjuk, a Maxwell-egyenletek alapján sztatika és üres tér estén a következő egyenleteket elégíti ki:

$$divH = 0 \tag{1.31}$$

$$rotH = 0 \tag{1.32}$$

Az (1.31) egyenlet azt írja le hogy nem létezik mágneses monopólus. A (1.32) egyenletből következik, hogy a sztatikus mágneses tér előállítható egy skalárpotenciál segítségével:

$$H = -grad\phi \tag{1.33}$$

1.2.1. Mágneses tér mágnesezhető anyagok jelenlétében

Hasonlóan mint elektromos tér esetén a polarizáció, itt az közeg mágnesezettsége jelenik meg: divH = - M ahol M az anyag mágnesezettsége. A elektrosztatikával analóg módón vezessük be a mágneses indukció vektort:

$$B := H + M \tag{1.34}$$

Lineáris közeg esetén a következő kapcsolat van a mágneses indukció és mágneses térerősség vektor között:

$$B = \mu H \tag{1.35}$$

ahol μ az anyagra jellemző mágneses permeabilitás. Így a közeg mágnesezettsége és mágneses térerőssége közti kapcsolat:

$$M = B - H = \mu H - H := \chi_m H \tag{1.36}$$

ahol χ_m az anyag mágneses szuszceptibilitása. Az anyagok két csoportra oszthatóak, attól függően milyen a χ_m előjele: ha $\chi < 0$ akkor diamágnesről beszélhetünk, ha $\chi_m > 0$ akkor paramágneses anyagról beszélhetünk. Diamágneses anyagok szuszceptibilitása hőmérséklet független. Paramágneses anyagoknak szuszeptibilitása fordítottan arányos a hőmérséklettel (Courie törvény). Továbbá vannak a ferromágneses anyagok, ezeknél H és M értéke nem arányos, hanem bonyolultabb kapcsolat figyelhető meg.

B és H vektorok viselkedése két közeg határán

Hasonló módón, mint az elektrosztatikában a határfeltételek a következők:

$$rotH = 0 \rightarrow \oint H_n ds = 0 \rightarrow H_1^t = H_2^t \tag{1.37}$$

$$divB = 0 \rightarrow \oint D_n df = 0 \rightarrow B_1^n = B_2^n \tag{1.38}$$

1.3. Stacionárius áram

A stacionárius áram kifejezés arra utal, hogy nincsen időbeli változása az áramnak. Ez állandó mágneses teret hoz létre maga körül. Gyakran használjuk a lineáris vezető kifejezést. Ez hasonló absztrakció, mint a ponttöltés bevezetése sztatikában. Itt arra kell gondolni, hogy adott egy görbe a térben, és ennek a görbének minden pontjában egy j áramsűrűség van, amely párhuzamos a görbe irányvektorával. Az áramot valamilyen potenciálkülönbség hajtja körben az áramkörben. Ezt valamilyen hatással (kémiai, mechanikai, stb.) létre kell hozni, és fenn kell tartani. Erre bevezetjük az elektromotoros erőt: ez azzal a térerősséggel egyenlő, amely a töltésszétválasztás során létrejött teret kompenzálja, ha nem folyik áram.

1.3.1. Egyenáramok mágneses tere

A gerjesztési-törvényből

$$rotB = \mu_0 j + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \tag{1.39}$$

látszik, hogy sztatikus áram örvényes mágneses teret kelt. Egyenárammal átjárt lineáris vezető egy infinitezimális darabja által létrehozott mágnes terén a nagyságát a Biot-Savart-törvény adja meg:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3} d^3 r' \tag{1.40}$$

1.3.2. Egyenáramok mágneses térben

Az I áramot vivő vezetőre ható F erő és az őt létrehozó B mágneses tér közti kapcsolatot a Lorentz törvény alapján (mozgó töltésre ható erő mágneses térben: $F = Q\,(v \times B)$) a következőképpen írhatjuk fel:

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \tag{1.41}$$

ahol l a vezető mágneses térben vett hossza, iránya pedig az áram irányába mutat. F,l,B vektorok jobb sodrású rendszert alkotnak.

1.3.3. Ohm törvény

Lokális, differenciális Ohm-törvény:

$$j = \sigma E \tag{1.42}$$

ahol j az áramsűrűség, az E elektromos térerősség, $\sigma = \frac{1}{\varrho}$ (ϱ a fajlagos ellenállás) a fajlagos vezetőképesség és ? a fajlagos ellenállás. Fontos megjegyezni, hogy nem tartalmazzák a Maxwell-egyenletek, tulajdonképpen ez is anyagi egyenlet.

1.3.4. Kirchhoff-törvények

A Kirchhoff-törvények a villamosságtanban a töltés és az energia megmaradását tárgyalják. Feladatok esetén is jól alkalmazhatjuk (ablak módszer).

Csomóponti törvény (töltés megmaradás)

A törvény kimondja, hogy a csomópontba befolyó áramok összege megegyezik az onnan elfolyó áramok összegével. A törvény alapja az, hogy egy villamos hálózat csomópontjaiban nincs töltésfelhalmozódás (forrásmentes hely).

Huroktörvény (energia megmaradás)

A törvény értelmében bármely zárt áramhurokban a részfeszültségek előjelhelyes összege zérus.